ERNST LINDELÖF

INLEDNING TILL

DEN HÖGRE ANALYSEN





Kragh
Okt. 13.

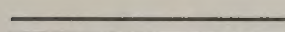
INLEDNING

TILL

DEN HÖGRE ANALYSEN

AF

ERNST LINDELÖF,
PROFESSOR VID UNIVERSITETET I HELSINGFORS.



STOCKHOLM,
ALBERT BONNIERS FÖRLAG.

HELSINGFORS 1912
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI

Förord.

Föreliggande lärobok, som framgått ur de inledande föreläsningar hvilka jag särskilda gånger hållit vid Helsingfors' Universitet, är afsedd att af de studerande genomgås under det första året af deras studier.

För att så nära som möjligt anknyta framställningen vid de kunskaper eleverna tidigare inhemtat, genomgås i det första kapitlet, såsom en repetition och komplettering af skolkursen, ganska utförligt de elementära funktionernas egenskaper. En liknande karaktär har det andra kapitlet, som behandlar de förkortade räknesätten samt reglerna för uppskattning af felet vid kalkyl med approximativa värden.

I det tredje kapitlet framställes den vackra teorin för kedjebråk, hvilken är speciellt egnad att utveckla det aritmetiska sinnet och därför väl försvarar sin plats i en inledning till Analysen.

Genom de tre första kapitlen har läsaren vunnit så att säga ett intuitivt underlag för det fjärde kapitlets abstraktare undersökningar om gränsvärden och serier. I det femte kapitlet framställas härefter grunderna af differentialkalkylen, jämte några enkla användningar af densamma hvilka ernås utan den TAYLOR'ska formeln.

Läsaren träder ånyo i beröring med skolkursen i det sjette kapitlet, i hvilket begreppen längd, area och volym logiskt uppbyggas och särskilda beräkningar utföras i direkt anslutning till de uppställda definitionerna. Dessa undersök-

ningar utgöra tillika en viktig förberedelse för integralkalkylen, hvars grundbegrepp och enklaste geometriska användningar ganska utförligt behandlas i det sjunde kapitlet.

En sträng framställning af den högre Analysens principer förutsätter med nödvändighet en på rent logisk grund uppbyggd teori för de irrationella talen, hvarför äfven flertalet nyare läroböcker i Analys inledas af en dylik teori, jämte bevis för särskilda allmänna satser af förberedande natur. Denna ordningsföljd, som är nödvändig vid en syntetisk framställning, medför emellertid, då det gäller ett första införande i ämnet, ganska stora olägenheter i pedagogiskt afseende, i det läsaren till en början länge nödgas uppehålla sig vid allmänna definitioner och satser för hvilka han icke ser någon omedelbar användning, och hvilka därför, på detta stadium, icke förmå väcka hans intresse.

Af detta skäl har jag i föreliggande lärobok följt en annan uppställning. De irrationella talen hafva till en början antagits såsom bekanta för läsaren, men hvarje gång ämnets naturenliga utveckling erfordrat uppställandet af en sats hvars logiska begrundning förutsätter en teori för ifrågavarande tal, hvilket t. ex. är fallet med särskilda satser rörande kontinuerliga funktioners egenskaper samt existensen af gränsvärden för talräckor, har denna sats tillsvidare postulerats utan bevis. I slutet af framställningen gifves härefter, i det åttonde kapitlet, en sträng teori för de irrationella talen i anslutning till Dedekind, jämte utförliga bevis för de satser som tidigare anticiperats, och hvilkas vikt och betydelse nu böra klart framstå för läsaren, sedan han i det föregående upprepade gånger varit i tillfälle att använda dessa satser.

Det nionde och sista kapitlet i läroboken innehåller teorin för de komplexa talen och deras geometriska representation, äfvensom särskilda användningar på ekvationsläran. Detta kapitel bildar sålunda, jämte de efterföljande noterna

om lineära ekvationssystem och determinanter, en första inledning till den högre algebran, och utgör tillika en förberedelse till teorin för funktioner af ett komplext argument.

Utgifvandet af denna lärobok har möjliggjorts genom ett understöd ur Universitetets fonder, för hvilket jag härmed får till Universitetets styrelse hembära en vördsam tacksägelse.

Det är mig likaledes en angenäm plikt att till min forne elev, filosofiemagistern F. Iversen uttala ett hjärtligt tack för den samvetsgrannhet och det intresse hvarmed han bistått mig vid korrekturens granskning och rättande.

Helsingfors, den 3 oktober 1912.

Ernst Lindelöf.

Innehåll

FÖRSTA KAPITLET

De elementära funktionerna

ANDRA KAPITLET

Räkning med approximativa värden

TREDJE KAPITLET

Teorin för kedjebråk 149—189

FJÄRDE KAPITLET

Satser om gränsvärden 190—237

FEMTE KAPITLET

Om funktioners derivator 238—311

SJETTE KAPITLET

Begreppen längd, area, volym 312—356

SJUNDE KAPITLET

Integralbegreppet och dess användningar 357—459

ÅTTONDE KAPITLET

Det reella talområdet

Bevis för några tidigare använda hjälpsatser 460—507

NIONDE KAPITLET

Det komplexa talområdet
Några användningar på algebran 507—574



Första kapitlet.

De elementära funktionerna.

1. Funktionsbegreppet. — I de matematiska vetenskaperna har man oupphörligt att betrakta storheter eller kvantiteter hvilka äro beroende af vissa andra kvantiteter, sålunda att de förras värden förändras eller variera samtidigt med de senares värden, men blifva fullt bestämda om dessa fixeras. Vi uttrycka detta förhållande kort i det vi säga att de förra kvantiteterna äro *funktioner* af de senare.

Så är t. ex. kvadratens yta en funktion af dess sida, ty ytans storlek beror af sidans längd och är fullt bestämd om denna är gifven. På samma sätt äro sferens yta och volym funktioner af dess radie; den höjd till hvilken en kropp stiger, då den kastas lodrätt uppåt, är en funktion af dess begynnelsehastighet; o. s. v.

Dessa funktioner bero af endast en *variabel* eller ett *argument*, d. v. s. en kvantitet som kan variera eller antaga olika värden, och som måste fixeras för att funktionens värde skall blifva bestämdt (kvadratens sida, sferens radie, kroppens begynnelsehastighet). Funktionens argument benämnes äfven *den oberoende variabeln*, i motsats hvartill funktionen själf kallas *den beroende variabeln.*

Lika elementära exempel kunna anföras på funktioner hvilka bero af flere variabler eller argument. Ytan af en rektangel är en funktion af dess bas och dess höjd, alltså af två oberoende variabler; volymen af en rätvinklig parallellepiped är en funktion af tre i ett hörn sammanstötande kanter,

alltså af tre argument; den volym en gifven viktmängd gas intager är en funktion af trycket och temperaturen, o. s. v.

De ofvan anförda funktionernas värden representeras af enkla *analytiska uttryck* eller *expressioner*, hvilka äro bildade af de oberoende variablerna samt af konstanta kvantiteter. Om s och r beteckna kvadratens sida och sferens radie (eller, noggrannare uttryckt, dessa sträckors mätetal i förhållande till den antagna längdenheten), är sålunda kvadratens area $=s^2$, sferens yta $=4\pi r^2$, sferens volym $=\frac{4}{3}\pi r^3$; stighöjden för en kropp, som kastas lodrätt uppåt med begynnelsehastigheten v, är, om luftens motstånd negligeras, lika med $\frac{v^2}{2g}$, där g betecknar tyngdkraftens acceleration; ytan af en rektangel med sidorna a och b är $=ab$; volymen af en rätvinklig parallellepiped med kanterna a, b, c är $=abc$; slutligen är, enligt MARIOTTE och GAY-LUSSAC, volymen af en gasmängd vid trycket p och temperaturen t lika med uttrycket $\frac{p_0 v_0}{p}\left(1+\frac{t}{273}\right)$, då med v_0 betecknas den volym samma mängd gas intager vid trycket p_0 och 0 graders temperatur.

Omvändt definierar hvarje analytiskt uttryck, som är bildadt af vissa variabler samt af konstanta kvantiteter, en funktion af dessa variabler, förutsatt att detsamma i allmänhet antager ett ändligt bestämdt värde för ändliga värden af variablerna. Exempelvis representera uttrycken

$$\frac{x-1}{x+1},\ \sqrt[3]{x+1},\ \sin\frac{1}{x},\ a^{x^2},\ \log\sin x, \cdots$$

funktioner af variabeln x, uttrycken

$$x^2+y^2,\ \frac{x}{y},\ \sin(x+y),\ x^y, \cdots$$

funktioner af variablerna x och y, o. s. v.

För äldre tiders matematiker, och ännu för EULER, var begreppet *funktion* synonymt med begreppet *analytiskt uttryck*. I den högre Analysen är det emellertid af största vikt att från början gifva funktionsbegreppet ett tillräckligt vidsträckt innehåll. Det väsentliga i detta begrepp är *mot-*

svarigheten mellan funktionens värden och variabelns värden, hvilken precisare kan formuleras som följer:

Till hvarje värde af variabeln — eller, om variablerna äro flere, till hvarje system värden af variablerna — är, enligt någon viss lag, tillordnadt ett bestämdt funktionsvärde.

Lagen för denna motsvarighet eller tillordning kan definieras på en mångfald olika sätt [1]). Man kan exempelvis definiera en funktion genom att föreskrifva att densamma inom en viss *intervall*, d. v. s. för de värden af variabeln hvilka ligga mellan vissa föreskrifna gränser, skall till sitt värde öfverensstämma med ett gifvet analytiskt uttryck, inom en annan intervall med ett annat gifvet uttryck, o. s. v. Enligt denna princip definieras t. ex. den för talteorin viktiga funktionen $[x]$, hvilken för hvarje gifvet värde x är lika med det största hela tal som är $\leq x$. För $0 \leq x < 1$ har denna funktion således värdet 0, för $1 \leq x < 2$ värdet 1, för $2 \leq x < 3$ värdet 2, o. s. v.

Ett annat, mer kompliceradt sätt att definiera en funktion vore att föreskrifva att densamma för rationella värden af variabeln skall öfverensstämma med ett visst analytiskt uttryck, för irrationella värden af variabeln med ett annat uttryck. Funktionen är härigenom fullständigt definierad, ty mot hvarje gifvet värde af variabeln svarar ett bestämdt funktionsvärde.

Det kan inträffa att en funktion icke är definierad för alla värden af variabeln utan endast inom en viss intervall. Så länge man rör sig inom det reella talområdet, är t. ex. funktionen $\sqrt{x}$ definierad endast för $x \geq 0$, funktionen $\log x$ för $x > 0$, funktionen $\sqrt{x(1-x)}$ för $0 \leq x \leq 1$.

Man kan vidare tänka sig en funktion definierad endast för de argumentvärden som tillhöra en viss föreskrifven talmängd, t. ex. endast för rationella värden eller endast för heltaliga värden af argumentet. Ett exempel härpå ger oss exponentialfunktionen, a^x, hvilken ursprungligen definieras endast för positiva heltaliga värden x, hvarefter dess defini-

[1]) Det bör framhållas att de trigonometriska funktionerna ursprungligen definieras rent geometriskt, såsom förhållanden mellan vissa sträckor, och att man först senare för dessa funktioner erhåller analytiska uttryck, i form af oändliga serier eller produkter, eller kvoter af dylika uttryck.

tion successivt utsträckes till negativa heltaliga värden x samt värdet $x = 0$, till brutna värden x, till irrationella värden x, och slutligen till komplexa värden x.

De ofvan anförda funktionerna $\sqrt{x}$ och $\sqrt{x(1-x)}$ gifva oss ännu anledning till en allmän anmärkning. Vi hafva i det föregående antagit att mot hvarje värde af variabeln (för hvilket funktionen öfverhufvud är definierad) svarar ett fullt bestämdt funktionsvärde. En dylik funktion säges vara *entydigt definierad* eller, kortare, *entydig*. Det gifves emellertid analytiska uttryck hvilka för ett gifvet argumentvärde kunna antaga olika värden, och hvilka sålunda definiera *flertydiga* eller *mångtydiga* funktioner. Sålunda har $\sqrt{x}$, hvarmed ju menas det tal hvars kvadrat är x, tvenne olika värden, hvilka äro motsatta tal, och definierar följaktligen en *tvåtydig* funktion. De positiva värdena af $\sqrt{x}$ definiera för sig en *entydig gren* af denna tvåtydiga funktion, de negativa värdena definiera en annan entydig gren af samma funktion. En mångtydig funktion kan i allmänhet uppfattas såsom en sammanfattning af vissa entydiga funktionsgrenar. Vi återkomma i det följande utförligare till dessa frågor.

2. **Klassifikation af de genom analytiska uttryck definierade funktionerna.** — Dessa funktioner indelas i vissa stora klasser, efter arten af de räkneoperationer som erfordras för bildandet af deras analytiska uttryck. Vi sysselsätta oss här främst med funktioner af en variabel.

1°. Den första och enklaste klassen omfattar *de rationella funktionerna*, hvilka bildas af den oberoende variabeln samt af konstanta kvantiteter medels de fyra enkla räknesätten: addition, subtraktion, multiplikation och division. Dessa räknesätt, hvilka med ett gemensamt namn kallas *de rationella operationerna*, få härvid komma till användning blott ett ändligt antal gånger.

Enligt de kända reglerna för operationer med bråk, kan hvarje rationell funktion bringas under formen af en kvot af tvenne polynom, alltså under formen

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m},$$

där m och n äro positiva hela tal eller noll, samt $a_0, \cdots, a_n$, $b_0, \cdots, b_m$ konstanta kvantiteter eller, kortare, *konstanter*. Dessa sistnämnda behöfva icke hafva numeriska värden, utan kunna utgöras af bokstafskvantiteter eller *parametrar*, hvilka betraktas såsom konstanta, ehuru deras värden icke närmare preciseras, i motsats hvartill x betraktas såsom variabel.

En underafdelning af de rationella funktionerna bilda *polynomen* eller *de hela rationella funktionerna*. Ett polynom, i hvilket koefficienterna för samtliga potenser af x försvinna, reducerar sig till en konstant.

2⁰. De analytiska uttryck, vid hvilkas bildande förutom rationella operationer jämväl rotutdragning kommit till användning, definiera s. k. *algebraiska funktioner*. Om $R(x)$ är en godtycklig rationell funktion och n ett positivt helt tal > 1, definierar sålunda uttrycket $\sqrt[n]{R(x)}$ en algebraisk funktion, och detsamma gäller om hvarje uttryck som är bildadt af x, $\sqrt[n]{R(x)}$ samt konstanta kvantiteter medels rationella operationer. Man kan visa att hvarje sådant uttryck är rot till en algebraisk ekvation. Exempelvis satisfierar uttrycket $y = \sqrt[n]{R(x)}$ den algebraiska ekvationen $y^n = R(x)$.

Allmänt förstås med en algebraisk funktion y af x *hvarje funktion som är definierad genom en algebraisk likhet mellan x och y, d. v. s. en likhet som kan bringas under formen*

$$P(x, y) = 0,$$

där P är ett polynom med afseende å x och y. Denna definition är faktiskt vidsträcktare än den ofvan angifna, ty, om polynomet P är af högre grad än den fjärde med afseende å y, är det, såsom Abel först bevisat, i allmänhet omöjligt att uttrycka y såsom funktion af x endast med hjälp af rationella operationer och rotutdragning.

I algebran visas, såsom vi i sista kapitlet af denna bok skola se, att en algebraisk ekvation har lika många rötter som dess gradtal utvisar, hvarvid förutsättes att talsystemet utvidgats genom införande af de komplexa talen. Om $P(x, y)$ är af andra eller af högre grad med afseende å y, svara således mot ett gifvet värde x i allmänhet två eller flere olika värden y, och y är följaktligen en flertydig funktion af x.

Är däremot $P(x, y)$ af första graden med afseende å y, erhålles vid upplösning af ekvationen $P(x, y) = 0$ variabeln y under formen af en rationell funktion af x. Enligt ofvanstående allmänna definition utgöra således de rationella funktionerna en underafdelning af de algebraiska funktionerna.

3⁰. De funktioner som äro hvarken rationella eller algebraiska, hvilkas uttryck således icke äro bildade genom ett ändligt antal rationella operationer och icke heller satisfiera någon algebraisk likhet, benämnas med ett gemensamt namn *transcendenta funktioner*. Hit höra, af de i elementarmatematiken betraktade funktionerna, *exponentialfunktionen*, a^x, samt dess omvända eller inversa funktion, *logaritmen*; vidare de *trigonometriska funktionerna*, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\cdots$, samt deras inversa funktioner, de s. k. *cyclometriska funktionerna* eller *cirkelfunktionerna*, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, $\cdots$.

Genom *sammansättning* af dessa elementära transcendenta funktioner med hvarandra eller med rationella och algebraiska funktioner kunna vi bilda en mängd andra transcendenta funktioner, t. ex.

$$a^{\sqrt{x}}, \log\frac{x-1}{x+1}, \sin(ax+b), \operatorname{arc\,tang}\sqrt{1-x^2}, x^x, \cdots.$$

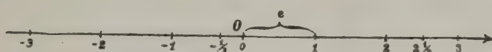
I den högre Analysen införas flere nya slag af transcendenta funktioner med intressanta egenskaper. Dessa funktioner definieras medels oändliga serier eller produkter, bestämda integraler, differentialekvationer, o. s. v.

Det ofvan sagda gäller i hufvudsak äfven för funktioner af flere variabler. Dock bör anmärkas att dessa funktioner kunna vara af olika karaktär med afseende å olika variabler. Exempelvis är funktionen $x\sqrt{1-y^2}$ rationell med afseende å x men algebraisk med afseende å y; funktionen $\frac{a^x}{y}$ är transcendent med afseende å x, rationell med afseende å y; o. s. v.

3. **Grafisk framställning af funktioner**. — För att åskådliggöra huru en funktions värde förändras med variabelns

eller variablernas värden, eller, såsom man kortare uttrycker sig, för att åskådliggöra funktionens *förlopp*, använder man det i den analytiska geometrin brukliga *grafiska framställningssättet*, för hvilket vi här i korthet skola redogöra.

Vi betrakta först funktioner af en oberoende variabel, x, och hafva främst att grafiskt representera dennas värden. För detta ändamål välja vi en obegränsad rät linie till x-*axel*, fastställa på denna en bestämd riktning, hvilken vi benämna liniens *positiva* riktning (i nedanstående figur är det riktningen åt höger), samt välja en punkt O på linien till utgångspunkt eller *origo*.



Vi välja vidare en godtycklig sträcka e till *längdenhet*. Vid uppmätning med e erhåller hvarje sträcka ett fullt bestämdt talvärde eller *mätetal*, och omvändt svarar mot hvarje gifvet positivt tal en sträcka, hvars mätetal i förhållande till e är lika med detta tal. Att så verkligen är fallet, följer ur vissa satser i talläran och vissa geometriska axiom, för hvilka vi i åttonde kapitlet närmare redogöra.

Vi erhålla nu på följande sätt en *entydig motsvarighet* mellan den oberoende variabelns värden, alltså samtliga reella tal, å ena sidan, och punkterna på x-axeln å den andra. Är x_0 ett gifvet reellt tal, afsätta vi på x-axeln, utgående från origo, en sträcka hvars mätetal i förhållande till den antagna längdenheten e är lika med det numeriska värdet af talet x_0 [1]); sträckan afsättes i positiv riktning från origo om talet x_0 är positivt, i den motsatta eller negativa riktningen om x_0 är negativt. Vi låta denna sträckas andra ändpunkt och talet x_0 motsvara hvarandra, och benämna ifrågavarande punkt därför kort *punkten* x_0.

Exempelvis erhålles den punkt som svarar mot talet $2\,^1/_2$

---

[1]) För detta användes allmänt beteckningen $|x_0|$. Är talet x_0 positivt har man således $|x_0| = x_0$, om x_0 är negativt är $|x_0| = -x_0$. Det numeriska värdet af ett tal benämnes äfven talets *absoluta belopp*.

sålunda att en sträcka af längden $2\,^1/_2\,e$ afsättes från origo åt höger, och den mot $-\frac{1}{3}$ svarande punkten då man från origo åt venster afsätter en sträcka af längden $\frac{e}{3}$ (om nämligen den positiva riktningen af x-axeln fastställes såsom i ofvanstående figur).

Det ofvan skildrade förfaringssättet ger oss tydligen en sådan motsvarighet mellan de reella talen och punkterna på x-axeln, att mot hvarje gifvet tal svarar en och en enda punkt, och att omvändt mot hvarje gifven punkt svarar ett fullt bestämdt tal; annorlunda uttryckt, de reella talen och punkterna på den räta linien höra parvis tillsamman. Mot de positiva talen svara punkterna till höger om origo, mot de negativa talen punkterna till venster om origo; origo självt motsvaras af talet 0. Om $x_1 > x_2$ ligger punkten x_1 till höger om punkten x_2.

I detta sammanhang vilja vi ännu i korthet omnämna ett annat sätt att geometriskt representera de reella talen, nämligen medels *vektorer*. Detta betraktelsesätt, som speciellt är egnadt att åskådliggöra räkneoperationerna, erhåller en viktig och intressant generalisering i teorin för komplexa tal, såsom vi längre fram skola visa.

Med en *vektor* menas allmänt en rätlinig sträcka, betraktad såväl med afseende å dess *längd* som med afseende å dess *riktning*, hvilken sistnämnda räknas från vektorns *begynnelsepunkt* till dess *slutpunkt* (grafiskt angifves riktningen medels en pilspets). Tvenne vektorer betraktas såsom *lika*, om de utgöra delar af samma eller parallella linier, äro riktade åt samma håll, och hafva samma längd. En vektor kan således, utan att förändras, förskjutas parallellt med sig själf.

I förevarande fall hafva vi blott att betrakta vektorer som falla utmed x-axeln. Riktningen af en sådan vektor kan kort betecknas såsom *positiv* eller *negativ*, allt efter som den sammanfaller med x-axelns positiva eller negativa riktning.

Mot hvarje gifvet reellt tal, x_0, låta vi nu svara en längs x-axeln riktad vektor, V_{x_0}, hvars längd är lika med talets numeriska värde, $|x_0|$, och hvars riktning är positiv eller negativ beroende på om talet självt är positivt eller negativt. Om denna vektor förskjutes längs x-axeln så att dess begyn-

nelsepunkt sammanfaller med origo, faller dess slutpunkt i punkten x_0, d. v. s. i den punkt som vi tidigare tillordnat talet x_0. Mot tvenne motsatta tal, x_0 och $-x_0$, svara vektorer med samma längd men motsatta riktningar.

För att erhålla den vektor som representerar summan af två reella tal, x_1 och x_2, har man att *geometriskt addera* motsvarande vektorer, V_{x_1} och V_{x_2}, hvilket tillgår sålunda att den ena af dem, t. ex. V_{x_2}, förskjutes längs x-axeln tills dess begynnelsepunkt sammanfaller med slutpunkten af V_{x_1}. Den vektor, som till begynnelsepunkt har sistnämnda vektors begynnelsepunkt och till slutpunkt slutpunkten af vektorn V_{x_2} i dess nya läge, representerar summan $x_1 + x_2$.

Den vektor som representerar skillnaden $x_1 - x_2$ erhålles genom addition af vektorn V_{x_1} och en vektor som har samma längd som V_{x_2} men motsatt riktning. Den är lika med vektorn från punkten x_2 till punkten x_1; dess längd, d. v. s. det numeriska värdet af skillnaden $x_1 - x_2$, representeras sålunda geometriskt af afståndet mellan punkterna x_1 och x_2.

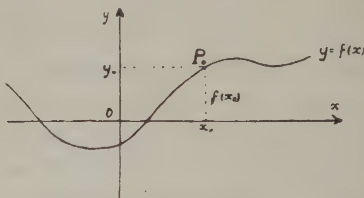
Läsaren uppmanas att geometriskt utföra dessa konstruktioner i de olika fall som kunna förekomma beträffande tecknen för x_1 och x_2.

Vi öfvergå till uppgiften att grafiskt representera en funktion $f(x)$ af variabeln x.

För detta ändamål välja vi i ett gifvet plan en rät linie till x-axel och afbilda på denna värdena af variabeln x medels punkter, på sätt ofvan angifvits. Vidare draga vi i samma plan, genom den punkt som valts till origo, en rät linie vinkelrätt mot x-axeln, och välja på denna linie en viss riktning, hvilken vi åter beteckna såsom *positiv*, hvarvid då den motsatta riktningen benämnes *negativ*. För ifrågavarande linie införa vi benämningen *y-axel*.

Vi åskådliggöra nu det värde $f(x_0)$ den gifna funktionen antar för argumentvärdet x_0 genom att från motsvarande punkt på x-axeln, vinkelrätt mot denna eller således parallellt med y-axeln, afsätta en sträcka hvars mätetal i förhållande till den antagna längdenheten är lika med numeriska värdet af $f(x_0)$, alltså $= |f(x_0)|$; vi afsätta denna sträcka i y-axelns positiva riktning om värdet $f(x_0)$ är positivt, i den motsatta

riktningen om $f(x_0)$ är negativt. Då denna konstruktion utföres för hvarje argumentvärde x, bilda ändpunkterna af de mot x-axeln uppresta perpendiklarna en *kurva*, som åskådliggör den gifna funktionens förlopp.



Vi kunna uttrycka det ofvan sagda kortare med användande af den i den analytiska geometrin brukliga terminologin. På samma sätt som vi tidigare uppställde en motsvarighet mellan värdena af variabeln x och punkterna på x-axeln, tillordna vi till punkterna på y-axeln värdena af en ny reell variabel, y, och använda härvid samma origo O och samma längdenhet e som i förra fallet. Är nu P_0 en gifven punkt i planet och fälla vi från densamma perpendiklar mot x- och y-axlarna, svara mot dessa perpendiklars fotpunkter tvenne fullt bestämda värden, x_0 och y_0, af variablerna x och y (jämf. ofvanstående figur); värdet x_0 benämnes *x-koordinat* eller *abskissa*, värdet y_0 *y-koordinat* eller *ordinata* för den gifna punkten P_0 [1]).

Vi hafva härmed uppställt en entydig motsvarighet mellan samtliga punkter i planet å ena sidan och de reella värdeparen (x, y) å den andra; hvarje punkt i planet har nämligen till koordinater tvenne fullt bestämda reella tal, x, y, och omvändt svarar mot hvarje gifvet par reella tal, x, y, en och en enda punkt i planet hvars koordinater äro lika med dessa tal.

Läsaren uppmanas att själf öfva sig att bestämma koordinaterna för en gifven punkt i planet samt att omvändt

---

[1]) Geometriskt kan denna punkts abskissa definieras såsom vektorn från origo till punkten x_0 på x-axeln, dess ordinata såsom vektorn från origo till punkten y_0 på y-axeln.

konstruera en punkt hvars koordinater äro gifna. Vi vilja här blott anmärka att hvarje punkt på x-axeln har ordinatan 0, hvarje punkt på y-axeln abskissan 0, samt att koordinaterna för origo äro $x=0$, $y=0$. Vidare må påpekas att punkterna x, y och $-x, -y$ ligga symmetriskt med afseende å origo, d. v. s. deras sammanbindningssträcka går genom origo och har denna punkt till midtpunkt.

Gå vi nu tillbaka till den kurva medels hvilken vi åskådliggjorde förloppet af funktionen $f(x)$, se vi att koordinaterna x, y för en godtycklig punkt af densamma äro bundna genom relationen

$$(1) \qquad y=f(x),$$

och att omvändt hvarje punkt, hvars koordinater satisfiera denna relation, tillhör nämnda kurva. Vi uttrycka detta förhållande kort i det vi säga att *(1) utgör den betraktade kurvans ekvation.*

Hvarje reell funktion representeras sålunda geometriskt af en viss kurva. Är funktionen entydig, skäres dess kurva af hvarje parallell till y-axeln i en enda punkt; är funktionen flertydig, representeras hvarje entydig gren af densamma af en kurva med nämnda egenskap.

Det bör emellertid observeras att ekvationen (1) representerar en sammanhängande kurva blott om $f(x)$ är en s. k. *kontinuerlig* funktion, hvilket begrepp vi senare exakt definiera.

I allmänhet representerar hvarje ekvation mellan x och y

$$F(x, y)=0,$$

om den öfverhufvud har reella lösningar, en kurva, nämligen den som bildas af samtliga punkter i planet hvilkas koordinater x, y satisfiera ekvationen. Denna kurva kan för öfrigt bestå af flere från hvarandra skilda kurvgrenar och dessutom måhända af enstaka punkter.

Uppgiften att studera kurvors egenskaper med stöd af deras ekvationer tillkommer den analytiska geometrin. Vi åtnöja oss här med att härleda några enkla resultat för att förtydliga det ofvan sagda.

Vi skola först visa att *hvarje lineär ekvation, d. v. s. ekvation af första graden mellan* x *och* y

$$(2) \qquad Ax + By + C = 0$$

representerar en rät linie, förutsatt att åtminstone den ena af variablerna verkligen ingår i ekvationen, d. v. s. att koefficienterna A och B icke båda äro noll.

Om $B = 0$ och således A är skild från 0, hvilket vi angifva genom beteckningen $A \gtrless 0$, kan ekvationen (2) skrifvas under formen $x = -\frac{C}{A}$. Den satisfieras således af koordinaterna för hvarje punkt i planet hvars abskissa är $= -\frac{C}{A}$, ordinatan må hafva hvilket värde som helst, och representerar följaktligen den räta linie som är parallell med y-axeln och skär x-axeln i punkten $x = -\frac{C}{A}$.

Om $B \gtrless 0$, kan ekvationen (2) upplösas med afseende å y och antar då formen

$$(2)' \qquad y = mx + b,$$

där $m = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Vi betrakta först det speciella fall då $C = 0$ och således $b = 0$. Ekvationen reducerar sig då till

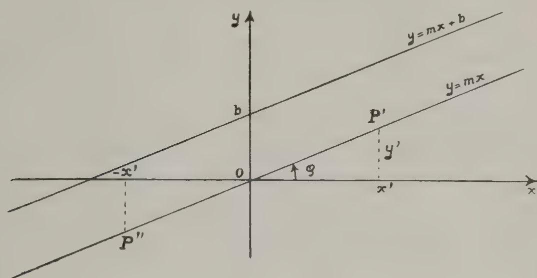
$$(3) \qquad y = mx \text{ eller } \frac{y}{x} = m.$$

Vi gifva först åt x ett godtyckligt positivt värde x' och erhålla då ur (3) för y värdet $y' = mx'$, hvilket har samma tecken som m. Vi utmärka i planet den punkt P' hvars koordinater hafva värdena x', y', draga från origo en stråle genom P', och beteckna med φ den spetsiga vinkel denna stråle bildar med x-axelns positiva riktning. Vi hafva då

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y'}{x'},$$

förutsatt att vinkeln φ räknas positiv eller negativ allt efter som den vridning af den positiva x-axeln, genom hvilken vinkeln kan tänkas alstrad, går i riktning mot den positiva

y-axeln eller i den motsatta riktningen. Den förra vridningsriktningen betecknas kort såsom *positiv*, den senare såsom *negativ*. I grafisk framställning väljas axlarnas positiva riktningar vanligen så att en positiv vridning för åskådaren ter sig såsom en vridning *motsols*.



Nu är $\frac{y'}{x'} = m$, och vi erhålla således

$$\text{tang}\, \varphi = m. \tag{4}$$

Denna likhet utsäger att vinkeln φ har samma värde för alla de punkter hvilkas koordinater satisfiera ekvationen (3) och hvilkas abskissor hafva positiva värden; med andra ord, alla dessa punkter ligga på samma från origo utgående stråle. Omvändt, om P är en godtycklig punkt på nämnda stråle, satisfiera dess koordinater x, y ekvationen (3), ty man har $\frac{y}{x} = \text{tang}\, \varphi = m$ och således $y = mx$.

Gifva vi åt x det negativa värdet $x = -x'$, erhålles ur (3) för y värdet $y = -mx' = -y'$. Den punkt P'', hvars koordinater äro $-x', -y'$, ligger, såsom tidigare påpekats, symmetriskt till punkten P' med afseende å origo, alltså på förlängningen af strålen OP' utöfver punkten O. För negativa värden x ger oss ekvationen (3) således punkter som ligga på strålen OP'', och omvändt satisfiera koordinaterna för hvarje punkt af denna stråle ekvationen (3).

Sätta vi slutligen $x = 0$, är enligt (3) äfven $y = 0$ och vi erhålla såsom motsvarande punkt origo.

Vi hafva således erhållit följande resultat: *Ekvationen (3) representerar geometriskt en genom origo gående rät linie; den riktning af denna linie, i hvilken x växer, bildar med x-axelns positiva riktning den vinkel φ mellan gränserna $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som är bestämd genom likheten (4).* Vinkeln φ benämnes liniens *riktningsvinkel* och konstanten $m = tang\, \varphi$ dess *vinkelkoefficient.*

Gå vi nu till ekvationen (2)', finna vi omedelbart, vid jämförelse med (3), att de punkter densamma representerar erhållas då ordinatan för hvarje punkt af räta linien $y = mx$ ökas med det konstanta värdet b. Denna linie blir härvid förskjuten parallellt med sig själf i y-axelns riktning, så att den punkt som sammanföll med origo förflyttas till punkten $y = b$ på y-axeln. *Ekvationen (2)' representerar således en rät linie med vinkelkoefficienten m som skär y-axeln i punkten $y = b$.*

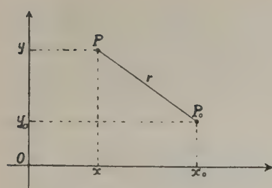
Härmed är bevisadt att ekvationen (2) alltid representerar en rät linie, förutsatt att koefficienterna A och B icke samtidigt försvinna. För att konstruera denna linie är det tillräckligt att bestämma två punkter af densamma. Enklast är att välja de punkter i hvilka linien råkar koordinataxlarna. Man finner omedelbart att dess skärningspunkt med x-axeln har abskissan $x = -\frac{C}{A}$, dess skärningspunkt med y-axeln ordinatan $y = -\frac{C}{B}$.

Det ofvan sagda ger oss ett medel att grafiskt lösa ett system af två lineära ekvationer med två obekanta

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0. \end{cases}$$

Om vi nämligen upprita de räta linier dessa ekvationer hvar för sig representera och bestämma koordinaterna x_0, y_0 för dessa liniers skärningspunkt, satisfierar värdeparet $x = x_0$, $y = y_0$ hvardera liniens ekvation och ger oss således lösningen till det gifna ekvationssystemet.

Vi anföra ännu ett annat enkelt resultat ur den analytiska geometrin. Vi betrakta i planet tvenne punkter, P och P_0, hvilkas koordinater må vara x, y resp. x_0, y_0. Projektio-



nen af sträckan PP_0 på x-axeln har längden $|x-x_0|$, projektionen af samma sträcka på y-axeln har längden $|y-y_0|$. Beteckna vi sträckans egen längd med r, sluta vi häraf enligt PYTHAGORAS' sats till den viktiga likheten

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2, \tag{5}$$

hvilken omedelbart ger oss afståndet mellan två punkter då dessas koordinater äro kända.

Om x_0, y_0 och r äro gifna men x och y få variera, finnes det en oändlig mängd värdepar x, y som satisfiera ekvationen (5). Hvarje sådant värdepar representerar koordinaterna för en punkt, hvars afstånd från punkten P_0 är $=r$, och som således ligger på periferin af den cirkel som har P_0 till medelpunkt och radien r. Omvändt satisfiera koordinaterna för hvarje punkt på denna cirkels periferi ekvationen (5). *Ekvationen (5) representerar således geometriskt den cirkellinie hvars medelpunkt har koordinaterna x_0, y_0 och hvars radie har längden r.*

Vi betrakta ännu den allmännare ekvationen

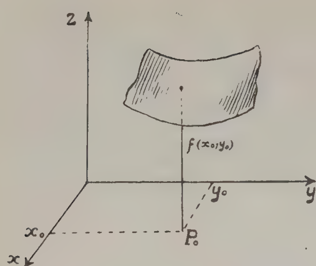
$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0.$$

Denna ekvation kan skrifvas under formen

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2},$$

hvarur framgår att densamma, om $B^2+C^2-4AD>0$, representerar en cirkel, hvars medelpunkt har koordinaterna $x_0=-\frac{B}{2A}$, $y_0=-\frac{C}{2A}$, och hvars radie är $=\sqrt{\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}}$.

För fullständighetens skull vilja vi ännu i korthet angifva huru en funktion $f(x, y)$ af tvenne oberoende variabler x, y kan representeras geometriskt. För detta ändamål välja vi ett plan och i detta ett rätvinkligt koordinatsystem,



samt låta x, y betyda koordinaterna för en punkt i planet i förhållande till detta system, hvarvid erhålles en entydig motsvarighet mellan planets punkter och värdeparen x, y. Vidare draga vi genom origo vinkelrätt mot planet en rät linie, hvilken vi benämna *z-axeln*, och fastställa på denna linie en positiv riktning.

Vi åskådliggöra nu det värde, $f(x_0, y_0)$, funktionen $f(x, y)$ antar för ett gifvet värdesystem x_0, y_0 af variablerna, genom att från motsvarande punkt P_0 i xy-planet, vinkelrätt mot detta plan, afsätta en sträcka af längden $|f(x_0, y_0)|$, i den positiva z-axelns riktning om $f(x_0, y_0) > 0$, i den motsatta riktningen om $f(x_0, y_0) < 0$. Då denna konstruktion utföres för hvarje värdepar x, y för hvilket funktionen $f(x, y)$ öfverhufvud är definierad, bilda de afsatta sträckornas ändpunkter en *yta*, hvilken geometriskt åskådliggör huru funktionens värde förändras då argumenten x, y variera.

Vi göra slutligen en anmärkning af praktisk natur beträffande representationen af en funktion $f(x)$ medels en kurva. I det föregående hafva vi ständigt förutsatt att samma längdenhet användes för bestämningen af de två koordinaterna. Detta är emellertid icke nödvändigt och icke alltid praktiskt. Om exempelvis funktionens värden genomgående äro små, erhålles en tydligare bild af dess förlopp om man för ordinatan väljer en större längdenhet än för abskissan. Ett motsatt förfaringssätt är att rekommendera om funktionen varierar mycket snabbt eller antar genomgående stora värden.

Öfningsuppgifter:

1) Koordinaterna för en punkt P i planet äro $x = a$, $y = b$; angif koordinaterna för den punkt som är symmetrisk till P med afseende å a) x-axeln b) y-axeln c) linien $y = x$.

2) Lös grafiskt följande ekvationssystem och undersök noggrannheten af den erhållna lösningen:

$$\begin{cases} 3,1\,x + 2,5\,y = 3,7\,, \\ 2,4\,x - 3,2\,y = 4,5\,. \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5\,x + y = 14\,, \\ 9\,x - 10\,y = 12\,. \end{cases}$$

3) Upprita noggrant på millimeterpapper de kurvor som representera följande funktioner (dessa kurvor komma senare till användning vid grafisk lösning af ekvationer):

$$x^2, x^3, x^4, x^4+x^2, x^4-x^2.$$

4) Upprita kurvorna för följande funktioner:

a) $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x(x-1)}$, $\frac{x^2+3}{x+1}$.

b) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

c) a^x, $\log_a x$, för $a=\frac{3}{2}$.

d) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{x(1-x)}$, $\sqrt{x(1-x)(2-x)}$.

e) $a^{-x}\sin x$ (en s. k. *dämpad sinus-svängning*), för $a=\frac{3}{2}$.

f) $\frac{\sin x}{x}$, $\sin(x^2)$, $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$.

5) Undersök formen af de ytor som representera funktionerna

$$x+2y,\ (x+y)^2,\ x^2+y^2,\ xy.$$

4. **Grafisk lösning af ekvationer.** — Vi tänka oss uppritad den kurva som representerar en gifven funktion $f(x)$. De värden x för hvilka $f(x)$ antar värdet 0, eller, annorlunda uttryckt, rötterna till ekvationen $f(x)=0$, utgöra då abskissor för de punkter i hvilka ifrågavarande kurva råkar x-axeln. Är C en godtycklig konstant, utgöra på samma sätt rötterna till ekvationen $f(x)=C$ abskissor för de punkter af kurvan hvilkas ordinator hafva värdet C, d. v. s. för kurvans skärningspunkter med räta linien $y=C$.

Härpå grundar sig en metod att approximativt beräkna rötterna till en ekvation med en obekant. Vi föra ekvationens samtliga termer i samma membrum, hvarvid den antar formen $f(x)=0$, upprita så noggrant som möjligt kurvan $y=f(x)$, bestämma dess skärningspunkter med x-axeln, samt uppmäta dessa skärningspunkters abskissor. Vi erhålla sålunda närmevärden för den gifna ekvationens rötter, hvilka äro desto noggrannare, ju noggrannare kurvan uppritats.

I flere fall är det emellertid fördelaktigt att modifiera förfarandet på följande sätt. Vi skrifva den gifna ekvationen under formen

$$f_1(x) = f_2(x),$$

i det vi på lämpligt sätt fördela ekvationens termer på dess båda membra; härefter upprita vi kurvorna

$$y = f_1(x) \text{ och } y = f_2(x)$$

samt bestämma deras skärningspunkter. Dessa punkters abskissor gifva oss de sökta rötterna. Ty om vi med x', y' beteckna koordinaterna för en skärningspunkt, har man samtidigt $y' = f_1(x'), y' = f_2(x')$, och således $f_1(x') = f_2(x')$, hvilket visar att x' utgör en rot till den gifna ekvationen. Och det är klart att vi på detta sätt erhålla alla dess reella rötter.

Vi skola något närmare betrakta tillämpningen af ofvan anförda metoder på algebraiska ekvationer af andra, tredje och fjärde graden.

1⁰. En ekvation af andra graden kan bringas under formen

$$x^2 + px + q = 0. \tag{6}$$

För att grafiskt bestämma dess rötter, upprita vi kurvan

$$y = x^2 + px + q \tag{7}$$

och söka dess skärningspunkter med x-axeln. Man har identiskt

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Termen $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ är noll för värdet $x = -\frac{p}{2}$, växer beständigt och obegränsadt då x, utgående från nämnda värde, antingen tilltager eller aftager, och antar samma värde i två punkter, $x = -\frac{p}{2} \pm x'$, som ligga symmetriskt till $x = -\frac{p}{2}$. Vi sluta här-

af att kurvan (7) för $x = -\frac{p}{2}$ uppnår sin lägsta punkt, hvars koordinater äro

(8) $$x = -\frac{p}{2},\ y = q - \frac{p^2}{4},$$

att den är symmetrisk med afseende å räta linien $x = -\frac{p}{2}$, samt att dess ordinata ständigt och obegränsadt växer, då x växer från $-\frac{p}{2}$ till $+\infty$ eller aftar från $-\frac{p}{2}$ till $-\infty$.

Förevarande kurva är, såsom i den analytiska geometrin visas, en *parabel*, som har punkten (8) till topp eller vertex och räta linien $x = -\frac{p}{2}$ till axel.

Parabelns läge i förhållande till x-axeln beror af tecknet för kvantiteten $q - \frac{p^2}{4}$. Är denna positiv, således $\frac{p^2}{4} < q$, ligger parabeln helt och hållet ofvanom x-axeln; ekvationen (6) har alltså i detta fall ingen reell rot. Är $q - \frac{p^2}{4} < 0$ eller $\frac{p^2}{4} > q$, ligger parabelns vertex (8) under x-axeln, hvaraf vi sluta att parabeln skär x-axeln i tvenne punkter, hvilka ligga symmetriskt med afseende å punkten $x = -\frac{p}{2}$; ekvationen (6) har således två reella rötter. Är slutligen $q - \frac{p^2}{4} = 0$ eller $\frac{p^2}{4} = q$, faller vertex (8) på x-axeln, som sålunda utgör en tangent till parabeln; rötterna till (6) sammanfalla och hafva båda värdet $-\frac{p}{2}$.

Den grafiska lösningen af ekvationen (6) ställer sig emellertid väsentligen enklare om vi skrifva ekvationen under formen

(6)′ $$x^2 = -px - q$$

samt upprita kurvorna $y = x^2$ och $y = -px - q$, af hvilka den förra är en fast parabel med origo såsom vertex och den positiva y-axeln såsom axel, den senare en rät linie, hvars läge beror af ekvationens koefficienter p och q. Abskissorna för dessa liniers skärningspunkter gifva oss ekvationens reella rötter.

Samtliga ekvationer af andra graden kunna således lösas medels linjal, om vi taga till hjälp den fasta parabeln $y = x^2$.

Öfningsuppgifter: Tillämpa ofvanstående metoder på ekvationerna

$x^2 - 3 = 0$, $x^2 + 4x - 1 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x^2 + 6x + 9 = 0$, $x^2 - x + 2 = 0$.

2⁰. Vi gå till den kubiska ekvationen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{9}$$

Vi kunna befria ekvationen från den term som innehåller den obekantas kvadrat, genom att sätta

$$x = x' - \frac{a}{3}, \tag{10}$$

där x' är en ny obekant. Vid uträkning af x^2 och x^3 finner man att venstra membrum af (9) antar formen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x'^3 + px' + q,$$

där koefficienterna p och q hafva värdena

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c.$$

Om man löser ekvationen

$$x'^3 + px' + q = 0 \tag{9)'$$

och från dennas rötter subtraherar $\frac{a}{3}$, erhåller man således, enligt (10), den gifna ekvationens rötter.

För att grafiskt lösa ekvationen (9)′ skrifva vi den under formen

$$x'^3 = -px' - q,$$

upprita kurvorna $y = x^3$ och $y = -px - q$, af hvilka den förra representerar en s. k. *kubisk parabel* och den senare en rät

linie, samt bestämma abskissorna för dessa liniers skärningspunkter.

Hvarje ekvation af tredje graden kan således grafiskt lösas medels linjal, om man tager till hjälp den fasta kurvan $y = x^3$.

Öfningsuppgifter: Bestäm de reella rötterna till ekvationerna

$$x^3 = 2,\ x^3 - 3x + 2 = 0,\ x^3 + 3x^2 - 1 = 0,\ x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

3°. Med användande af den kubiska parabeln kan man lösa flere geometriska problem hvilka icke äro lösbara medels passare och linjal.

Vi betrakta först problemet *att mellan tvenne gifna sträckor a och b inskjuta tvenne andra sträckor, α och β, så att a, α, β, b äro i kontinuerlig proportion*, d. v. s. att

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{b}.$$

Ur dessa villkor följer, om vi sätta $\frac{a}{\alpha} = x'$,

$$x'^3 = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{b} = \frac{a}{b},$$

hvaraf framgår att x' utgör abskissa för den punkt i hvilken den kubiska parabeln $y = x^3$ skäres af räta linien $y = \frac{a}{b}$. Konstruktionen blir således följande:

Vi afsätta på den positiva y-axeln, utgående från origo, en sträcka som har mätetalet $\frac{a}{b}$ i förhållande till den vid konstruktionen af kurvan $y = x^3$ använda längdenheten e; denna sträcka erhålles såsom fjärde proportional till b, a och e. Genom sträckans ändpunkt draga vi en parallell till x-axeln och bestämma dess skärningspunkt med kurvan $y = x^3$. Om vi med $\overline{x}$ beteckna stycket af denna parallell mellan y-axeln och nämnda skärningspunkt, utgör förhållandet $\frac{\overline{x}}{e}$ skärningspunktens abskissa, och enligt det ofvan sagda är således $\frac{\overline{x}}{e} = x' = \frac{a}{\alpha}$. Sträckan α utgör således fjärde proportional till

sträckorna $\overline{x}$, e och a. Sedan α konstruerats, erhålles β såsom tredje proportional till a och α.

Om speciellt $b = 2a$, är $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, eller $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 = 2$, hvilket visar att den kub hvars kant är $= \alpha$ har dubbelt så stor volym som kuben med kanten a. Ofvanstående konstruktion ger oss således i detta fall lösningen till det under namnet *kubens fördubbling* kända problemet, hvilket sysselsatte redan de äldsta grekiska matematikerna.

Ett annat lika celebert problem, som kan lösas med hjälp af den kubiska parabeln, är *vinkelns tredelning*.

Vi placera den vinkel v, som skall tredelas, så att dess spets faller i origo och dess högra ben utmed den positiva x-axeln. På dess venstra ben afsätta vi, utgående från origo, en sträcka lika med längdenheten e, samt bestämma abskissan a för denna sträckas andra ändpunkt; enligt trigonometrin är $a = \cos v$.

Vi söka $\cos \frac{v}{3} = x$. Enligt kända trigonometriska formler erhålles successivt

$$
\begin{aligned}
a = \cos v = \cos\left(\frac{2}{3}v + \frac{v}{3}\right) \\
&= \cos\frac{2}{3}v \cdot \cos\frac{v}{3} - \sin\frac{2}{3}v \cdot \sin\frac{v}{3} \\
&= \left(\cos^2\frac{v}{3} - \sin^2\frac{v}{3}\right)\cos\frac{v}{3} - 2\sin^2\frac{v}{3}\cos\frac{v}{3} \\
&= \left(2\cos^2\frac{v}{3} - 1\right)\cos\frac{v}{3} - 2\left(1 - \cos^2\frac{v}{3}\right)\cos\frac{v}{3},
\end{aligned}
$$

hvaraf $a = 4x^3 - 3x$, eller slutligen

$$x^3 = \frac{3}{4}x + \frac{a}{4}. \tag{11}$$

Vi veta att en af rötterna till denna ekvation är $x_1 = \cos\frac{v}{3}$. De två öfriga rötterna äro $x_2 = \cos\left(\frac{v}{3} + 120^\circ\right)$ och $x_3 = \cos\left(\frac{v}{3} + 240^\circ\right)$, hvilket framgår däraf att, om vi i ofvanstående kalkyl ersätta v med $v + 360^\circ$ eller med $v + 2 \cdot 360^\circ$, $\cos v$ fort-

farande erhåller värdet a, medan $\cos\frac{v}{3}$ i förra fallet öfvergår i värdet x_2, i senare fallet i värdet x_3. Om $v < 180°$ är x_1 den största af de tre rötterna.

Vi erhålla rötterna till ekvationen (11) grafiskt genom att skära kurvan $y = x^3$ medels räta linien $y = \frac{3}{4}x + \frac{a}{4}$ och bestämma skärningspunkternas abskissor. Nämnda räta linie går genom punkterna $x = 0, y = \frac{a}{4}$ och $x = a, y = a$, hvilka lätt konstrueras.

Sedan vi sålunda erhållit punkten x_1 på x-axeln, konstrueras vinkeln $\frac{v}{3}$ omedelbart enligt likheten $\cos\frac{v}{3} = x_1$; vi behöfva endast upprita cirkeln med origo såsom medelpunkt och längdenheten till radie, söka dess skärningspunkt med linien $x = x_1$, samt draga en stråle från origo genom denna punkt. Denna stråle bildar med den positiva x-axeln vinkeln $\frac{v}{3}$.

Läsaren uppmanas att noggrant utföra de ofvan beskrifna konstruktionerna, samt att undersöka lösningen af ekvationen (11) för de fall då vinkeln v är lika med 180°, 90° eller 45°, i hvilka fall problemet, såsom kändt, kan lösas medels passare och linjal.

4°. Vi behandla slutligen i korthet ekvationen af fjärde graden eller den bikvadratiska ekvationen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{12}$$

Om man i denna substituerar $x = x' - \frac{a}{4}$, erhålles en ekvation i x' där termen med x'^3 saknas:

$$x'^4 + px'^2 + qx' + r = 0. \tag{12)'}$$

Om $p = 0$, erhållas denna ekvations rötter grafiskt såsom abskissor för skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^4$ och räta linien $y = -qx - r$.

Är $p \neq 0$, kunna vi ytterligare förenkla ekvationen (12)'

genom att sätta $x' = \sqrt{|p|} \cdot x''$; vi erhålla då, om $p > 0$, en ekvation af formen

$$x''^4 + x''^2 + \alpha x'' + \beta = 0,$$

om $p < 0$, en ekvation af formen

$$x''^4 - x''^2 + \alpha x'' + \beta = 0.$$

Den förra löses grafiskt sålunda att kurvan $y = x^4 + x^2$ skäres med räta linien $y = -\alpha x - \beta$, den senare genom skärning af kurvan $y = x^4 - x^2$ med samma linie.

Hvarje ekvation af fjärde graden kan således lösas grafiskt medels linjal, om man tager till hjälp en viss af kurvorna

$$y = x^4, \quad y = x^4 + x^2, \quad y = x^4 - x^2.$$

En enhetligare lösningsmetod erhålles på följande sätt [1]). Vi antaga att vi genom en föregående substitution bragt den gifna ekvationen under formen

$$(12)' \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Om vi sätta $x^2 = y$, hvaraf $x^4 = y^2$, erhålles

$$x^4 + px^2 + qx + r = y^2 + py + qx + r,$$

eller, om vi till högra membrum addera skillnaden $x^2 - y$, hvars värde är 0,

$$x^4 + px^2 + qx + r = x^2 + y^2 + qx + (p-1)y + r.$$

Betrakta vi nu ekvationssystemet

---

[1]) Beträffande det grafiska framställningssättets användning för lösning af numeriska ekvationer, hänvisa vi till A. Schultze's förtjenstfulla arbete *Graphic Algebra* (New York, the Macmillan Company, 1908).

$$(13) \qquad \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + y^2 + qx + (p-1)y + r = 0 \end{cases}$$

mellan de obekanta x och y, se vi att, om x', y' är en lösning till detta system, värdet x' satisfierar ekvationen (12)', och att omvändt, om x' utgör en rot till (12)', värdena x' och $y' = x'^2$ satisfiera systemet (13). Vi erhålla således alla rötter till (12)' om vi bestämma alla värdepar x, y som satisfiera ekvationerna (13).

Den förra af dessa ekvationer representerar en parabel, den senare en cirkel med punkten $x = -\frac{q}{2}, y = -\frac{p-1}{2}$ såsom medelpunkt och radien

$$\sqrt{\frac{(p-1)^2 + q^2}{4} - r},$$

om vi nämligen antaga att kvantiteten under rotmärket är positiv (jmf. s. 15). Rötterna till (12)' utgöras således af abskissorna för dessa kurvors skärningspunkter. Om kurvorna icke råka hvarandra eller om uttrycket för cirkelns radie är imaginärt, har ekvationen (12)' icke några reella rötter.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna medels ofvan angifna metoder rötterna till ekvationerna

$$x^4 - 3 = 0, \quad x^4 - 2x + 1 = 0, \quad x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0.$$

2) Hvarje ekvation af tredje graden öfvergår, om den multipliceras med x, i en fjärdegrads ekvation, och kan således lösas med hjälp af passare om parabeln $y = x^2$ är gifven. Behandla medels denna metod öfningsuppgifterna s. 21 äfvensom problemet att tredela en vinkel.

5. **Lösning af ekvationer genom insättning af värden. Lineär interpolation.** — Den grafiska lösningen af en ekvation

$$(14) \qquad f(x) = 0$$

tillåter naturligtvis icke att bestämma dess rötter med någon större grad af noggrannhet. För att drifva approximationen

längre måste man tillgripa numerisk kalkyl, och den metod, som härvid närmast erbjuder sig, består i att instänga den betraktade roten mellan allt trängre gränser, genom att för den obekanta x successivt insätta lämpligt valda värden och bestämma det tecken funktionen $f(x)$ hvarje gång erhåller.

Ifrågavarande metod grundar sig på följande enkla sats. Vi antaga att funktionen $f(x)$ har olika tecken för $x=a$ och för $x=b$, samt att, då x genomlöper värdena från a till b, funktionens värde förändras *kontinuerligt*, d. v. s. att den förändring af funktionens värde, som motsvarar en viss förändring af variabelns värde, till sitt absoluta belopp kan göras huru liten som helst genom att variabelns förändring göres tillräckligt liten. Det finnes då mellan a och b åtminstone ett värde x för hvilket funktionen $f(x)$ antar värdet 0, eller annorlunda uttryckt, ekvationen (14) har åtminstone en rot mellan a och b. Kortare kan denna sats formuleras som följer:

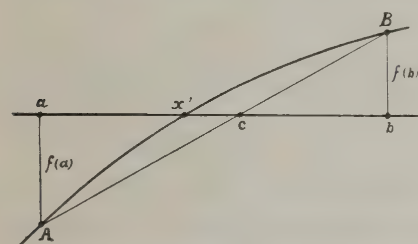
En kontinuerlig funktion kan icke ändra tecken utan att gå genom noll.

Beviset för denna sats, som är af fundamental betydelse för Analysen, skola vi i detalj utföra i åttonde kapitlet, sedan vi genomgått teorin för de irrationella talen.

Vi antaga att vi, enligt ofvanstående sats, äro säkra om att en rot till (14) ligger mellan gränserna a och b. Om vi mellan dessa inskjuta ett värde c och beräkna funktionsvärdet $f(c)$, är antingen $f(c)=0$, i hvilket fall c utgör en rot till (14), eller har $f(c)$ motsatt tecken mot $f(a)$, hvaraf vi sluta att en rot ligger mellan a och c, eller har slutligen $f(c)$ motsatt tecken mot $f(b)$, och i detta fall kunna vi påstå att det finnes en rot mellan c och b. Genom att sålunda successivt inskjuta nya värden x och bestämma tecknen för motsvarande värden $f(x)$, kan man få rötterna till den gifna ekvationen instängda mellan huru trånga gränser som helst och deras värden således beräknade med den noggrannhet man önskar. Dock gäller detta endast om de rötter till (14) för hvilka funktionen $f(x)$ ändrar tecken i det den går genom 0, sålunda att, om x' är rotens värde, $f(x)$ har ett visst tecken inom intervallen $(x'-\delta, x')$ och det motsatta tecknet inom intervallen $(x', x'+\delta)$, förutsatt att det positiva talet δ väljes tillräckligt litet.

För att minska antalet försök och snabbare nå målet, kombinerar man ofvanstående förfarande med särskilda *interpolationsmetoder*, bland hvilka den enklaste är den som kommer till användning redan vid begagnandet af logaritmiska tabeller, nämligen s. k. *lineär interpolation*.

Vi antaga att $b > a$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, samt att inom intervallen (a, b) ligger en enda rot till (14), hvilken sålunda är afskild från de öfriga rötterna eller *separerad*. Ekvationen $y = f(x)$ representerar då inom intervallen (a, b) en kontinuerlig kurva som skär x-axeln i en enda punkt, hvars abskissa x' är den betraktade roten. Den lineära interpolationen består däri att man, inom intervallen (a, b), ersätter ifrågavarande kurva med den rätliniga sträckan, AB, som sammanbinder de punkter på kurvan hvilka svara mot intervallens ändpunkter, a och b. Sträckan AB skär x-axeln i en punkt, hvars abskissa c ger oss ett närmevärde för roten x'; detta närmevärde är desto noggrannare ju regelbundnare kurvan förlöper och ju mindre intervallen (a, b) är. Om man känner kurvans form inom denna intervall, kan man ofta på förhand afgöra om närmevärdet c är för stort eller för litet.



För beräkning af c ger oss figuren omedelbart analogin

$$\frac{b-c}{c-a} = \frac{f(b)}{|f(a)|} = \frac{f(b)}{-f(a)},$$

ur hvilken för differenserna $c - a$ och $b - c$ fås värdena

$$c - a = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a), \quad b - c = \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Vi tillämpa det ofvan sagda på ekvationen

(15) $$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0,$$

hvilken tidigare behandlats grafiskt. Man har $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, och sluter häraf att inom intervallen $(0, 1)$ ligger åtminstone en rot till (15); enligt den tidigare behandlingen veta vi för öfrigt att ekvationen icke har mer än en rot inom denna intervall. Vi skola beräkna denna rots värde, hvilket vi beteckna med x'.

Om vi interpolera lineärt mellan värdena $x = 0$ och $x = 1$, erhålla vi för x' närmevärdet $\frac{1}{2}$, såsom man omedelbart ser. Vi insätta i $f(x)$ värdet $x = \frac{1}{2}$ och finna $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{16}$. Då således $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ medan $f(0) < 0$, ligger x' mellan 0 och $\frac{1}{2}$.

Vi hafva $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{16}$. Vid lineär interpolation mellan 0 och $\frac{1}{2}$ erhålla vi såsom nytt närmevärde för roten $\frac{8}{33}$, alltså i det närmaste $\frac{1}{4}$, hvilket sistnämnda enklare värde vi insätta i ekvationens venstra membrum. Härvid erhålles $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{49}{256} = 0,1914\,..$ Således ligger x' mellan 0 och $\frac{1}{4}$.

Vi utgå nu från värdena $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{49}{256}$. Då $f\left(\frac{1}{4}\right)$ är nära lika med $\frac{1}{5}$ af $|f(0)|$, erhålles vid lineär interpolation för x' ett närmevärde som är nära lika med $\frac{4}{5}$ af intervallens bredd, alltså nära lika med $\frac{1}{5}$. Vi substituera därför i $f(x)$ värdet $x = \frac{1}{5}$ och finna $f\left(\frac{1}{5}\right) = -0,0304$. Alltså ligger x' mellan $\frac{1}{5}$ och $\frac{1}{4}$.

Utgående från likheterna $f\left(\frac{1}{5}\right) = -0,0304$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0,1914$, bilda vi ett nytt närmevärde c medels lineär interpolation. Vi erhålla, då resultatet afkortas till fyra decimaler,

$$c - \frac{1}{5} = \frac{0,0304}{0,2218}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 0,0069$$

och således $c = 0,2069$.

Vi insätta nu $x = 0,207$ och finna, då räkningen utföres med fem decimaler, $f(0,\ 207) = 0,00136$. Närmevärdet

0,207 är således för stort. Vi insätta därför ännu $x = 0,206$ och finna $f(0,206) = -0,00316$. Roten x' ligger således mellan 0,206 och 0,207. Vid lineär interpolation erhålles för densamma närmevärdet

$$x' = 0,20670.$$

Nästa steg vore att i $f(x)$ insätta värdet 0,2067, men vi fortsätta icke räkningen vidare.

Vid dessa räkningar användes med fördel förkortad multiplikation och division, för hvilka redogöres i nästa kapitel. Såsom af ofvanstående framgår, vore det önskligt att kunna uppskatta noggrannheten af det vid lineär interpolation erhållna närmevärdet, för att afgöra huru många decimaler böra i detsamma medtagas. En dylik uppskattning erhålles med hjälp af differentialkalkylen.

Öfningsuppgifter:

1) Separera de reella rötterna till ekvationen

$$x^5 + x^4 - 20x^3 - 21x^2 + 64x + 63 = 0.$$

2) Beräkna de tre öfriga rötterna till ekvationen (15) med tre riktiga decimaler.

3) Beräkna $\sqrt[3]{10}$ med fem decimaler.

4) Bestäm roten till ekvationen $\text{Log}\, x = \frac{x}{10}$ [1].

5) Undersök grafiskt läget af rötterna till ekvationen

$$\text{tang}\, x = 2x,$$

(x är uttryckt i absolut vinkelmått) samt beräkna härefter, med den noggrannhet tabellerna tillåta, gradtalet för den positiva spetsiga vinkel som satisfierar nämnda ekvation.

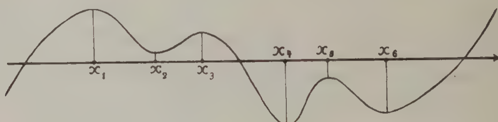
6. **Den elementära teorin för funktioners maxima och minima.** — Vi vilja i detta sammanhang påminna om den metod som i elementarmatematiken användes för bestämmandet af funktioners maxima och minima, samt belysa densamma med hjälp af den grafiska framställningen.

En funktion $f(x)$ säges hafva ett *maximivärde* eller ett *maximum* för argumentvärdet $x = x_0$, om $f(x_0)$ är större än funktionens värde för hvarje annat argumentvärde i en viss

---

[1]) Här och i det följande betecknar Log den Briggska logaritmen.

omgifning af x_0, d. v. s. för de värden x som ligga inom en viss intervall $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, där δ är ett positivt tal som kan vara huru litet som helst. Likaså säges $f(x)$ hafva ett *minimivärde* eller ett *minimum* för $x = x_0$, om man kring x_0 kan afgränsa en sådan intervall, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, att $f(x_0)$ är mindre än värdet af $f(x)$ för hvarje annat argumentvärde inom denna intervall.

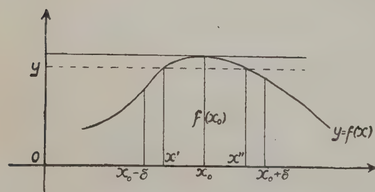


Exempelvis har den af ofvan tecknade kurva representerade funktionen maxima för $x = x_1,\ x_3,\ x_5$, minima för $x = x_2,\ x_4,\ x_6$.

Ett maximivärde behöfver ingalunda vara det största och ett minimivärde icke det minsta bland de värden funktionen öfverhufvud antager. Äfven kan det inträffa att ett maximivärde är mindre än ett minimivärde. Exempelvis är i ofvanstående figur funktionens värde för $x = x_5$, som är ett maximivärde, mindre än det minimivärde funktionen antar för $x = x_2$.

Vi skola närmare betrakta fördelningen af en funktions värden i omgifningen af ett maximi- eller minimiställe.

Vi antaga att funktionen $f(x)$ har ett maximum för $x = x_0$ och är kontinuerlig i en viss omgifning af detta ställe. Vi kunna då kring x_0 afgränsa en så liten intervall, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, att $f(x)$ inom densamma är kontinuerlig samt $f(x_0)$ större än hvarje annat värde funktionen därstädes antager. Om nu y är ett föreskrifvet reellt värde som är större än $f(x_0)$, är $f(x) < y$ i hvarje punkt x af intervallen $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ och ekvationen $f(x) = y$ har således ingen rot inom denna intervall. Föreskrifva vi däremot ett värde y som är



mindre än $f(x_0)$ men samtidigt större än $f(x_0 - \delta)$ och $f(x_0 + \delta)$, har ekvationen $f(x) = y$ åtminstone en rot x' mellan $x_0 - \delta$ och x_0, och likaså åtminstone en rot x'' mellan x_0 och $x_0 + \delta$. Ty skillnaden $f(x) - y$ är negativ för $x = x_0 - \delta$ men positiv för $x = x_0$, och ändras kontinuerligt då x växer från $x_0 - \delta$ till x_0; denna skillnad blir således noll för åtminstone ett värde x mellan $x_0 - \delta$ och x_0, och på samma sätt inses att den blir noll för åtminstone ett värde mellan x_0 och $x_0 + \delta$. Dessa värden x utgöra abskissor för skärningspunkterna mellan kurvan $y = f(x)$ och den parallell till x-axeln hvars ordinata är lika med det betraktade värdet y.

Ofvanstående resonemang fortfar att gälla då vi låta y växa mot värdet $f(x_0)$. Ekvationen $f(x) = y$ har beständigt åtminstone två rötter inom intervallen $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, minst en på hvar sin sida om x_0, och dessa rötter närma sig x_0 och sammanfalla slutligen med detta värde då y sammanfaller med $f(x_0)$. Detta framgår geometriskt ur ofvanstående figur och bevisas äfven lätt analytiskt [1]).

Om $f(x)$ har ett minimum för $x = x_0$, finner man på analogt sätt att, för $y < f(x_0)$, ekvationen $f(x) = y$ icke har någon rot i en viss omgifning af x_0, medan däremot, om $y > f(x_0)$ och skillnaden $y - f(x_0)$ är tillräckligt liten, nämnda ekvation har åtminstone två rötter hvilka allt mer närma sig x_0 och slutligen sammanfalla med detta värde då y aftager mot värdet $f(x_0)$. Härvid förutsättes åter att $f(x)$ är kontinuerlig i omgifningen af punkten x_0.

Vi betrakta såsom exempel funktionen

$$(16) \qquad f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}.$$

En rationell funktion är, såsom längre fram strängt bevisas,

---

[1]) Vårt påstående innebär att, om man kring x_0 afgränsar en huru liten intervall som helst, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, de rötter till ekvationen $f(x) = y$, hvilka ligga mellan $x_0 - \delta$ och $x_0 + \delta$, alla falla inom denna intervall så snart y kommer värdet $f(x_0)$ tillräckligt nära. Detta äger säkert rum om y är större än det största värde $f(x)$ antar inom intervallerna $(x_0 - \delta, x_0 - \varepsilon)$ och $(x_0 + \varepsilon, x_0 + \delta)$, och samtidigt mindre än $f(x_0)$.

kontinuerlig för hvarje värde af variabeln för hvilket nämnaren är skild från noll, och vi sluta häraf att den betraktade funktionen är kontinuerlig för alla värden x med undantag af värdet $x = -1$. Då x växande närmar sig -1, närmar sig $x+1$ noll genom negativa värden, medan täljaren närmar sig värdet 4; $f(x)$ aftager således mot $-\infty$. Då x aftagande närmar sig -1, växer åter $f(x)$ mot $+\infty$. I själfva punkten $x = -1$ är funktionen $f(x)$ icke definierad.

För att bestämma funktionens maxima och minima undersöka vi främst hvilka värden den öfverhufvud kan antaga för reella värden af argumentet. Vi sätta således

$$\frac{x^2+3}{x+1} = y$$

och lösa denna ekvation med afseende å x, hvarvid vi erhålla rötterna

(17) $$x = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2+4y-12}.$$

För dessa två värden, och endast för dessa värden, antar således den gifna funktionen det föreskrifna värdet y.

Uttrycket under rotmärket, hvilket kan skrifvas

$$y^2+4y-12 = (y-2)(y+6),$$

är negativt om y ligger inom intervallen $(-6, 2)$, d. v. s. mellan -6 och 2, noll om y är lika med något af dessa tvenne värden, positivt om y ligger utom intervallen $(-6, 2)$, d. v. s. om antingen $y < -6$ eller $y > 2$.

I det första fallet äro rötterna (17) båda imaginära, hvaraf vi sluta att den gifna funktionen för reella värden x icke antar något värde som ligger mellan gränserna -6 och 2.

Om $y < -6$, äro rötterna (17) reella och olika. Låta vi y växa, förändras dessa rötter kontinuerligt och blifva för $y = -6$ båda lika med -3. *Värdet* $f(-3) = -6$ *är ett maximivärde för* $f(x)$. Ty låta vi variabeln x, utgående från värdet -3, kontinuerligt ökas eller minskas, förändras jämväl funktionen $f(x)$ kontinuerligt. Då nu $f(x)$ icke kan an-

taga värden som äro större än -6, såframt de icke samtidigt äro större än 2, och då $f(x)$ antar värdet -6 blott för $x=-3$, äro värdena af $f(x)$ i en viss omgifning af punkten $x=-3$ alla mindre än -6, hvaraf vårt påstående följer. Dettas riktighet kan äfven direkt kontrolleras med hjälp af likheten

$$f(x)+6=\frac{(x+3)^2}{x+1},$$

hvilken visar att $f(x)+6<0$ och således $f(x)<-6$ så snart $x<-1$, utom för det ena värdet $x=-3$.

För $y>2$ äro rötterna (17) jämväl reella och olika. Då y aftager förändras de kontinuerligt, och antaga för $y=2$ båda värdet 1. Ett resonemang analogt med det ofvanstående visar, att de värden $f(x)$ antar i närheten af punkten $x=1$ alla äro större än 2, och att $f(1)=2$ således är ett *minimivärde.* Detta framgår jämväl ur likheten

$$f(x)-2=\frac{(x-1)^2}{x+1},$$

enligt hvilken $f(x)-2>0$ eller $f(x)>2$ om $x>-1$, utom för det ena värdet $x=1$.

Funktionen (16) har således ett maximum för $x=-3$ och ett minimum för $x=1$, och dessa äro funktionens enda maximi- och minimiställen. Ty vi hafva sett att hvarje dylikt ställe, i hvars omgifning $f(x)$ är kontinuerlig, är karaktäriseradt därigenom att tvenne reella rötter till ekvationen $f(x)=y$ sammanfalla, men detta inträffar i förevarande fall endast för värdena $y=2$ och $y=-6$, mot hvilka just svara punkterna $x=1$ och $x=-3$. Å andra sidan är den enda punkt i hvilken $f(x)$ icke är kontinuerlig, nämligen punkten $x=-1$, icke heller något maximi- eller minimiställe, ty funktionen är icke definierad i denna punkt.

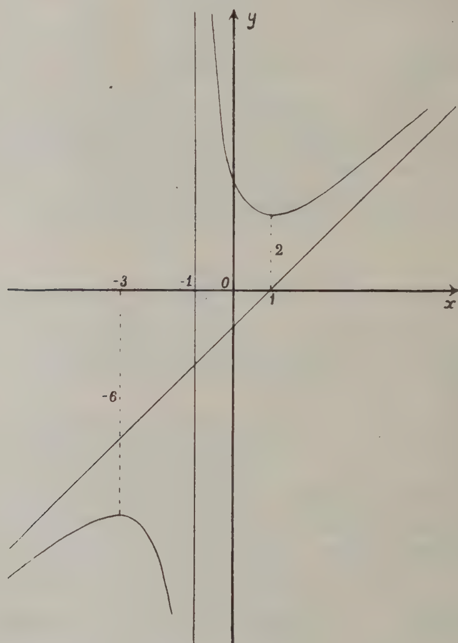
Till belysande af det ofvan sagda upprita vi kurvan

$$y=\frac{x^2+3}{x+1}.$$

Denna är en *hyperbel*, hvars ena asymptot är linien $x = -1$. Skrifves ekvationen under formen

$$y = x - 1 + \frac{4}{x+1},$$

som omedelbart erhålles genom division, ser man att den andra asymptoten utgöres af linien $y = x - 1$, ty skillnaden mellan kurvans ordinata och denna linies ordinata är lika med $\frac{4}{x+1}$ och närmar sig således noll då x växer mot ∞ eller aftager mot $-\infty$.



Öfningsuppgifter:

1) Bestäm följande funktioners maxima och minima, samt upprita motsvarande kurvor:

$$x^2 + px + q\,,\ x^4 - x^2,\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1},\ 3 \sin x + 4 \cos x\,.$$

2) Bestäm det kortaste afståndet från punkten x_0, y_0 till räta linien $y = mx + b$.

7. Kontinuitetsbegreppet. Allmänna egenskaper hos kontinuerliga funktioner. — I det föregående hafva vi flere gånger stödt oss på att de betraktade funktionerna antagits vara *kontinuerliga*, och däraf dragit särskilda viktiga slutsatser. Vi måste nu närmare precisera detta begrepp, som är af grundläggande betydelse för Analysen.

Vi betrakta en funktion $f(x)$ och ett speciellt argumentvärde x_0, samt antaga att $f(x)$ är entydigt definierad och ändlig inom en viss intervall (a, b) i hvars inre x_0 ligger, så att följaktligen mot hvarje värde x mellan a och b, och speciellt mot värdet x_0, svarar ett bestämdt ändligt funktionsvärde $f(x)$.

$x_0 + \Delta x$ må vara ett annat argumentvärde inom intervallen (a, b). Då är

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

den *tillväxt* eller *förändring* funktionens värde undergår då variabeln x, utgående från värdet x_0, erhåller tillväxten Δx[1].

Vi införa nu följande precisa definition för en funktions kontinuitet.

Definition. — *Funktionen $f(x)$ säges vara kontinuerlig för argumentvärdet x_0 (eller i punkten x_0) om den förändring, Δf, hvilken funktionen undergår då argumentet förändras från x_0 till $x_0 + \Delta x$, kan till sitt numeriska värde göras huru liten som helst genom att argumentets förändring Δx göres numeriskt tillräckligt liten.*

Om man föreskrifver ett positivt tal ε, huru litet som helst, bör det således alltid finnas ett annat positivt tal δ, sådant att

$$(18) \qquad |\Delta f| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{så snart} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Talet δ beror af ε och måste i allmänhet minskas då ε väljes mindre.

För att förtydliga denna definition medels ett alldeles enkelt exempel, visa vi att funktionen $f(x) = x^2$ är kontinuer-

---

[1]) Tillväxterna Δx och Δf kunna äfven hafva negativa värden. Till förebyggande af missförstånd må uttryckligen framhållas att tecknet Δ här icke bör uppfattas såsom en faktor.

lig för $x=2$. Vi hafva $f(2)=4$ och $f(2+\Delta x)=4+4\Delta x+(\Delta x)^2$, hvaraf

$$\Delta f=f(2+\Delta x)-f(2)=4\Delta x+(\Delta x)^2=\Delta x(4+\Delta x).$$

Vi böra visa att $|\Delta f|$ kan göras $<\varepsilon$ genom att $|\Delta x|$ göres tillräckligt litet. För detta ändamål pålägga vi först Δx t. ex. villkoret $|\Delta x|<1$. Då är $|4+\Delta x|\leq 4+|\Delta x|<5$ och således $|\Delta f|<5|\Delta x|$. Göra vi ytterligare $5|\Delta x|<\varepsilon$, d. v. s. $|\Delta x|<\frac{\varepsilon}{5}$, blir $|\Delta f|<\varepsilon$. Alltså är säkert $|\Delta f|<\varepsilon$ för alla värden Δx hvilkas numeriska värde samtidigt är mindre än 1 och $\frac{\varepsilon}{5}$. Vi äro sålunda säkra om att $|\Delta f|<\frac{1}{10}$ om $|\Delta x|<\frac{1}{50}$, likaså att $|\Delta f|<\frac{1}{100}$ om $|\Delta x|<\frac{1}{500}$, o. s. v.

Vi hafva afsiktligt tillämpat det förfarande som i allmänhet användes vid undersökning af funktioners kontinuitet. I förevarande enkla fall kan man omedelbart exakt angifva den intervall kring argumentvärdet $x=2$ inom hvilken $|\Delta f|<\varepsilon$. Denna intervall sträcker sig tydligen från värdet $x=\sqrt{4-\varepsilon}$ till värdet $x=\sqrt{4+\varepsilon}$.

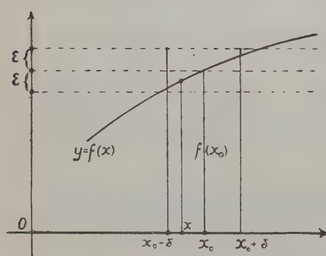
Vi vilja ännu geometriskt belysa den ofvan gifna definitionen. Olikheten $|\Delta f|<\varepsilon$ kan skrifvas $-\varepsilon<\Delta f<\varepsilon$, eller

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x_0+\Delta x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Likaså kan villkoret $|\Delta x|<\delta$ skrifvas $-\delta<\Delta x<\delta$, hvaraf följer

$$x_0-\delta<x_0+\Delta x<x_0+\delta.$$

Villkoret (18) för funktionens kontinuitet i punkten x_0 kan således utsägas i följande geometriska form:



Om man drager tvenne paralleller till x-axeln med ordinatorna $f(x_0)+\varepsilon$ och $f(x_0)-\varepsilon$, där ε är en gifven, godtyckligt liten positiv kvantitet, bör man alltid kring punkten x_0 kunna af-

gränsa en sådan intervall, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, att alla punkter af kurvan $y = f(x)$, hvilkas abskissor falla inom denna intervall, ligga mellan nämnda paralleller.

För att förkorta uttryckssättet införa vi ännu följande definition:

En funktion säges vara kontinuerlig inom en viss intervall, om den är kontinuerlig för hvarje argumentvärde som hör till denna intervall.

Om en funktion $f(x)$ icke uppfyller kontinuitetsvillkoret för ett visst argumentvärde, säges den vara *diskontinuerlig* eller hafva en *diskontinuitet* för detta argumentvärde. Vi betrakta såsom exempel den genom följande villkor definierade funktionen:

(19) $$f(x) = x \text{ för } 0 < x < 1, \quad f(x) = 0 \text{ för } x \geqq 1.$$

Mot hvarje positivt värde x svarar ett ändligt, fullt bestämdt funktionsvärde $f(x)$, och funktionen är således entydigt definierad för alla positiva argumentvärden. Denna funktion är diskontinuerlig för $x = 1$. Ty då x växande närmar sig 1, närmar sig $f(x)$ alltmer värdet 1, men antar för $x = 1$ plötsligt värdet 0. Skillnaden $f(1 + \Delta x) - f(1)$ är således, om tillväxten Δx är negativ och numeriskt liten, nära lika med 1, och kan följaktligen icke göras mindre än ett godtyckligt litet tal.

Vi sammanställa här några allmänna satser om kontinuerliga funktioner hvilka oupphörligt komma till användning i Analysen, och hvilkas bevis vi senare skola gifva, sedan vi genomgått teorin för irrationella tal.

Vi ha redan flere gånger gjort bruk af den viktiga satsen att en kontinuerlig funktion icke kan ändra tecken utan att gå genom noll. Vi formulera än en gång denna sats i precis form:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig inom en intervall (a, b) och i dess ändpunkter, a och b, och om funktionens värden i punkterna a och b hafva motsatta tecken, finnes det mellan a och b åtminstone en punkt i hvilken funktionen antar värdet noll.

Ett korollarium af denna sats är följande viktiga egen-

skap hos kontinuerliga funktioner, af hvilken vi jämväl tidigare gjort bruk:

En funktion, $f(x)$, som är kontinuerlig inom en intervall (a, b) och i dess ändpunkter, antar inom intervallen hvarje värde som ligger mellan dess begynnelsevärde $f(a)$ och dess slutvärde $f(b)$.

Ty om y är ett sådant värde, har skillnaden $f(x) - y$ motsatta tecken för $x = a$ och för $x = b$, och måste således, då den är kontinuerlig inom intervallen (a, b) och i dess ändpunkter, antaga värdet noll för åtminstone ett värde x mellan a och b. För detta värde x är $f(x) = y$.

En annan väsentlig egenskap hos kontinuerliga funktioner uttryckes genom följande sats:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a \leqq x \leqq b$, finnes det bland de mot dessa argumentvärden svarande funktionsvärdena ett största värde och ett minsta värde, förutsatt att funktionen icke är konstant inom den betraktade intervallen.

Det bör observeras att, medan det i en ändlig mängd af tal alltid finnes ett största tal och ett minsta tal, detta ingalunda gäller för alla oändliga talmängder. För att öfvertyga oss härom behöfva vi endast betrakta mängden af alla tal mellan 0 och 1. I denna mängd finnes det intet största tal. Om α är ett godtyckligt tal i mängden, kunna vi nämligen inskjuta ett tal α' mellan α och 1; detta tal α' tillhör då äfven vår mängd och är större än α. Likaså inses att den betraktade mängden icke innehåller något minsta tal.

Ofvanstående sats är därför ingalunda självklar, utan uttrycker en egenskap som följer ur kontinuitetsvillkoret och som bör och kan bevisas med stöd af detta. Att det finnes diskontinuerliga funktioner som icke besitta ifrågavarande egenskap, visar oss den genom likheterna (19) definierade funktionen; bland de värden denna öfverhufvud antager finnes tydligen intet största värde.

Vi återgå till de i senaste sats gjorda förutsättningarna, samt beteckna med M det största och med m det minsta värdet af funktionen $f(x)$ för $a \leqq x \leqq b$. Skillnaden

$$O = M - m$$

kallas funktionens *svängning* eller *oscillation* inom intervallen (a, b). Om x_1 och x_2 äro tvenne godtyckliga punkter af denna intervall, har man alltid $m \leq f(x_1) \leq M$ och $m \leq f(x_2) \leq M$, hvaraf följer

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq O.$$

I anslutning härtill anföra vi ännu en viktig sats, af hvilken vi flere gånger komma att göra bruk:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a \leq x \leq b$, är det alltid möjligt, sedan man fixerat ett positivt tal ε, huru litet som helst, att finna ett annat positivt tal δ, sådant att oscillationen af $f(x)$ är mindre än ε inom hvarje del af intervallen (a, b) hvars längd är mindre än δ.

Man kan således äfven dela intervallen (a, b) i ett ändligt antal delar, sålunda att oscillationen af $f(x)$ inom hvarje del är mindre än ε.

För funktioner af flere variabler gälla satser som äro fullkomligt analoga med de ofvan anförda. Vi inskränka oss här till att precis definiera kontinuiteten af en funktion af två variabler.

Definition. — *En funktion $f(x, y)$ af de oberoende variablerna x, y säges vara kontinuerlig för ett visst värdesystem x_0, y_0 af dessa variabler, om det, sedan man fixerat ett godtyckligt litet positivt tal ε, är möjligt att finna ett annat positivt tal δ, sådant att*

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

för alla värden $\Delta x, \Delta y$ som uppfylla villkoren

$$|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta.$$

Geometriskt uttrycka sistnämnda villkor att punkten $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ faller inom en kvadrat med x_0, y_0 såsom midtpunkt och sidan 2δ. Det bör således vara möjligt att välja denna kvadrat så liten, att den förändring funktionens värde erfar, då man går från x_0, y_0 till en godtycklig punkt inom kvadraten, är numeriskt mindre än det föreskrifna talet ε.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att funktionen $\frac{1}{x}$ är kontinuerlig för värdet $x=1$, och angif den intervall inom hvilken funktionens värde skiljer sig från dess värde för $x=1$ med mindre än 0,001.

2) Beräkna oscillationen af polynomet x^2-3x+1 inom enhvar af intervallerna $(0,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$.

3) Dela intervallen $(0,1)$ i så många likastora delar, att oscillationen af funktionen x^2 inom hvarje del är $<\frac{1}{100}$.

4) Bevisa att funktionen $\frac{x}{y}$ är kontinuerlig för $x=x_0, y=y_0$, såframt $y_0 \neq 0$.

8. **Kalkyl med olikheter.** — Då det gäller att uppskatta storleken af en funktions förändring eller, allmännare, att approximativt beräkna en kvantitets storlek och angifva de gränser mellan hvilka den faller, har man ständigt att operera med *olikheter*, hvarför det kan vara skäl att i detta sammanhang påminna om de regler man härvid har att iakttaga.

Olikheten $a>b$ eller $b<a$ innebär, enligt definitionen för begreppen *större* och *mindre*, att skillnaden $\delta=a-b$ är positiv, d. v. s. att

$$a=b+\delta, \text{ där } \delta>0.$$

Härur följer att, om $a>b$ och $b>c$, man jämväl har $a>c$. Ty nämnda olikheter innebära att $a=b+\delta$, $b=c+\delta'$, där δ och δ' äro positiva tal; genom insättning följer härur $a=(c+\delta')+\delta=c+(\delta+\delta')$, hvilken likhet, då $\delta+\delta'>0$, utsäger att $a>c$.

Om a antingen är större än eller lika med b, alltså säkert icke mindre än b, skrifva vi

$$a \geqq b \text{ eller } b \leqq a.$$

Vi hafva då $a=b+\delta$ där $\delta \geqq 0$.

I fråga om kalkyl med olikheter bevisa vi först följande allmänna sats:

Ur olikheterna

$$a_1 \geqq b_1,\ a_2 \geqq b_2, \ldots, a_n \geqq b_n$$

följer

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq b_1 + b_2 + \cdots + b_n ,$$

hvarvid likhetstecknet gäller blott om man samtidigt har

$$a_1 = b_1 , \; a_2 = b_2 , \ldots , a_n = b_n .$$

Olikheter med samma riktning få således adderas membrum för membrum.

Enligt antagandet är nämligen

$$a_1 = b_1 + \delta_1 , \; a_2 = b_2 + \delta_2 , \ldots , a_n = b_n + \delta_n ,$$

där talen $\delta_1 , \delta_2 , \ldots , \delta_n$ äro positiva eller noll, och genom addition af dessa likheter följer

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 + \delta_1) + (b_2 + \delta_2) + \cdots + (b_n + \delta_n)$$
$$= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) .$$

Nu är summan $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ positiv eller noll, och noll blott i det fall då samtidigt $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = 0$. I förra fallet är således summan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ större än, i senare fallet lika med summan $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, hvarmed satsen är bevisad.

Såsom korollarium följer härur:

I en olikhet får en term öfverföras från det ena membrum till det andra, blott dess tecken förändras.

Ur olikheten $a \geqq b + c$ kan man sålunda sluta $a - c \geqq b$. Denna olikhet framgår nämligen ur den föregående om vi till hvartdera membrum addera $-c$.

Ett annat korollarium af ofvanstående sats är följande:

Om $a \geqq b$ *och* $c \leqq d$ *är* $a - c \geqq b - d$, *hvarvid likhetstecknet gäller blott om man samtidigt har* $a = b$ *och* $c = d$.

Ty då $a \geqq b$ och $d \geqq c$, erhålles genom addition $a + d \geqq b + c$, där likhetstecknet gäller blott om $a = b$ och $c = d$. Men ur denna olikhet framgår, då till hvartdera membrum adderas $-(c + d)$, den sökta olikheten $a - c \geqq b - d$.

Härur sluta vi åter följande viktiga sats, som oupphörligt kommer till användning:

Om talen α *och* β *båda ligga mellan gränserna* a *och* b $(> a)$, *är*

$$|\alpha - \beta| < b - a .$$

Enligt antagandet är $a < \alpha < b$ och $a < \beta < b$. Ur olikheterna $\alpha < b$, $\beta > a$ följer enligt föregående korollarium $\alpha - \beta < b - a$, och ur olikheterna $\alpha > a$, $\beta < b$ följer på samma sätt $\alpha - \beta > a - b = -(b - a)$. Skillnaden $\alpha - \beta$ ligger således mellan $b - a$ och $-(b - a)$, hvilket är liktydigt med att dess numeriska värde är mindre än $b - a$.

Riktigheten af ofvanstående sats framgår omedelbart för åskådningen om vi representera talen α, β, a, b medels punkter på en rät linie. Intervallen (α, β) utgör nämligen en del af intervallen (a, b) och dess längd $|\alpha - \beta|$ är följaktligen mindre än längden $b - a$ af sistnämnda intervall.

För hvarje gifvet tal a är tydligen $-|a| \leqq a \leqq |a|$, där det senare likhetstecknet gäller om a är positivt, det förra om a är negativt. Hafva vi ett ändligt antal gifna tal, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, och addera olikheterna

$$-|a_1| \leqq a_1 \leqq |a_1|, -|a_2| \leqq a_2 \leqq |a_2|, \ldots, -|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|,$$

erhålles

$$-(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| ,$$

hvarvid likhetstecknet till höger gäller blott om talen a_1, $\ldots, a_n$ alla äro positiva, likhetstecknet till venster blott om de alla äro negativa. I dessa speciella fall är således det numeriska värdet af summan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ lika med $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, i hvarje annat fall är detta värde mindre än $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Vi hafva således följande viktiga sats:

Det numeriska värdet af en summa af ett ändligt antal termer är mindre än eller lika med summan af termernas numeriska värden; likhet inträder blott om termerna alla hafva samma tecken.

I fråga om multiplikation gäller för olikheter följande fundamentala regel:

Om $a > b$ och faktorn k är positiv, har man

$$ka > kb,$$

d. v. s. en olikhet blir bestående om hvartdera membrum multipliceras med samma positiva faktor.

Är $a > b$ och faktorn k negativ, har man däremot

$$ka < kb,$$

d. v. s. en olikhet förbytes i den motsatta om hvartdera membrum multipliceras med samma negativa faktor.

Enligt antagandet är $a = b + \delta$ där $\delta > 0$. Härur följer $ka = k(b + \delta) = kb + k\delta$. Är nu faktorn k positiv, har man $k\delta > 0$ och således $ka > kb$; är k negativ, har man däremot $k\delta < 0$ och således $ka < kb$, hvarmed satsen är bevisad.

För $k = -1$ följer speciellt att, om $a > b$, man har $-a < -b$.

Såsom korollarium erhålles satsen:

Om $a > b$ och $c > d$, och om talen a, b, c, d alla äro positiva, gälla olikheterna $ac > bd$ och $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Ur $a > b$ följer nämligen genom multiplikation med faktorn c, hvilken enligt antagandet är positiv, olikheten $ac > bc$, och ur $c > d$ följer, genom multiplikation med b, olikheten $bc > bd$. Alltså är $ac > bd$, och genom multiplikation med den positiva faktorn $\frac{1}{cd}$ följer häraf $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Vi anföra ännu en allmän sats som erhålles genom kombination af de föregående, och hvilken äger en synnerligen vidsträckt användning inom Analysen.

Om $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ äro positiva tal, och om $u_1, u_2, \ldots, u_n$ beteckna godtyckliga reella tal af hvilka det största är $= M$ och det minsta $= m$, är

$$m(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \leqq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \leqq M(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

hvarvid likhet inträder blott om $M = m$ och talen $u_1, \ldots, u_n$ således alla äro lika.

Enligt antagandet är för hvarje index ν

$$m \leqq u_\nu \leqq M,$$

och härur följer, genom multiplikation med den positiva faktorn α_ν,

$$m\,\alpha_\nu \leqq \alpha_\nu u_\nu \leqq M\,\alpha_\nu\,.$$

Då vi successivt sätta $\nu = 1, 2, \ldots, n$ och addera alla dessa olikheter, erhålles det sökta resultatet.

Slutligen anföra vi följande intressanta korollarium af ofvanstående sats:

Om nämnarena i bråken $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ *alla hafva samma tecken, ligger värdet af uttrycket*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

mellan det största och det minsta af dessa bråk.

Vi införa för de gifna bråkens värden beteckningarna

$$\frac{a_1}{b_1} = u_1\,,\ \frac{a_2}{b_2} = u_2\,, \ldots,\ \frac{a_n}{b_n} = u_n\,,$$

samt beteckna med M det största och med m det minsta af dessa värden. Då är $a_1 = b_1 u_1$, $a_2 = b_2 u_2, \ldots, a_n = b_n u_n$, hvaraf

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n\,.$$

Enligt föregående sats erhålles följaktligen, om vi antaga att nämnarena $b_1, \ldots, b_n$ äro positiva,

$$m\,(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\leqq M\,(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\,.$$

Genom division med det positiva talet $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ följer härur

$$m \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqq M\,.$$

Likhet inträder blott om $M = m$, d. v. s. om $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Vårt resultat reducerar sig då till den kända satsen: Om flere bråk äro sinsemellan lika, är hvart och ett af dem

lika med det bråk som har summan af täljarena till täljare och summan af nämnarena till nämnare.

Om de gifna bråkens nämnare alla äro negativa, behöfva vi endast ändra tecknet för täljaren och nämnaren i hvarje bråk, hvarefter ofvanstående bevis är tillämpligt.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att det aritmetiska medeltalet af vissa gifna tal ligger mellan det största och det minsta af dessa tal.

2) Bevisa riktigheten af olikheterna

$$\left|\frac{|a|-|b|}{|c|+|d|}\right| \leqq \left|\frac{a+b}{c+d}\right| \leqq \left|\frac{|a|+|b|}{|c|-|d|}\right|,$$

och afgör i hvilka fall likhetstecknen gälla.

3) För hvilka värden x äga följande olikheter rum:

$$\frac{1}{1-x} > 1+x; \quad \frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2}; \quad \left|\frac{2x-1}{3-2x}\right| < 2.$$

4) Bevisa riktigheten af följande olikheter (genom att bringa skillnaden mellan de betraktade uttrycken under en sådan form att dess tecken omedelbart framgår) och afgör när likhetstecknen gälla:

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}, \text{ (}a\text{ och }b\text{ äro positiva);}$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) > (ac+bd)^2;$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \text{(}a\text{ och }b\text{ äro positiva);}$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

9. **Rationella och trigonometriska funktioners kontinuitet. Allmänna satser om funktioners kontinuitet. Fullständig induktion.** — Vi skola nu systematiskt undersöka de elementära funktionerna med afseende å deras kontinuitet, och göra härvid början med potensen x^n, där n är ett positivt helt tal, samt funktionerna $\sin x$ och $\cos x$.

1°. Då argumentet x förändras från värdet x_0 till värdet $x_1 = x_0 + \Delta x$, erhåller funktionen x^n tillväxten

$$\Delta (x^n) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = x_1^n - x_0^n.$$

Vi skola visa att $|\Delta (x^n)|$ kan göras mindre än ett föreskrifvet, godtyckligt litet positivt tal ε, genom att $|\Delta x|$ göres tillräckligt litet.

För detta ändamål använda vi den viktiga identiteten

$$(20) \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + a b^{n-2} + b^{n-1}),$$

hvilken omedelbart verificeras genom utförande af multiplikationen i högra membrum eller genom division af $a^n - b^n$ med $a - b$. Med hjälp af denna identitet erhålles, då $x_1 - x_0 = \Delta x$,

$$\Delta (x^n) = \Delta x \, (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 + \cdots + x_0^{n-1}),$$

hvarur följer, enligt satsen s. 42,

$$|\Delta (x^n)| \leqq |\Delta x| \, (|x_1^{n-1}| + |x_1^{n-2} x_0| + \cdots + |x_0^{n-1}|).$$

Då $|x_1| = |x_0 + \Delta x| \leqq |x_0| + |\Delta x|$ och jämväl $|x_0| \leqq |x_0| + |\Delta x|$, är enhvar af termerna inom parentesen $\leqq (|x_0| + |\Delta x|)^{n-1}$, och då antalet termer är n, är deras summa $\leqq n \, (|x_0| + |\Delta x|)^{n-1}$, så att vi erhålla

$$|\Delta (x^n)| \leqq n \, |\Delta x| \, (|x_0| + |\Delta x|)^{n-1}.$$

Om vi först pålägga $|\Delta x|$ t. ex. villkoret $|\Delta x| < 1$, följer härur

$$|\Delta (x^n)| \leqq n \, |\Delta x| \, (|x_0| + 1)^{n-1}.$$

Högra membrum i denna olikhet blir mindre än ε om $|\Delta x|$ ytterligare underkastas villkoret

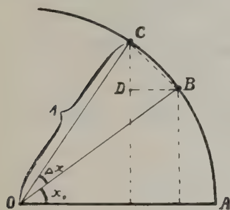
$$|\Delta x| < \frac{\varepsilon}{n(|x_0|+1)^{n-1}}.$$

Alltså är säkert $|\Delta(x^n)| < \varepsilon$ för alla värden Δx som samtidigt uppfylla villkoret $|\Delta x| < 1$ och ofvanstående olikhet, hvarmed vi bevisat att *funktionen* x^n *är kontinuerlig för hvarje värde* x.

2°. Vi gå till funktionerna $\sin x$ och $\cos x$. Då x förändras från x_0 till $x_0 + \Delta x$, erhålla dessa funktioner tillväxterna

$$\Delta \sin x = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0, \; \Delta \cos x = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0.$$

Om vi på vanligt sätt representera $\sin x$ och $\cos x$ med hjälp af en cirkel med radien 1, hvarvid $|x|$ tillika anger längden af den mot vinkeln x stående bågen, äro $\Delta \sin x$ och $\Delta \cos x$, såsom af vidstående figur framgår, på tecknet när lika med kateterna CD och BD i en rätvinklig triangel hvars hypotenusa BC utgör den mot bågen Δx stående kordan. Då nu kordan är kortare än bågen, följer härur



$$|\Delta \sin x| \leqq |\Delta x|, \quad |\Delta \cos x| \leqq |\Delta x|,$$

där likhetstecknet gäller blott för $\Delta x = 0$. Göra vi $|\Delta x| < \varepsilon$ är således äfven $|\Delta \sin x| < \varepsilon$ och $|\Delta \cos x| < \varepsilon$, x_0 må vara hvilket värde som helst. Vi hafva härmed visat att *funktionerna* $\sin x$ *och* $\cos x$ *äro kontinuerliga för hvarje värde* x.

3°. För att komma vidare, bevisa vi först några allmänna satser.

Om funktionen $f(x)$ *är kontinuerlig för* $x = x_0$ *är funktionen* $Cf(x)$ *det äfven, då* C *är en godtycklig konstant.*

Då x får tillväxten Δx, ökas $Cf(x)$ med

$$Cf(x_0 + \Delta x) - Cf(x_0) = C[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = C \Delta f.$$

Vi erhålla $|C\Delta f| < \varepsilon$ om vi göra $|\Delta x|$ så litet att $|\Delta f| < \frac{\varepsilon}{|C|}$, och detta är säkert möjligt då $f(x)$ enligt antagandet är kontinuerlig för $x = x_0$.

Om funktionerna $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ *alla äro kontinuerliga för argumentvärdet* $x = x_0$, *är deras summa*

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

äfven kontinuerlig för detta värde.

Vi hafva nämligen

$$\Delta S = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \cdots + \Delta u_n,$$

om vi för korthetens skull med ΔS, $\Delta u_1, \ldots$ beteckna de tillväxter funktionerna $S(x)$, $u_1(x), \ldots$ erhålla då x förändras från x_0 till $x_0 + \Delta x$. Då nu $u_1(x)$ är kontinuerlig för $x = x_0$, kunna vi bestämma ett sådant positivt tal δ_1 att

$$|\Delta u_1| < \frac{\varepsilon}{n} \text{ så snart } |\Delta x| < \delta_1.$$

Likaså existera positiva tal $\delta_2, \ldots, \delta_n$, sådana att

$$|\Delta u_2| < \frac{\varepsilon}{n} \text{ så snart } |\Delta x| < \delta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$|\Delta u_n| < \frac{\varepsilon}{n} \text{ så snart } |\Delta x| < \delta_n.$$

Om vi med δ beteckna det minsta af talen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, och om vi pålägga Δx villkoret $|\Delta x| < \delta$, äga de ofvanstående n olikheterna samtidigt rum och vi erhålla således

$$|\Delta S| \leq |\Delta u_1| + |\Delta u_2| + \cdots + |\Delta u_n| < \varepsilon,$$

hvarmed satsen är bevisad.

Genom kombination af de två ofvan bevisade satserna sluta vi att uttrycket

$$C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \cdots + C_n u_n(x),$$

där $C_1, C_2, \ldots, C_n$ äro godtyckliga konstanter, är kontinuerligt för $x = x_0$, om enhvar af funktionerna $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ är kontinuerlig för detta argumentvärde.

Härur följer speciellt att *skillnaden* $u(x) - v(x)$ *är kontinuerlig i hvarje punkt där såväl* $u(x)$ *som* $v(x)$ *är kontinuerlig.*

Ur samma sats sluta vi vidare att *ett polynom*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

definierar en för hvarje argumentvärde kontinuerlig funktion.

4°. Vi bevisa härefter satsen:

Om funktionerna $u(x)$ *och* $v(x)$ *äro kontinuerliga för* $x = x_0$ *är deras produkt* $u(x)\,v(x)$ *det äfven.*

Om vi sätta

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u, \quad v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v,$$

erhålles för tillväxten af produkten $u(x)\,v(x)$ uttrycket

$$\begin{aligned}\Delta[u(x)\,v(x)] &= u(x_0 + \Delta x)\,v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\,v(x_0)\\ &= v(x_0)\,\Delta u + u(x_0)\,\Delta v + \Delta u \Delta v\\ &= v(x_0)\,\Delta u + \big(u(x_0) + \Delta u\big)\,\Delta v.\end{aligned}$$

Emedan $u(x)$ är kontinuerlig för $x = x_0$, kunna vi bestämma ett positivt tal δ_1 sådant att

$$|v(x_0)\,\Delta u| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ eller } |\Delta u| < \frac{\varepsilon}{2\,|v(x_0)|} \text{ för } |\Delta x| < \delta_1.$$

Härur följer

$$\left|\big(u(x_0) + \Delta u\big)\Delta v\right| \leq \left(|u(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2\,|v(x_0)|}\right)|\Delta v|,$$

där likhetstecknet gäller blott om $\Delta v = 0$. Enär $v(x)$ är kontinuerlig för $x = x_0$, kunna vi vidare bestämma ett positivt tal δ_2 så att

$$\left(|u(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2|v(x_0)|}\right)|\Delta v| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ för } |\Delta x| < \delta_2.$$

Om δ betecknar det mindre af talen δ_1 och δ_2, bestå de ofvanstående olikheterna samtidigt för $|\Delta x| < \delta$, och vi sluta häraf att

$$|\Delta[u(x)v(x)]| < \varepsilon \text{ så snart } |\Delta x| < \delta,$$

hvarmed satsen är bevisad.

Denna sats låter generalisera sig som följer:

En produkt af ett ändligt antal funktioner är kontinuerlig för ett gifvet argumentvärde, om hvarje faktor är kontinuerlig för detta värde.

Vi betrakta först en produkt af tre funktioner,

$$u_1(x)\,u_2(x)\,u_3(x),$$

hvilka alla antagas kontinuerliga för $x = x_0$. I det vi sammanfatta de två första faktorerna till en, kunna vi uppfatta detta uttryck såsom en produkt af två faktorer, nämligen $u_1(x)\,u_2(x)$ och $u_3(x)$. Hvardera faktorn är kontinuerlig för $x = x_0$, $u_3(x)$ enligt antagandet och $u_1(x)\,u_2(x)$ på grund af den ofvan bevisade satsen. På grund af samma sats är således äfven dessa faktorers produkt kontinuerlig för $x = x_0$, och vår sats är sålunda bevisad för en produkt af tre funktioner.

Hafva vi en produkt af fyra funktioner,

$$u_1(x)\,u_2(x)\,u_3(x)\,u_4(x),$$

af hvilka enhvar är kontinuerlig för $x = x_0$, kunna vi åter uppfatta denna såsom en produkt af endast två faktorer, nämligen $u_1(x)\,u_2(x)\,u_3(x)$ och $u_4(x)$. Den första faktorn är kontinuerlig enligt hvad just bevisats och $u_4(x)$ är det enligt antagandet. På grund af den ofvan bevisade satsen är produkten af dessa två faktorer då äfven kontinuerlig,

och vår sats är härmed bevisad för en produkt af fyra funktioner.

Satsen utsträckes härefter till en produkt af fem funktioner, i det vi sammanfatta fyra faktorer till en enda, därefter till en produkt af sex funktioner, o. s. v. För att bevisa dess allmängiltighet, synes det således som om vi vore tvungna att upprepa vårt bevisförfarande oändligt många gånger.

Emellertid kan hela denna oändliga kedja af likartade bevis sammanfattas i ett enda, i det vi ådagalägga att, *om vår sats är riktig för en produkt af n funktioner, gäller den äfven för en produkt af $n+1$ funktioner,* hvarvid n kan vara hvilket som helst af talen $2, 3, 4, \ldots\ldots$

Vi betrakta således produkten

$$(21) \qquad u_1(x)\, u_2(x) \cdots u_n(x)\, u_{n+1}(x),$$

där hvarje faktor antages kontinuerlig för $x = x_0$. Densamma kan uppfattas såsom en produkt af endast två faktorer, nämligen $u_1(x)\, u_2(x) \cdots u_n(x)$ och $u_{n+1}(x)$. Den förra af dessa faktorer är kontinuerlig för $x = x_0$ emedan vi antaga vår sats riktig för en produkt af n faktorer, den senare faktorn $u_{n+1}(x)$ har direkt antagits kontinuerlig för $x = x_0$. Då vi nu tidigare ådagalagt att en produkt af tvenne kontinuerliga funktioner själf är kontinuerlig, är härmed bevisadt att produkten (21) är kontinuerlig för $x = x_0$. Vår sats är således riktig för en produkt af $n+1$ faktorer om den är riktig för en produkt af n faktorer, h. s. b.

Vi sluta ur detta bevis att den betraktade satsen gäller allmänt, antalet faktorer må vara hvilket som helst. Ty vi ha tidigare direkt ådagalagt dess giltighet för en produkt af två faktorer. Men då den gäller för två faktorer, är den, enligt ofvanstående bevis, äfven riktig för $2+1$, d. v. s. tre faktorer, då den är riktig för tre faktorer är den, enligt samma bevis, äfven riktig för $3+1$, d. v. s. fyra faktorer, o. s. v. Den gäller sålunda för hvarje antal n faktorer, ty hvarje positivt helt tal n erhålles genom successiv addition af enheter.

Den bevismetod af hvilken vi här gjort bruk benämnes *fullständig induktion*, eller äfven, med afseende å resoneman-

gets form, *bevis från n till n + 1*. Denna metod är af en så ingripande betydelse för hela Analysen, att den kan betecknas såsom en af dess logiska grundvalar. Exempelvis har man gång efter annan att stödja sig på fullständig induktion, då det gäller att logiskt bevisa allmängiltigheten af räknelagarna för hela tal.

5⁰. För en kvot af två funktioner gäller satsen:

Om funktionerna $u(x)$ *och* $v(x)$ *äro kontinuerliga för argumentvärdet* x_0, *är kvoten* $\frac{u(x)}{v(x)}$ *det äfven, förutsatt att nämnaren* $v(x)$ *icke försvinner för* $x = x_0$.

Man har, med bibehållande af den tidigare använda beteckningen,

$$\Delta\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0) + \Delta u}{v(x_0) + \Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}$$
$$= \frac{v(x_0)\,\Delta u - u(x_0)\,\Delta v}{v(x_0)\,(v(x_0) + \Delta v)},$$

hvaraf vi, enligt reglerna för kalkyl med olikheter, sluta

$$\left|\Delta\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right| \leq \frac{|v(x_0)|\,|\Delta u| + |u(x_0)|\,|\Delta v|}{|v(x_0)| \cdot \big||v(x_0)| - |\Delta v|\big|}.$$

Vi skola visa att högra membrum kan göras $< \varepsilon$ genom att $|\Delta x|$ väljes tillräckligt litet. För detta ändamål bestämma vi först ett positivt tal δ_0 så att t. ex.

$$|\Delta v| < \frac{|v(x_0)|}{2} \quad \text{för} \quad |\Delta x| < \delta_0,$$

hvilket är möjligt då, enligt antagandet, $v(x_0)$ är olika noll och $v(x)$ kontinuerlig för $x = x_0$. Ur denna olikhet följer

$$\big||v(x_0)| - |\Delta v|\big| > |v(x_0)| - \frac{|v(x_0)|}{2} = \frac{|v(x_0)|}{2}$$

och således

$$\left|\Delta\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right| \leqq \frac{2}{|v(x_0)|^2}\left(|v(x_0)||\Delta u| + |u(x_0)||\Delta v|\right),$$

där likhetstecknet gäller blott om summan inom parentes har värdet 0. På grund af de betraktade funktionernas kontinuitet kunna vi vidare välja tvenne sådana positiva tal, δ_1 och δ_2, att

$$\frac{2}{|v(x_0)|}|\Delta u| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{för} \quad |\Delta x| < \delta_1,$$

$$2\frac{|u(x_0)|}{|v(x_0)|^2}|\Delta v| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{för} \quad |\Delta x| < \delta_2.$$

Om vi med δ beteckna det minsta af talen $\delta_0, \delta_1, \delta_2$, är då

$$\left|\Delta\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right| < \varepsilon \quad \text{för} \quad |\Delta x| < \delta,$$

hvarmed satsen är bevisad.

Då tidigare bevisats att ett polynom är kontinuerligt för alla argumentvärden, kunna vi ur ofvanstående sats omedelbart sluta att *en rationell funktion*

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

är kontinuerlig för hvarje värde x för hvilket nämnaren är skild från noll.

Ur samma sats sluta vi vidare att funktionen

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

är kontinuerlig för alla värden x med undantag af de värden för hvilka $\cos x$ försvinner, d. v. s. $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots,$ samt likaså att funktionen

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

är kontinuerlig utom i punkterna $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, hvilka äro nollställen för $\sin x$.

6⁰. Vi ernå en väsentlig generalisering af de vunna resultaten med hjälp af en allmän sats om sammansatta funktioners kontinuitet. Vi hafva först att precis definiera begreppet *sammansatt funktion*, hvarom i slutet af n⁰ 2 redan i förbigående talats.

Vi betrakta en funktion af variabeln x, $\varphi(x)$, som är entydigt definierad inom en viss intervall (a, b), samt en funktion af en annan variabel y, $f(y)$, hvilken är entydigt definierad för de värden y som ligga inom en viss annan intervall (A, B). Vi antaga att hvarje värde som funktionen $\varphi(x)$ antar inom intervallen (a, b) ligger mellan gränserna A och B.

Om vi då mellan variablerna x och y uppställa beroendet

$$y = \varphi(x),$$

öfvergår $f(y)$ i en funktion af x, som kan betecknas

$$f(\varphi(x)),$$

och hvilken är entydigt definierad inom intervallen (a, b). Ty mot ett gifvet värde x_0 mellan a och b svarar, enligt vårt antagande, ett bestämdt värde $y_0 = \varphi(x_0)$ som ligger mellan A och B, och mot detta värde y_0 svarar åter ett bestämdt värde af funktionen $f(y)$:

$$f(y_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Mot hvarje värde x inom (a, b) svarar således ett fullt bestämdt värde af funktionen $f(\varphi(x))$.

Denna funktion säges vara *sammansatt* af funktionerna f och φ; f är den *yttre*, φ den *inre* funktionen.

Då exempelvis funktionen $\operatorname{Log} y$ är definierad för $y > 0$, och då funktionen $y = \sin x$ antar positiva värden inom enhvar af intervallerna

$$2n\pi < x < (2n + 1)\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

utgör Log sin x en sammansatt funktion af x som är entydigt definierad inom dessa samma intervaller.

Vi bevisa nu följande sats, i det vi bibehålla de ofvan införda antagandena och beteckningarna:

Om funktionen $\varphi(x)$ är kontinuerlig för $x = x_0$ och funktionen $f(y)$ för $y = y_0$, där $y_0 = \varphi(x_0)$, är den sammansatta funktionen $f(\varphi(x))$ kontinuerlig för $x = x_0$.

Vi gifva x ett nytt värde $x_0 + \Delta x$ inom intervallen (a, b). Funktionen $y = \varphi(x)$ antar då ett bestämdt värde

$$\varphi(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y,$$

hvilket ligger mellan A och B, och den sammansatta funktionen $f(\varphi(x))$ får således ett fullt bestämdt värde $f(y_0 + \Delta y)$. Mot tillväxten Δx af variabeln x svarar sålunda tillväxten

$$\Delta f(\varphi(x)) = f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)$$

af den sammansatta funktionen.

Då nu $f(y)$ är kontinuerlig för $y = y_0$, finnes det ett sådant positivt tal δ att

$$|f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)| < \varepsilon \quad \text{för} \quad |\Delta y| < \delta.$$

Men $\Delta y = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ och funktionen $\varphi(x)$ är enligt antagandet kontinuerlig för $x = x_0$. Det finnes således ett positivt tal δ' sådant att

$$|\Delta y| < \delta \quad \text{om} \quad |\Delta x| < \delta'.$$

Genom kombination af dessa olikheter sluta vi att

$$|\Delta f(\varphi(x))| < \varepsilon \quad \text{så snart} \quad |\Delta x| < \delta',$$

hvarmed satsen är bevisad.

Ur denna sats följer t. ex. att funktionerna

$$(\sin x)^n, \ \sin(x^n), \ \sin(\cos x),$$

om n är ett positivt helt tal, äro kontinuerliga för hvarje

argumentvärde, att funktionen $\sin\frac{1}{x}$ är kontinuerlig för hvarje värde utom $x=0$, samt att funktionens

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

kontinuitet upphör endast i punkten $x=-1$, där den inre funktionen $\frac{x-1}{x+1}$ blir oändlig, samt i de punkter där värdet af $\frac{x-1}{x+1}$ sammanfaller med något af de värden, $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, för hvilka tangenten blir oändlig, d. v. s. i punkterna

$$x=\frac{1+(2n+1)\frac{\pi}{2}}{1-(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att funktionen $\sqrt{x}$ är kontinuerlig för hvarje positivt värde x.

2) Undersök på geometrisk väg kontinuiteten af funktionerna $\arcsin x$ och $\operatorname{arc\,tang} x$.

3) Undersök följande funktioner med afseende å deras kontinuitet:

$$x\sin\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-2\cos x}, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

10. **Några satser om polynom.** — Vi påminna först om följande elementära sats, som är af grundläggande betydelse för ekvationsläran.

Om polynomet

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

där $a_0\neq 0$, *antar värdet* 0 *för* $x=x_1$, *är det jämnt divisibelt med* $x-x_1$, *d. v. s. man har identiskt*[1])

$$f(x)=(x-x_1)f_1(x), \tag{22}$$

[1]) En likhet, i hvilken ingå variabla kvantiteter, säges äga rum *identiskt,* om den består för alla värden af dessa kvantiteter.

hvarvid $f_1(x)$ *är ett polynom af graden* $n-1$ *som börjar med termen* $a_0 x^{n-1}$.

Bland de olika bevisen för denna sats är följande af FERMAT angifna måhända det enklaste.

Vi göra i polynomet $f(x)$ substitutionen $x = x_1 + h$, hvaraf $h = x - x_1$, samt utveckla hvarje potens $x^k = (x_1 + h)^k$ enligt vanliga multiplikationsregler. Härvid erhålles $(x_1 + h)$ = ett polynom af graden k med afseende å h, i hvilket koefficienten för h^k är 1 och den af h oberoende termen är x_1^k. Alltså öfvergår $f(x) = f(x_1 + h)$ i ett polynom af n^{te} graden, där termen med h^n, som erhålles endast ur den första termen $a_0(x_1 + h)^n$ i $f(x_1 + h)$, har till koefficient a_0, och där den af h oberoende termen är lika med summan

$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n,$$

d. v. s. lika med $f(x_1)$. Vi kunna således skrifva

$$f(x_1 + h) = a_0 h^n + b_1 h^{n-1} + b_2 h^{n-2} + \cdots + b_{n-1} h + f(x_1)$$
$$= f(x_1) + h(a_0 h^{n-1} + b_1 h^{n-2} + \cdots + b_{n-1}),$$

där $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ äro vissa konstanta koefficienter, hvilka vi här icke behöfva uträkna.

I den erhållna identiska likheten ersätta vi åter h med $x - x_1$ och således $x_1 + h$ med x. Då hvarje potens $h^k = (x - x_1)^k$ ånyo utvecklas genom vanlig multiplikation, öfvergår uttrycket $(a_0 h^{n-1} + b_1 h^{n-2} + \cdots + b_{n-1})$ i ett polynom $f_1(x)$ af $(n-1)^{sta}$ graden i x, där koefficienten för x^{n-1} är a_0. Alltså erhålles

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f_1(x). \tag{23}$$

Detta resultat gäller oberoende af hvilket värde x_1 har. Välja vi speciellt för x_1 ett sådant värde att $f(x_1) = 0$, reducerar sig (23) till (22), hvarmed vår sats är bevisad.

Ett annat bevis för denna sats grundar sig på den tidigare använda identiteten (20) s. 46. Vi bilda skillnaden

$f(x) - f(x_1)$, där x_1 till en början åter är ett godtyckligt värde. Då subtraktionen utföres term för term, erhålles

$$f(x) - f(x_1)$$

$$= a_0 (x^n - x_1^n) + a_1 (x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + a_{n-1} (x - x_1).$$

Vi tillämpa nu nämnda identitet på hvarje term i högra membrum och finna härvid, då faktorn $x - x_1$ utbrytes,

(23)' $$f(x) - f(x_1)$$

$$= (x - x_1)(a_0 x^{n-1} + a'_1 x^{n-2} + \cdots + a'_{n-1}),$$

där koefficienterna $a'_1, \ldots, a'_{n-1}$ hafva värdena

$$a'_1 = a_0 x_1 + a_1,$$

$$a'_2 = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,$$

$$a'_3 = a_0 x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a'_{n-1} = a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x_1 + a_{n-1}.$$

Likheten (23)' är densamma som (23), men vi hafva här tillika erhållit värdena för koefficienterna i polynomet $f_1(x)$.

Regeln för polynoms division ger oss slutligen ett tredje bevis för ifrågavarande sats. Vi dividera $f(x)$ med $x - x_1$, och fortsätta divisionen tills vi komma till en rest R som icke beror af x och således innehåller endast x_1 samt polynomets koefficienter. Kvoten är då ett polynom $f_1(x)$ af graden $n - 1$ med $a_0 x^{n-1}$ såsom första term. Resten R har erhållits genom att från dividenden $f(x)$ successivt subtraherats produkterna af divisorn $x - x_1$ och de olika termerna i kvoten $f_1(x)$, och vi hafva således

$$f(x) - (x - x_1) f_1(x) = R,$$

hvilken likhet består identiskt, d. v. s. för hvarje värde x. Sätta vi speciellt $x = x_1$, reducerar sig venstra membrum till $f(x_1)$. Resten R, hvilken som sagdt icke beror af x, har således värdet $f(x_1)$, och vi återfinna följaktligen likheten (23).

Om polynomet $f(x)$ försvinner för x_1 och dessutom för ett annat värde x_2, är enligt (22) $(x_2 - x_1) f_1(x_2) = 0$. Då $x_2 - x_1 \neq 0$, följer härur att $f_1(x_2) = 0$, ty *en produkt är noll blott om någon af dess faktorer är noll.* Polynomet $f_1(x)$ antar således värdet 0 för $x = x_2$ och kan följaktligen, enligt ofvan bevisade sats, skrifvas under formen $(x - x_2) f_2(x)$, där $f_2(x)$ är ett polynom af graden $n-2$ med a_0 såsom koefficient för x^{n-2}. I detta fall är således

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x).$$

Om $f(x)$ försvinner för ett tredje värde x_3, skildt från x_1 och x_2, inser man på samma sätt att ur $f_2(x)$ kan utbrytas faktorn $(x - x_3)$, och genom att fortgå på detta sätt finner man att, om polynomet $f(x)$ försvinner för $n-1$ olika värden, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, det kan skrifvas under formen

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) f_{n-1}(x),$$

där $f_{n-1}(x)$ är ett polynom af formen $a_0 x + b$.

Om $f(x)$ försvinner ännu för ett värde x_n som är olika de föregående, måste man hafva $f_{n-1}(x_n) = a_0 x_n + b = 0$, hvaraf följer $b = -a_0 x_n$, $f_{n-1}(x) = a_0(x - x_n)$, och således

$$(24) \qquad f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Ur denna framställningsform för polynomet $f(x)$ sluta vi att detsamma icke försvinner för något värde x som är olika $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ty för ett sådant värde är hvarje faktor i högra membrum af (24) olika noll och således äfven deras produkt skild från noll. Alltså:

Ett polynom af graden n kan icke försvinna för flere än n olika värden af argumentet.

Hvarje polynom af n^{te} graden med afseende å x, som antar värdet 0 för n olika värden, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kan skrifvas under formen (24), där a_0 är en konstant som är lika med koefficienten för x^n i det gifna polynomet.

Ur förra delen af denna sats följer korollariet:

Om tvenne polynom, $\varphi(x)$ och $\psi(x)$, hvilkas gradtal äro $\leqq n$, till sitt värde öfverensstämma för $n+1$ eller flere sinsemellan olika argumentvärden, äro dessa polynom identiska, d. v. s. de äro af samma grad och deras motsvarande koefficienter äro lika.

Ty i motsatt fall vore skillnaden $\varphi(x) - \psi(x)$ antingen en från 0 skild konstant eller ett polynom hvars grad vore $\leqq n$. Emellertid försvinner denna skillnad, enligt vårt antagande, för åtminstone $n+1$ olika värden x, och vi stöta således i hvartdera fallet på en motsägelse.

De ofvan anförda satserna och bevisen gälla utan någon förändring om de däri ingående kvantiteterna hafva *komplexa* värden, d. v. s. värden af formen $a + ib$, där a och b äro reella tal och där symbolen i är definierad genom likheten $i^2 = -1$. Ty i bevisen hafva vi stödt oss uteslutande på reglerna för de fyra enkla räknesätten samt på satsen att en produkt försvinner blott om en faktor är noll, och denna sats och dessa regler bibehålla sin giltighet för komplexa tal. Sedan vi i sista kapitlet af denna lärobok bevisat att, inom det utvidgade talområde som omfattar alla reella och komplexa tal, hvarje polynom försvinner för åtminstone ett värde af variabeln, eller, annorlunda uttryckt, att hvarje algebraisk ekvation har åtminstone en rot, hvilken sats går under namn af *Algebrans fundamentalsats*, kunna vi således af de ofvan bevisade resultaten sluta, att hvarje polynom af n^{te} graden på ett och ett enda sätt kan upplösas i en produkt af formen (24), där a_0 är koefficienten för x^n och där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ äro reella eller komplexa tal, hvilka icke alla behöfva vara olika. Vi återkomma längre fram utförligt till dessa frågor.

Här vilja vi ännu bevisa följande viktiga sats om polynom, i det vi åter inskränka oss till det reella talområdet:

Hvarje algebraisk ekvation af udda grad med reella koefficienter har åtminstone en reell rot.

Vi betrakta således ett polynom med reella koefficienter

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \quad (a_0 \neq 0),$$

hvars gradtal n är ett *udda* tal, och vilja bevisa att det finnes åtminstone ett reellt argumentvärde för hvilket detta polynom antar värdet 0.

För detta ändamål skrifva vi $f(x)$ under formen

$$(25) \qquad f(x) = a_0 x^n [1 + \varphi(x)],$$

där $\varphi(x)$ betecknar uttrycket

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n},$$

och visa främst att $|\varphi(x)|$ är mindre än 1, och således summan $1 + \varphi(x)$ positiv, så snart $|x|$ öfverskrider en viss gräns.

Om vi med M beteckna det största af talen $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots,$ $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$, erhålles

$$|\varphi(x)| \leqq \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \left|\frac{1}{x}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \left|\frac{1}{x}\right|^n$$

$$\leqq M\left(\left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{x}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{1}{x}\right|^n\right).$$

Men man har (jmf. identiteten (20) s. 46)

$$\left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{x}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{1}{x}\right|^n = \left|\frac{1}{x}\right|\left(1 - \left|\frac{1}{x}\right|^n\right) : \left(1 - \left|\frac{1}{x}\right|\right),$$

hvilket uttryck, om $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ eller $|x| > 1$, är mindre än

$$\left|\frac{1}{x}\right| : \left(1 - \left|\frac{1}{x}\right|\right) = \frac{1}{|x| - 1}.$$

För $|x| > 1$ är således

$$|\varphi(x)| < \frac{M}{|x| - 1},$$

och vi erhålla följaktligen $|\varphi(x)| < 1$ om vi ytterligare pålägga x villkoret

$$\frac{M}{|x| - 1} \leqq 1 \text{ eller } |x| \geqq M + 1.$$

Då detta i sig innefattar det tidigare villkoret $|x|>1$, se vi att olikheten $|\varphi(x)|<1$ säkert är uppfylld om $|x|\geqq M+1$, d. v. s. om $x\geqq M+1$ eller $x\leqq-(M+1)$. För alla dessa värden x är således summan $1+\varphi(x)$ positiv.

Enligt (25) följer härur till en början att $f(x)\neq 0$ om $|x|\geqq M+1$; med andra ord, *om ekvationen* $f(x)=0$ *öfverhufvud har reella rötter, ligga dessa mellan gränserna* $-(M+1)$ *och* $M+1$. Detta resultat gäller oberoende af om talet n är jämnt eller udda.

Om n är udda, kunna vi vidare sluta ur (25), då x^n i detta fall ändrar tecken samtidigt med x, att polynomet $f(x)$ har motsatta tecken för $x=-(M+1)$ och för $x=M+1$. Men ett polynom är, såsom vi bevisat, kontinuerligt för hvarje argumentvärde, och en kontinuerlig funktion kan icke ändra tecken utan att gå genom 0. Alltså finnes det mellan $-(M+1)$ och $M+1$ åtminstone ett värde för hvilket det betraktade polynomet antar värdet 0, h. s. b.

fningsuppgifter:

1) Hvilket är det polynom af tredje graden som försvinner för $x=-3,\ 0,7$ och antar värdet -6 för $x=1$?

2) Rötterna till ekvationen

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

må betecknas med x_1, x_2, x_3. Hvilka relationer äga rum mellan dessa rötter och ekvationens koefficienter? Generalisera resultatet till en ekvation af n^{te} graden.

3) Bilda ett polynom $f(x)$ af lägsta möjliga grad som uppfyller villkoren

$$f(-1)=-2,\ f(0)=-1,\ f(1)=-2,\ f(2)=1.$$

11. **Lagrange's interpolationsformel**. — Vi ställa oss uppgiften att bilda ett polynom af så låg grad som möjligt som för n olika argumentvärden

(26) $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

antar föreskrifna värden

(27) $$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$$

Vi lösa först det enklare problemet att finna ett polynom $f_1(x)$ af lägsta möjliga grad, som för $x=x_1$ antar värdet A_1 och för $x=x_2, x_3, \ldots, x_n$ värdet 0. Enligt satsen s. 59—60 är det sökta polynomet af graden $n-1$ och kan skrifvas under formen

$$C(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n),$$

där C är en konstant. Denna bör bestämmas så att uttrycket antar värdet A_1 för $x=x_1$, d. v. s. att

$$C(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)=A_1,$$

hvaraf följer

$$C=\frac{A_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}.$$

Det sökta polynomet är således

$$f_1(x)=A_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}.$$

Vi konstruera på detta sätt, för hvart och ett af värdena $\nu=1,2,\ldots,n$, det polynom $f(x)$ af graden $n-1$ som för $x=x_\nu$ antar det föreskrifna värdet A_ν och försvinner för alla öfriga värden (26), samt bilda härefter summan af alla dessa polynom:

$$\mathfrak{L}(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x),$$

eller, fullständigt utskrifvet,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(x)=A_1&\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\\ +A_2&\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\\ +&\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +A_n&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned} \tag{28}$$

Detta uttryck $\mathfrak{L}(x)$ ger oss, då de betecknade operationerna utföras, ett polynom af x, hvars gradtal säkert icke öfverstiger $n-1$, men väl, i speciella fall, kan vara mindre än $n-1$, då det ju kan hända att vid additionen termer taga ut hvarandra.

Man öfvertygar sig nu omedelbart om att detta polynom $\mathfrak{L}(x)$ för argumentvärdena (26) verkligen antar de föreskrifna värdena (27). Ty för $x=x_1$ är $f_1(x)=A_1$ medan $f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x)$ alla äro noll, hvaraf följer $\mathfrak{L}(x_1)=A_1$; för $x=x_2$ är $f_2(x)=A_2$ medan alla öfriga funktioner $f_\nu(x)$ försvinna, hvaraf $\mathfrak{L}(x_2)=A_2$; o. s. v.

Ur det s. 60 bevisade korollariet följer vidare, att hvarje polynom som för argumentvärdena (26) antar de föreskrifna värdena (27), om det icke är identiskt med $\mathfrak{L}(x)$, är åtminstone af graden n och således af högre grad än $\mathfrak{L}(x)$.

Lösningen till den uppgift vi ställt oss i början af denna paragraf utgöres således af polynomet $\mathfrak{L}(x)$. *Detta är det enda polynom som uppfyller de gifna villkoren och hvars gradtal är lägre än n.*

Beräkningen af polynomet $\mathfrak{L}(x)$ ställer sig något enklare om vi först söka skillnaden $\mathfrak{L}(x)-A_1$. Denna antar för de gifna argumentvärdena (26) värdena

$$0,\ A_2-A_1,\ A_3-A_1, \ldots, A_n-A_1;$$

då vi tillämpa formeln (28), försvinner således den första termen i högra membrum och vi erhålla

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(x)-A_1 = (A_2-A_1)\,&\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\\ &+\cdots\cdots\cdots\\ &+(A_n-A_1)\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned}$$

Liknande uttryck erhållas för $\mathfrak{L}(x)-A_2, \mathfrak{L}(x)-A_3$, o. s. v.

För att bilda $\mathfrak{L}(x)$ kan man äfven använda den s. k. *metoden med obestämda koefficienter*, i det man uppskrifver ett allmänt polynom af $(n-1)$:sta graden,

$$a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1},$$

och bestämmer dess koefficienter så att detsamma för argumentvärdena (26) antar de föreskrifna värdena (27). Dessa villkor gifva oss följande n lineära ekvationer mellan de n obekanta $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$:

$$\begin{cases} a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x_1 + a_{n-1} = A_1, \\ a_0 x_2^{n-1} + a_1 x_2^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x_2 + a_{n-1} = A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_0 x_n^{n-1} + a_1 x_n^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x_n + a_{n-1} = A_n. \end{cases}$$

Enligt hvad ofvan bevisats, äro vi säkra om att detta ekvationssystem ger oss fullt bestämda värden för koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Detta kan äfven direkt ådagaläggas med stöd af den allmänna teorin för lineära ekvationssystem.

Det ofvan sagda finner en viktig tillämpning vid lösningen af *interpolationsproblemet*, hvilket kan formuleras som följer:

Man känner värdena af en funktion $f(x)$ för vissa argumentvärden, $x_1, x_2, \ldots, x_n$; det gäller att härur, så noggrant sig göra låter, beräkna funktionens värde för ett annat argumentvärde x [1]).

I naturvetenskaperna står man alltid inför detta problem då det gäller att ur observationerna härleda det värde en föränderlig kvantitet antar under föreskrifna betingelser. Men äfven i matematiken ställer sig ofta samma uppgift, nämligen i de fall då den gifna funktionen $f(x)$ är så komplicerad att beräkningen af ett enskildt funktionsvärde erfordrar vidlyftiga kalkyler. Har man ofta att göra bruk af funktionen i fråga, såsom t. ex. är fallet med logaritmen och de trigonometriska funktionerna, är det lämpligt att en gång för alla *tabulera* densamma, d. v. s. att beräkna funktionens värden för en följd argumentvärden och sammanställa dem i en tabell. Nämnda argumentvärden väljas härvid i allmänhet *ekvidistanta*, d. v. s. så att differensen mellan två på

---

[1]) Ligger detta värde x mellan det största och det minsta af värdena $x_1, \ldots, x_n$, säger man att det sökta funktionsvärdet erhålles genom *interpolation*, i motsatt fall genom *extrapolation*.

hvarandra följande värden är konstant. Sedan en dylik tabell uppgjorts, kan man medels interpolation därur approximativt beräkna funktionen för argumentvärden som ligga mellan de i tabellen upptagna. Resultatets noggrannhet beror dels af funktionens förlopp, som kan vara mer eller mindre regelbundet, dels af huru tät tabellen konstruerats, d. v. s. huru liten differensen valts mellan två på hvarandra följande argumentvärden, dels af den använda interpolationsmetodens noggrannhet.

Själfva interpolationsförfarandet består, teoretiskt sedt, däri att den gifna funktionen $f(x)$ inom en viss intervall ersättes med en annan funktion, $f_1(x)$, hvilken med tillräcklig noggrannhet ansluter sig till densamma och, å andra sidan, är till sin form så enkel att dess värde med lätthet kan beräknas för hvarje föreskrifvet argumentvärde.

Det ligger härvid närmast till hands att såsom interpolationsfunktion $f_1(x)$ välja ett *polynom*, samt att bestämma detta polynom så att det till sitt värde öfverensstämmer med $f(x)$ i vissa af de punkter i hvilka denna funktions värden äro kända [1]).

Vi ledas således till problemet att bestämma ett så enkelt polynom som möjligt, som för vissa gifna argumentvärden, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, antar samma värden som funktionen $f(x)$. Men detta problem är identiskt med det vi ofvan behandlat, och dess lösning utgöres af polynomet [2])

$$(29)\qquad \mathfrak{L}(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots\cdots + f(x_n)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

---

[1]) En annan interpolationsmetod, som har en viktig användning i fysiken och särskildt lämpar sig för undersökning af periodiska företeelser, är den s. k. *harmoniska analysen*, hvilken grundar sig på användningen af trigonometriska funktioner.

[2]) Beräkningen af $\mathfrak{L}(x)$ ställer sig enklare om man först uträknar någon af differenserna $\mathfrak{L}(x) - f(x_\nu)$ (jmf. s. 64).

Formeln (29), hvilken benämnes LAGRANGE's *interpolationsformel*, har en synnerligen vidsträckt användning i matematiken. För praktiska ändamål omgestaltas den på flere olika sätt, för hvilka vi emellertid här icke kunna redogöra.

Geometriskt representerar ekvationen $y = f(x)$ en kurva, af hvilken vi antaga såsom gifna de punkter som svara mot abskissorna $x_1, x_2, .., x_n$, och ekvationen $y = \mathfrak{L}(x)$ representerar en annan kurva som går genom dessa samma punkter. Interpolationen består däri att den förra kurvan ersättes med den senare, och felet i interpolationsresultatet utgöres af skillnaden $f(x) - \mathfrak{L}(x)$ mellan kurvornas ordinator. I differentialkalkylen visas huru man kan uppskatta storleken af detta fel då man känner den gifna funktionens egenskaper.

Om $n = 1$, hafva vi tvenne argumentvärden, x_1 och x_2, och motsvarande funktionsvärden, $f(x_1)$ och $f(x_2)$. Formeln (29) ger oss i detta fall

$$\mathfrak{L}(x) = f(x_1)\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2},$$

hvilket ännu kan skrifvas

$$\mathfrak{L}(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Såsom synes, representerar ekvationen $y = \mathfrak{L}(x)$ den räta linie som sammanbinder de mot abskissorna x_1 och x_2 svarande punkterna af kurvan $y = f(x)$. Interpolationen består således i detta fall däri att kurvan ersättes med en sekant, d. v. s. den utgör en s. k. *lineär* interpolation, hvarom vi redan tidigare talat.

För $n = 2$ är polynomet $\mathfrak{L}(x)$ i regel af andra graden, och kurvan $y = \mathfrak{L}(x)$ representerar en parabel hvars axel är parallell med y-axeln. I detta fall ersätta vi således kurvan $y = f(x)$ med en dylik parabel, hvilken går genom de tre punkter af kurvan som motsvara argumentvärdena x_1, x_2, x_3.

Öfningsuppgifter:

1) Lös uppgiften 3) s. 62 medels de olika metoder som ofvan angifvits.

2) Bilda det polynom af andra graden hvilket antar samma värden som funktionen $f(x)$ för $x = a, a + h, a + 2h$.

3) Bestäm medels interpolation värdet af den Briggska logaritmen för talet 10,3, utgående från logaritmerna för talen 9, 10 och 11.

4) Bilda de två polynom af lägsta möjliga grad som öfverensstämma med funktionen $\cos \pi x$, det ena för värdena $x = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$, det andra för värdena $x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, samt undersök huru noggrant dessa polynom ansluta sig till $\cos \pi x$ inom intervallen $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Upprita i ett och samma koordinatsystem de kurvor som representera $\cos \pi x$ och det första af nämnda polynom.

5) Hvilket närmevärde erhålles för den rot till ekvationen

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0$$

som ligger mellan 0 och $\frac{1}{2}$, om polynomet $f(x)$ inom denna intervall ersättes med det polynom af andra graden som för $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ öfverensstämmer med $f(x)$ (jmf. kalkylerna s. 28)?

12. **Newtons binomialteorem.** — Om vi enligt vanliga multiplikationsregler utveckla potensen

$$(a + b)^n,$$

där exponenten n är ett positivt helt tal, till ett polynom, är hvarje term som härvid erhålles af n^{te} graden med afseende å a och b, och resultatet har således formen

$$(30) \quad (a+b)^n = C_n^{(0)} a^n + C_n^{(1)} a^{n-1} b + C_n^{(2)} a^{n-2} b^2 + \cdots \\ + C_n^{(k)} a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{(n-1)} a b^{n-1} + C_n^{(n)} b^n,$$

där koefficienterna C äro numeriska konstanter. Man ser omedelbart att dessa s. k. *binomialkoefficienter* äro positiva hela tal, samt att för hvarje värde n

$$C_n^{(0)} = C_n^{(n)} = 1.$$

Beträffande beteckningen[1]) bör observeras, att undre index n i koefficienten $C_n^{(k)}$ är lika med binomets exponent, medan

[1]) I stället för $C_n^{(k)}$ användes äfven beteckningen $\binom{n}{k}$.

öfre index k öfverensstämmer med exponenten för b i den term till hvilken koefficienten i fråga hör.

Det gäller att verkligen beräkna koefficienterna i utvecklingen (30).

Vi anmärka först att, om ifrågavarande koefficienter äro kända för en viss exponent n, man därur alldeles enkelt erhåller koefficienterna i utvecklingen af potensen $(a+b)^{n+1}$, alltså koefficienterna

$$(31)\qquad C_{n+1}^{(0)},\ C_{n+1}^{(1)},\ C_{n+1}^{(2)},\ldots,\ C_{n+1}^{(k)},\ldots,\ C_{n+1}^{(n)},\ C_{n+1}^{(n+1)}.$$

Ty nämnda potens är lika med produkten af $(a+b)^n$ och $(a+b)$, och dess utveckling kan följaktligen äfven bildas sålunda att högra membrum af (30) multipliceras med $a+b$. Då denna multiplikation utföres och resultatet ordnas efter fallande potenser af a, erhållas för de successiva termernas koefficienter uttrycken

$$(32)\qquad C_n^{(0)},\ C_n^{(0)}+C_n^{(1)},\ C_n^{(1)}+C_n^{(2)},\ldots,\ C_n^{(k-1)}+C_n^{(k)},\ldots\ldots,$$
$$C_n^{(n-1)}+C_n^{(n)},\ C_n^{(n)}.$$

Men på hvilket sätt man än utvecklar $(a+b)^{n+1}$ måste man erhålla identiskt samma polynom. Ty antag att vi på en väg kommit till polynomet $P_1(a,b)$, på en annan väg till polynomet $P_2(a,b)$. Vi hafva då, för alla möjliga värden af kvantiteterna a och b,

$$(a+b)^{n+1}=P_1(a,b),\quad (a+b)^{n+1}=P_2(a,b),$$

och följaktligen $P_1(a,b)=P_2(a,b)$. Om vi gifva b ett bestämdt värde, t. ex. $b=1$, utgöra således $P_1(a,1)$ och $P_2(a,1)$ polynom af a hvilka *till sitt värde* öfverensstämma för hvarje värde a. Enligt det s. 60 bevisade korollariet äro dessa polynom då äfven *till formen* identiska, d. v. s. deras motsvarande koefficienter äro lika. Men häraf följer att jämväl polynomen $P_1(a,b)$ och $P_2(a,b)$ äro till formen identiska, h. s. b.

Koefficienterna (31) äro således i ordning lika med uttrycken (32). Om vi undantaga de yttersta af dessa koefficienter, $C_{n+1}^{(0)}$ och $C_{n+1}^{(n+1)}$, hvilka hafva värdet 1, gäller följaktligen för de öfriga *rekursionsformeln*

$$(33) \qquad C_{n+1}^{(k)} = C_n^{(k-1)} + C_n^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sedan koefficienterna i utvecklingen (30) beräknats, erhållas således koefficienterna i utvecklingen af potensen $(a+b)^{n+1}$, utom den första och den sista hvilka äro $=1$, helt enkelt genom att man bildar summorna af två på hvarandra följande koefficienter i utvecklingen (30).

Enligt denna regel kan man, utgående från den första potensen, $a+b$, med största lätthet successivt beräkna binomialkoefficienterna för $n = 2, 3, 4, \ldots.$ Räkningen uppställes bäst i följande schema, kändt under namnet PASCAL's *triangel*:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

Den öfversta siffran 1 är tillsatt för att förfullständiga triangeln; den kan anses motsvara $(a+b)^0$, hvilket uttryck ju tilldelas värdet 1. Talen i andra raden äro koefficienter i $a+b$, i tredje raden stå koefficienterna i utvecklingen af $(a+b)^2$, o. s. v. Hvarje tal i schemat, utom de yttersta talen i hvarje rad hvilka alltid hafva värdet 1, utgör summan af de två närmaste talen i raden ofvanom.

För att erhålla en bestämd binomialkoefficient $C_n^{(k)}$ har man, enligt den ofvan angifna metoden, att först beräkna de

koefficienter hvilkas undre index är $< n$, eller i hvarje fall en stor del af dessa koefficienter. Vi skola nu härleda ett analytiskt uttryck för koefficienten $C_n^{(k)}$, hvilket för hvarje gifvet värdepar n, k omedelbart ger oss värdet af motsvarande koefficient. Detta uttryck följer ur tolkningen af binomialkoefficienterna såsom *kombinationstal*, hvarom vi först böra tala.

Vi härleda utvecklingen af potensen $(a+b)^n$ på ett nytt sätt, i det vi först betrakta en produkt af n olika binomiska faktorer

$$(34) \qquad (a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n).$$

Om vi utveckla denna enligt vanliga multiplikationsregler, ordna resultatet efter fallande digniteter af a och därefter substituera $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$, äro vi säkra om att återfinna polynomet (30), enligt hvad ofvan blifvit framhållet.

Produkten (34) är, såsom vi veta, lika med summan af alla partialprodukter som kunna bildas sålunda, att från hvarje binomisk faktor utväljes en term och dessa n termer hopmultipliceras.

Om vi från hvarje faktor utvälja termen a, erhålles partialprodukten a^n.

Utvälja vi från den ν^{te} faktorn den senare termen b_ν och från alla öfriga faktorer termen a, fås partialprodukten $a^{n-1} b_\nu$. Då åt ν efterhand gifvas värdena $1, 2, \ldots, n$ och motsvarande partialprodukter adderas, erhålles för deras summa uttrycket

$$a^{n-1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = a^{n-1} S(b_1),$$

i det vi för korthetens skull med $S(b_1)$ beteckna summan af talen $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Om vi från tvenne af de binomiska faktorerna, t. ex. $(a+b_\mu)$ och $(a+b_\nu)$, utvälja den senare termen och från alla öfriga faktorer den första termen, utfaller partialprodukten $a^{n-2} b_\mu b_\nu$. Summan af alla analoga partialprodukter kan kort skrifvas $a^{n-2} S(b_1 b_2)$, där med $S(b_1 b_2)$ betecknas summan af produkterna af tvenne bland talen $b_1, b_2, \ldots, b_n$, utvalda på alla möjliga olika sätt.

I det vi fortgå på samma sätt, finna vi att uttrycket (34) kan skrifvas under formen

$$(35)\quad a^n + a^{n-1} S(b_1) + a^{n-2} S(b_1 b_2) + \cdots\cdots$$
$$+ a^{n-k} S(b_1 b_2 .. b_k) + \cdots + b_1 b_2 .. b_n,$$

där vi allmänt med $S(b_1 b_2 ... b_k)$ beteckna summan af produkterna af k bland talen $b_1, b_2, ..., b_n$, utvalda på alla möjliga olika sätt.

Då vi nu sätta alla kvantiteterna $b_1, b_2, .., b_n$ lika med b, blir hvarje term i summan $S(b_1)$ lika med b, hvarje term i summan $S(b_1 b_2)$ lika med b^2, o. s. v. Den andra termen i (35) öfvergår således i uttrycket $a^{n-1}b$ multipliceradt med antalet termer i summan $S(b_1)$, den tredje termen öfvergår i $a^{n-2}b^2$ multipliceradt med antalet termer i $S(b_1 b_2)$, o. s. v.

Nu veta vi att, vid nämnda substitution, uttrycket (35) blir identiskt med högra membrum af likheten (30). Häraf följer att, för hvarje index k, binomialkoefficienten $C_n^{(k)}$ är lika med antalet termer i summan $S(b_1 b_2 ... b_k)$, d. v. s. lika med antalet olika sätt på hvilka man kan utvälja k af de n talen $b_1, b_2, ..., b_n$, eller, kortare, lika med *antalet kombinationer af n olika element, tagna k om k.*

Sedan vi sålunda visat att binomialkoefficienterna äro lika med vissa kombinationstal, gäller det för oss att beräkna dessa sistnämnda.

Vi söka först antalet olika *permutationer* af n element, d. v. s. antalet olika sätt på hvilka n element kunna uppskrifvas i en följd.

Två element, a och b, kunna permuteras endast på två sätt:

$$ab \text{ och } ba.$$

Tillkommer ett tredje element c, kan detta inpassas på tre olika sätt i hvardera af de ofvanstående följderna; ab ger sålunda upphof åt permutationerna

$$abc,\ acb,\ cab,$$

$b\,a$ åt permutationerna

$$b\,a\,c\,,\quad b\,c\,a\,,\quad c\,b\,a\,.$$

Antalet permutationer af tre element är följaktligen sex, eller $= 1 \,.\, 2 \,.\, 3$.

Genom att fortsätta på detta sätt finner man att *antalet permutationer af n olika element är* $= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$. Att detta resultat, hvars riktighet vi kontrollerat för $n = 2$ och för $n = 3$, gäller för hvarje helt tal n, bevisas medels fullständig induktion, och uppmanas läsaren att själf noggrant genomföra beviset (jmf. s. 51).

Produkten $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ benämnes *n-fakultet* och betecknas $n\,!$ eller $\underline{|n}$. Vi använda i denna lärobok den förra beteckningen. Man har sålunda

$$1\,! = 1\,,\ 2\,! = 2\,,\ 3\,! = 6\,,\ 4\,! = 24\,,\ 5\,! = 120\,,\ 6\,! = 720\,, \ldots$$

Om vi hafva n olika element, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, och bland dessa utvälja k element på alla möjliga olika sätt, och om vi vidare i hvarje sådan grupp af k element permutera elementen på alla möjliga olika sätt, erhållas de olika *variationerna* af de gifna elementen, tagna k om k.

Är $k = 1$, d. v. s. taga vi endast ett element i sänder, erhålla vi tydligen n variationer.

Bland de variationer som erhållas då två element i sänder utväljas, finnes det $n - 1$ som hafva ett gifvet element såsom första element, och då hvilket som helst af de n elementen kan väljas till första element, erhålla vi inalles $n(n-1)$ variationer, hvilka vi här uppskrifva:

$$\begin{array}{l}
b_1 b_2\,,\ b_1 b_3\,,\ b_1 b_4\,, \ldots, b_1 b_n\,;\\
b_2 b_1\,,\ b_2 b_3\,,\ b_2 b_4\,, \ldots, b_2 b_n\,;\\
b_3 b_1\,,\ b_3 b_2\,,\ b_3 b_4\,, \ldots, b_3 b_n\,;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\\
b_n b_1\,,\ b_n b_2\,,\ b_n b_3\,, \ldots, b_n b_{n-1}\,.
\end{array}$$

Då vi fortsätta detta resonemang, finna vi att *antalet variationer af n olika element, tagna k om k, är lika med*

$$n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-(k-1))\,.$$

Detta resultats allmängiltighet bevisas åter medels fullständig induktion, i det man antager satsen riktig för ett visst värde $k (< n)$ och bevisar att den då äfven gäller för värdet $k+1$. För $k=n$ är ofvanstående uttryck $=n!$, hvilket äfven kunde förutses, då i detta fall variationer och permutationer äro identiska.

Då k element kunna permuteras på $k!$ olika sätt, kan man indela samtliga variationer af n element, tagna k om k, i grupper, sålunda att hvarje grupp omfattar de $k!$ variationer hvilka innehålla samma element men skilja sig genom elementens ordningsföljd. De till en och samma grupp hörande variationerna betraktas såsom identiska kombinationer, och vi erhålla således antalet olika kombinationer genom att dividera antalet variationer med $k!$, hvaraf det viktiga resultatet:

Antalet kombinationer af n olika element, tagna k om k, är lika med

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

För $k=n$ reducerar sig detta uttryck till $\frac{n!}{n!}=1$, såsom sig bör.

Vi visade tidigare att värdet af binomialkoefficienten $C_n^{(k)}$ är lika med antalet kombinationer af n element, tagna k om k. Enligt ofvanstående sats erhålla vi således för nämnda koefficient det analytiska uttrycket

$$C_n^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots.k}, \tag{36}$$

hvilket för hvarje gifvet värdepar n, k direkt ger oss värdet af $C_n^{(k)}$. Om vi förlänga detta uttryck med $(n-k)!$, kan det skrifvas under den kortare formen

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{36'}$$

Om man i (36)′ ersätter k med $n-k$, hvarvid $n-k$

omvändt öfvergår i k, blir högra membrum oförändradt. Alltså är

$$C_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}.$$

I utvecklingen (30) äro således koefficienterna för $a^{n-k}b^k$ och $a^k b^{n-k}$ desamma, hvilket äfven är klart då a och b ingå symmetriskt i uttrycket $(a+b)^n$.

Om vi öfverenskomma att åt beteckningen $0!$ gifva betydelsen 1, antar högra membrum af likheten (36)′ värdet 1 för $k=0$ och för $k=n$, och likheten gäller således äfven för dessa värden af k.

Med användande af resultatet (36) antar utvecklingen (30) följande form

(37)
$$(a+b)^n =$$
$$a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} a^{n-k} b^k + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 b^{n-2} + n a b^{n-1} + b^n.$$

För att förkorta beteckningen införa vi ett summatecken, Σ, och kunna då, om vi för $C_n^{(k)}$ använda uttrycket (36)′, skrifva

(37)′
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k.$$

I uttrycket som står under summatecknet har man att åt summationsindex k efterhand gifva alla heltaliga värden, från och med det nedtill angifna värdet $k=0$ till och med det ofvanom summatecknet angifna värdet $k=n$, samt att summera alla de sålunda erhållna termerna. För att låta analogin med det följande tydligare framträda, skrifva vi ännu (37)′ under den något förändrade formen

(37)″
$$(a+b)^n = \sum_{\mu+\nu=n} \frac{n!}{\mu!\,\nu!} a^\mu b^\nu,$$

där man under summatecknet bör för μ, ν efterhand insätta alla olika par af hela tal, positiva eller 0, hvilkas summa är $= n$, hvarefter de erhållna uttrycken adderas.

Den ofvan bevisade satsen (37) benämnes NEWTON's *binomialteorem*. Denna sats utsträckes i differentialkalkylen till godtyckliga reella exponenter n, samt i funktionsteorin ytterligare till komplexa värden af a, b, n. I stället för ett polynom uppträder i dessa fall i högra membrum af (37) en oändlig serie, men lagen för koefficienternas bildande är fortfarande densamma.

Vi skola generalisera formeln (37), till en början till en potens af ett trinom:

$$(a + b + c)^n.$$

Då denna potens utvecklas, erhålles en summa af termer hvilka alla hafva formen $A_{\mu,\nu,\sigma}\, a^\mu b^\nu c^\sigma$, där $A_{\mu,\nu,\sigma}$ är en numerisk koefficient, som tydligen är ett positivt helt tal, och exponenterna μ, ν, σ hela tal $\geqq 0$ hvilkas summa är $= n$. För att bestämma koefficientens värde, skrifva vi det gifna uttrycket under formen af en potens af ett binom, i det vi sammanfatta $a + b$ till en term:

$$(a + b + c)^n = \big((a + b) + c\big)^n,$$

samt utveckla denna potens enligt binomialteoremet. Den term i utvecklingen som innehåller c^σ har, enligt (37)″, formen

$$\frac{n!}{\sigma!\,(n-\sigma)!}\,(a + b)^{n-\sigma}\,c^\sigma.$$

Här utveckla vi åter potensen $(a + b)^{n-\sigma}$ enligt binomialteoremet, samt utgripa den term som innehåller $a^\mu b^\nu$. Denna har till koefficient (då man observerar att $n = \mu + \nu + \sigma$)

$$\frac{(n-\sigma)!}{(n-\sigma-\nu)!\,\nu!} = \frac{(n-\sigma)!}{\mu!\,\nu!}.$$

För koefficienten $A_{\mu,\nu,\sigma}$ erhålla vi således värdet

$$A_{\mu,\nu,\sigma} = \frac{n!}{\sigma!\,(n-\sigma)!} \cdot \frac{(n-\sigma)!}{\mu!\,\nu!} = \frac{n!}{\mu!\,\nu!\,\sigma!},$$

och den sökta formeln blir följaktligen

$$(38)\qquad (a+b+c)^n = \sum_{\mu+\nu+\sigma=n} \frac{n!}{\mu!\,\nu!\,\sigma!}\, a^\mu b^\nu c^\sigma,$$

där högra membrum bildas sålunda, att man i uttrycket under summatecknet för μ, ν, σ efterhand insätter alla olika system af hela tal $\geqq 0$ hvilkas summa är $= n$, hvarefter resultaten adderas.

Formlerna (37) och (38) utgöra specialfall af *den allmänna polynomialformeln*:

$$(39)\quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_k=n} \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_k!}\, a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \ldots a_k^{\nu_k},$$

hvilken gäller för alla positiva hela tal n och k. Denna formels allmängiltighet bevisas medels fullständig induktion, och uppmanas läsaren att själf genomföra beviset.

Öfningsuppgifter:

1) Utveckla x^5 i ett polynom ordnadt efter fallande potenser af $(x-2)$, och kontrollera resultatets riktighet genom att utveckla det erhållna polynomet efter potenser af x.

2) Utveckla polynomet $x^7 - x^4 + 1$ efter potenser af $(x+1)$.

3) Utveckla fullständigt $(a+b+c)^n$ för $n = 2, 3, 4$.

4) Beräkna koefficienterna för x^4yz, x^3yz^2 och $x^2y^2z^2$ i utvecklingen af potensen

$$(x - 2y + 3z)^6.$$

5) Härled rekursionsformeln (33) ur likheten (36).

6) Hvilket värde har summan af koefficienterna i utvecklingen (37)?

7) Bevisa att i utvecklingen (37) summan af koefficienterna med jämn ordningsnummer är lika med summan af koefficienterna med udda ordningsnummer.

8) Bland sju gifna element finnas tre som äro sinsemellan lika. Huru många olika permutationer kunna bildas af dessa sju element, och huru många olika variationer och kombinationer erhållas, om elementen tagas 2 om 2, 3 om 3, o. s. v.

9) Bland n gifna element finnes en grupp af μ element hvilka äro $= a$ och en annan grupp af ν element hvilka äro $= b$, medan de öfriga $\lambda = n - \mu - \nu$ elementen äro olika a och b och sig emellan olika. Huru många olika permutationer kunna bildas af dessa n element, och huru många olika kombinationer erhållas, om elementen tagas 2 om 2, 3 om 3, o. s. v.

13. **Exponentialfunktionen.** — Då exponentialfunktionen a^x utgör en af Analysens allra viktigaste funktioner, synes det vara skäl att här påminna om huru dess definition successivt utsträckes till nya värden af variabeln x.

1°. Uttrycket a^x definieras till en början endast för positiva heltaliga värden af x, såsom en förkortad beteckning för en produkt af x faktorer a.

Då multiplikationen äro associativ, d. v. s. då man i en produkt får sammanfatta faktorerna i grupper och multiplicera faktorerna inom hvarje grupp, finner man omedelbart att exponentialfunktionen för heltaliga positiva exponenter har egenskapen

$$(40) \qquad a^{x_1} . a^{x_2} = a^{x_1 + x_2},$$

hvilken benämnes funktionens *additionsteorem.* Allmännare är

$$a^{x_1} . a^{x_2} . a^{x_3} \ldots = a^{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots}$$

för ett godtyckligt ändligt antal faktorer. Sätter man speciellt alla exponenter $= x$ och betecknar faktorernas antal med y, erhålles likheten

$$(41) \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Då multiplikationen är kommutativ, d. v. s. produkten oberoende af faktorernas ordning, har man vidare likheten

$$(42) \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

för hvarje positivt helt tal x.

Enligt reglerna för bråks förkortning erhålles slutligen

$$(43) \qquad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2},$$

om x_1 och x_2 äro positiva hela tal och $x_1 > x_2$.

2°. Denna inskränkning, $x_1 > x_2$, under hvilken likheten (43) tillsvidare gäller, ger oss den första anledningen att utvidga potensbeteckningen och därmed exponentialfunktio-

nens definition. Om $x_1 = x_2$ eller $x_1 < x_2$, har nämligen venstra membrum af nämnda likhet ett fullt bestämdt värde, i förra fallet värdet 1, i senare fallet värdet $\frac{1}{a^{x_2 - x_1}}$, medan högra membrum antar en form som tillsvidare icke har någon betydelse, nämligen i förra fallet formen a^0, i senare fallet formen $a^{-(x_2 - x_1)}$. Vi ernå således att likheten (43) bibehåller sin giltighet jämväl för $x_1 \overline{\leq} x_2$, om vi åt a^0 gifva betydelsen 1 och, för hvarje positivt helt tal x, sätta

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{44}$$

Exponentialfunktionen är härmed definierad för alla heltaliga värden af variabeln, och man konstaterar omedelbart att egenskaperna (40)—(44) gälla om exponenterna äro godtyckliga hela tal, positiva, negativa eller noll.

3°. Nästa utvidgning af exponentialfunktionens definition erbjuder sig då vi gå till den omvända operationen till upphöjandet i dignitet, d. v. s. till rotutdragning.

Vi förutsätta härefter att *exponentialfunktionens bas a är positiv och olika* 1.

Vi betrakta ekvationen

$$x^q = a^p, \tag{45}$$

där p och q äro godtyckliga positiva hela tal. Denna ekvation har en och en enda positiv rot. Ty $x^q - a^p$ är en kontinuerlig funktion, som är negativ för $x = 0$, växer samtidigt med x, och öfverskrider hvarje föreskrifven gräns då x blir tillräckligt stort. Denna funktion försvinner således för ett och ett enda positivt värde x', hvilket utgör den sökta roten till (45).

Ifrågavarande rot x' utgör det positiva värdet af $\sqrt[q]{a^p}$, enligt den vanliga rotbeteckningen. Men det visar sig i alla afseenden lämpligare att för x' införa beteckningen

$$a^{\frac{p}{q}}, \tag{46}$$

hvarunder vi således förstå *den positiva roten till ekvationen (45).*

För $q=1$ är $x'=a^p$ och uttrycket (46) antar formen $a^{\frac{p}{1}}$. Den nya beteckningen är således i detta fall ekvivalent med den tidigare använda.

Ur likheten $x'^q=a^p$ följer enligt (41), om r är ett positivt helt tal, $x'^{qr}=a^{pr}$. Den positiva roten till ekvationen $x^{qr}=a^{pr}$, hvilken enligt vår öfverenskommelse betecknas $a^{\frac{pr}{qr}}$, är således lika med x', d. v. s. lika med $a^{\frac{p}{q}}$. Härmed är visadt att värdet af uttrycket (46) beror endast af exponentens värde och icke af dess form.

Sedan exponentialfunktionen a^x sålunda definierats för det fall att x är ett positivt brutet tal, utsträcka vi dess definition till negativa brutna värden x i det vi låta egenskapen (44) fortfarande gälla och följaktligen sätta

$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}\,.$$

Exponentialfunktionen är härmed entydigt definierad för hvarje rationellt[1]) värde af variabeln, och det bör observeras att funktionen antar endast *positiva* värden. Man kontrollerar nu utan svårighet att egenskaperna (40) — (44) bibehålla sin giltighet, exponenterna må vara hvilka rationella tal som helst. Vi inskränka oss här till att visa detta för additionsteoremet (40).

Vi antaga först att x_1 och x_2 båda äro positiva, alltså

$$x_1=\frac{p}{q},\ x_2=\frac{r}{s},$$

där p, q, r, s äro positiva hela tal. Om vi med α och β beteckna värdena af uttrycken a^{x_1} och a^{x_2}, är, enligt vår definition,

$$\alpha^q=a^p,\ \beta^s=a^r.$$

På grund af egenskaperna hos digniteter med heltaliga exponenter sluta vi härur

(47) $$\alpha^{qs}=a^{ps},\ \beta^{qs}=a^{qr},$$

---

[1]) De positiva och negativa hela talen och bråken bilda tillsammans den *rationella* talklassen.

och vidare, då dessa likheter multipliceras,

$$(\alpha\beta)^{qs} = a^{ps+qr}.$$

Produkten $\alpha\beta = a^{x_1} . a^{x_2}$ utgör således den positiva roten till likheten

$$x^{qs} = a^{ps+qr}.$$

Men, enligt vår öfverenskommelse, betecknas denna rot äfven

$$a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{x_1+x_2},$$

och vi erhålla således $a^{x_1} . a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, h. s. b.

Härur följer, då vi taga reciproka värdet af hvartdera membrum,

$$\frac{1}{a^{x_1}} \cdot \frac{1}{a^{x_2}} = \frac{1}{a^{x_1+x_2}}.$$

hvilken likhet kan skrifvas

$$a^{-x_1} . a^{-x_2} = a^{-(x_1+x_2)} = a^{-x_1-x_2}.$$

Additionsteoremet gäller således äfven om båda exponenterna äro negativa rationella tal.

Om vi slutligen dividera likheterna (47) med hvarandra, erhålles

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{qs} = a^{ps-qr},$$

hvaraf, enligt våra definitioner, följer

$$\frac{\alpha}{\beta} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = a^{x_1-x_2}.$$

Men

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1} . a^{-x_2},$$

och vi få således

$$a^{x_1} . a^{-x_2} = a^{x_1-x_2},$$

d. v. s. additionsteoremet gäller äfven om den ena exponenten är ett positivt, den andra ett negativt rationellt tal.

4°. Förrän vi utsträcka exponentialfunktionen till irrationella värden af argumentet, måste vi närmare undersöka huru dess värde förändras då argumentet varierar genom rationella värden. Vi antaga härvid att *basen a är större än* 1. Ur likheten (44) framgår omedelbart huru de följande satserna modifieras om $a < 1$.

Under nämnda förutsättning se vi till en början att *värdet af a^x är större än* 1 *om* $x > 0$, *mindre än* 1 *om* $x < 0$. Ty då $a > 1$ är jämväl $a^n > 1$, om n är ett positivt helt tal. Om åter exponenten är ett positivt bråk, $\frac{p}{q}$, betyder $a^{\frac{p}{q}}$ den positiva roten till ekvationen $x^q = a^p$, och då $a^p > 1$ är denna rot äfven > 1. Enligt (44) följer härur att $a^x < 1$ om $x < 0$.

Då x växer, växer äfven a^x. Ty om vi gifva x en tillväxt h, erhålles enligt additionsteoremet

$$a^{x+h} = a^x \,.\, a^h.$$

Om nu $h > 0$, är, såsom vi just bevisat, $a^h > 1$ och således $a^{x+h} > a^x$.

Värdet af a^x öfverskrider hvarje föreskrifven gräns då x växer mot ∞, och kommer 0 *huru nära som helst då x aftar mot $-\infty$.* Om vi skrifva $a = 1 + \delta$, hvarvid enligt vårt antagande $\delta > 0$, följer nämligen ur binomialteoremet att $a^n > 1 + n\delta$ för hvarje positivt helt tal n [1]). Är nu M ett föreskrifvet positivt tal, huru stort som helst, och välja vi talet n så att $1 + n\delta > M$ eller $n > \frac{M-1}{\delta}$, erhålla vi $a^n > M$, och således äfven $a^x > M$ för $x \geqq n$, hvarmed förra delen af vårt påstående är bevisad.

---

[1]) Denna olikhet erhålles äfven enkelt utan användning af binomialteoremet, ty man finner successivt

$$(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2 > 1 + 2\delta,$$

$$(1+\delta)^3 > (1+\delta)(1+2\delta) > 1 + 3\delta,$$

$$(1+\delta)^4 > (1+\delta)(1+3\delta) > 1 + 4\delta,$$

o. s. v. Medels fullständig induktion bevisas att olikheten i fråga gäller allmänt.

Om vi å andra sidan fixera ett godtyckligt litet positivt tal ε, samt härefter välja M så stort att $\frac{1}{M} < \varepsilon$, och slutligen bestämma n så att ofvanstående villkor är uppfylldt, erhålles

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} < \frac{1}{M} < \varepsilon \quad \text{för} \quad x \geqq n,$$

eller, annorlunda skrifvet,

$$a^x < \varepsilon \quad \text{för} \quad x < -n,$$

hvilket innehåller den senare delen af vårt påstående.

Skillnaden $a^x - 1$ *närmar sig* 0 *samtidigt med* x. Om n är ett positivt helt tal och vi sätta $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \Delta$, hvarvid $\Delta > 0$, erhålles $a = (1 + \Delta)^n > 1 + n\Delta$, $\Delta < \frac{a-1}{n}$, och följaktligen

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Då vi dividera med $a^{\frac{1}{n}}$, följer härur

$$0 < 1 - a^{-\frac{1}{n}} < \frac{a-1}{n} \cdot a^{-\frac{1}{n}} < \frac{a-1}{n},$$

eller

$$-\frac{a-1}{n} < a^{-\frac{1}{n}} - 1 < 0.$$

Nu är, om $-\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}$, äfven $a^{-\frac{1}{n}} \leqq a^x \leqq a^{\frac{1}{n}}$, hvaraf

$$a^{-\frac{1}{n}} - 1 \leqq a^x - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Enligt de ofvanstående olikheterna är således

$$-\frac{a-1}{n} < a^x - 1 < \frac{a-1}{n} \quad \text{för} \quad -\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n},$$

eller, med kortare beteckning,

(48) $$|a^x - 1| < \frac{a-1}{n} \quad \text{för} \quad |x| \leqq \frac{1}{n}.$$

Vi kunna således göra $|a^x - 1|$ mindre än ett föreskrifvet, godtyckligt litet positivt tal ε genom att göra $|x| < \frac{1}{n}$, där n är ett positivt helt tal som valts så stort att $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ eller $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$.

Vi hafva härmed visat att värdet af exponentialfunktionen a^x kontinuerligt öfvergår i värdet 1 då x närmar sig 0 (tillsvidare genom rationella värden); likheten $a^0 = 1$, som förut endast utgjort en beteckning, har härmed vunnit en reell betydelse.

Ur den nyss bevisade egenskapen följer allmännare att *skillnaden* $a^{x_0+h} - a^{x_0}$ *närmar sig* 0 *samtidigt med* h, hvarvid x_0 kan vara hvilket gifvet rationellt värde som helst. Ty enligt additionsteoremet är

$$a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1),$$

och på grund af (48) sluta vi härur

$$|a^{x_0+h} - a^{x_0}| < a^{x_0} \cdot \frac{a-1}{n} \quad \text{för} \quad |h| \leqq \frac{1}{n},$$

hvarur riktigheten af vårt påstående omedelbart följer.

5°. Vi gå nu att utsträcka exponentialfunktionens definition till irrationella värden af variabeln, och göra för detta ändamål först några allmänna anmärkningar.

Vi betrakta ett irrationellt tal γ. Detta delar mängden af samtliga rationella tal i tvenne klasser: den *undre* klassen, hvilken omfattar alla rationella tal som äro mindre än γ, och den *öfre* klassen, som omfattar de rationella tal hvilka äro större än γ. Vi beteckna allmänt med α ett tal i den undre klassen, med β ett tal i den öfre klassen, och för själfva dessa klasser använda vi beteckningarna (α) och (β). Vi säga kort att talet γ *åtskiljer* de rationella talklasserna (α) och (β).

Enligt dessa klassers definition är hvarje tal α mindre än hvarje tal β. Vidare inses att i klassen (α) icke finnes något tal som är större än alla öfriga tal i samma klass. Ty mellan ett gifvet tal α och talet γ kunna vi alltid inskjuta ett rationellt tal; detta hör då till den undre klassen, då det är mindre än γ, och är större än det betraktade talet α. På samma sätt inses att klassen (β) icke innehåller något minsta tal. Slutligen bör observeras att, om ε är ett gifvet positivt tal, huru litet som helst, man alltid kan välja ett tal ur klassen (β) och ett tal ur klassen (α) så att deras skillnad är mindre än ε. Ty för detta ändamål behöfva vi endast taga ett så stort positivt helt tal n att $\frac{1}{n} < \varepsilon$, samt bland de heltaliga multiplerna af $\frac{1}{n}$ utvälja de två på hvarandra följande mellan hvilka γ ligger. Antaga vi

$$\frac{m}{n} < \gamma < \frac{m+1}{n},$$

hör $\frac{m+1}{n}$ till klassen (β), $\frac{m}{n}$ till klassen (α), och dessa tals skillnad är lika med $\frac{1}{n}$ och således mindre än ε.

I åttonde kapitlet återkomma vi utförligt till teorin för de irrationella talen. Här hafva vi endast velat framhålla de egenskaper hos nämnda tal som i det följande komma till användning.

Vi hafva entydigt definierat värdet af a^x för hvarje rationellt argumentvärde. Mot hvarje tal α, som hör till den undre af de två rationella talklasser, (α) och (β), hvilka åtskiljas af det irrationella talet γ, svarar således ett bestämdt värde

$$t = a^{\alpha},$$

och mot hvarje tal β i den öfre klassen (β) svarar likaledes ett bestämdt värde

$$T = a^{\beta}.$$

Mot klasserna (α) och (β) svara sålunda tvenne nya oändliga talmängder, hvilka vi kort beteckna (t) och (T). Dessa be-

sitta samma tre egenskaper hvilka ofvan påvisades hos klasserna (α) och (β), och hvilka vi här än en gång formulera:

I. *Hvarje tal i mängden* (t) *är mindre än hvarje tal i mängden* (T).

Ty då $\alpha < \beta$ är $a^\alpha < a^\beta$, d. v. s. $t < T$.

II. *I mängden* (t) *finnes intet största tal och i mängden* (T) *intet minsta tal.*

Ty om $t = a^\alpha$ är ett gifvet tal i mängden (t), kunna vi, såsom ofvan påpekats, i klassen (α) finna ett tal $\alpha' > \alpha$, och talet $t' = a^{\alpha'}$ hör då äfven till (t) och är större än det betraktade talet t. På samma sätt visas att man i mängden (T) alltid kan finna tal som äro mindre än ett gifvet tal i samma mängd.

III. *Om* ε *är ett föreskrifvet positivt tal, huru litet som helst, kan man alltid välja ett tal ur mängden* (t) *och ett tal ur mängden* (T) *på sådant sätt att* $T - t < \varepsilon$.

Ur likheterna $T = a^\beta$ och $t = a^\alpha$ följer, enligt additionsteoremet,

$$T - t = a^\beta - a^\alpha = a^\alpha (a^{\beta - \alpha} - 1).$$

Enligt hvad ofvan framhållits, kan man välja talen α och β så att $\beta - \alpha = \frac{1}{n}$, där n är ett gifvet positivt helt tal. På grund af olikheten (48) erhålles då

$$T - t < a^\alpha \cdot \frac{a-1}{n} < a^{\beta_0} \cdot \frac{a-1}{n},$$

där β_0 betecknar något tal från mängden (β), likgiltigt hvilket. Om vi valt $n > \frac{a^{\beta_0}(a-1)}{\varepsilon}$, är högra membrum mindre än ε och således $T - t < \varepsilon$.

Det gäller nu att *definiera*, d. v. s. att gifva en bestämd betydelse åt exponentialfunktionen a^x för ett irrationellt argumentvärde $x = \gamma$. Vi se då genast att, om vi vilja att funktionen skall blifva kontinuerlig för $x = \gamma$, vi måste tilldela a^γ ett värde som är större än hvarje värde a^α och mindre än hvarje värde a^β, då vi såsom ofvan med α beteckna ett god-

tyckligt rationellt tal $<\gamma$ och med β ett godtyckligt rationellt tal $>\gamma$. Ty gåfves åt a^γ t. ex. ett värde mindre än ett visst tal a^α, skulle man för hvarje rationellt tal $x>\alpha$ hafva $a^\gamma < a^\alpha < a^x$, hvaraf $a^x - a^\gamma > a^\alpha - a^\gamma$, och denna olikhet skulle gälla huru nära det rationella talet x än komme γ. Funktionen vore således icke kontinuerlig för $x=\gamma$.

Vi hafva således att fråga oss om det finnes något tal med de erfordrade egenskaperna, d. v. s. som är större än hvarje tal a^α och samtidigt mindre än hvarje tal a^β, och, om så är, om det finnes endast *ett* sådant tal. Att så är fallet, följer ur nedan anförda allmänna sats, af hvilken vi upprepade gånger komma att göra bruk i denna lärobok, men hvars bevis vi kunna gifva först i åttonde kapitlet, sedan vi genomgått teorin för irrationella tal.

Om (t) *och* (T) *äro tvenne gifna oändliga mängder af reella tal*[1]) *hvilka besitta de tre ofvan angifna egenskaperna* I, II *och* III, *finnes det ett och endast ett reellt tal som åtskiljer dessa mängder, d. v. s. är större än hvarje tal i mängden* (t) *och samtidigt mindre än hvarje tal i mängden* (T)[2]).

Med stöd af denna sats kunna vi nu uppställa följande definition, hvilken entydigt fastslår värdet af a^x för hvarje gifvet irrationellt argumentvärde.

Definition. — *Om* γ *är ett irrationellt tal, och om med* (α) *och* (β) *betecknas de rationella talklasser hvilka åtskiljas af detta tal, förstås med* a^γ *det entydigt bestämda reella tal som åtskiljer talmängderna* (a^α) *och* (a^β), *så att*

$$\text{hvarje tal } a^\alpha < a^\gamma < \text{hvarje tal } a^\beta.$$

---

1) De rationella och de irrationella talen bilda tillsammans den *reella* talklassen.

2) Man inser omedelbart att det icke kan finnas flere än *ett* tal med ifrågavarande egenskaper. Ty funnes det två sådana tal, A och $B(>A)$, skulle man hafva $t<A<B<T$ och således $T-t>B-A$, huru än talen t och T valdes från hvar sin af de gifna mängderna. Men detta strider mot egenskapen III.

Att det verkligen finnes ett tal som uppfyller de ställda fordringarna, kan däremot bevisas endast med stöd af teorin för irrationella tal.

6°. Sedan exponentialfunktionen sålunda definierats för alla reella värden af argumentet, konstaterar man utan svårighet att de egenskaper fortfara att gälla hvilka tidigare bevisats för rationella argumentvärden.

Sålunda inser man omedelbart att a^x *växer samtidigt med* x (om man fortfarande antager $a > 1$). Ty om x_1 och $x_2 (> x_1)$ äro tvenne godtyckligt gifna reella tal, kan man mellan dem inskjuta ett rationellt tal r och har då, med stöd af ofvanstående definition och hvad tidigare sagts, $a^{x_1} < a^r$, $a^r < a^{x_2}$, och följaktligen $a^{x_1} < a^{x_2}$. Vi sluta härur, enligt hvad s. 82 bevisats, att a^x för hvarje reellt argumentvärde x har ett *positivt* värde, hvilket obegränsadt växer då x växer mot ∞, och obegränsadt närmar sig 0 då x aftar mot $-\infty$.

Funktionen a^x *är kontinuerlig för hvarje reellt värde* x. Ty om x_0 är ett gifvet reellt värde, kunna vi (jmf. s. 85—86) instänga det mellan två rationella tal, α och β $(> \alpha)$, valda så att skillnaden $a^\beta - a^\alpha$ är mindre än ett föreskrifvet tal ε. För hvarje värde x mellan α och β är då $a^\alpha < a^x < a^\beta$, och speciellt är $a^\alpha < a^{x_0} < a^\beta$. Ur dessa olikheter följer

$$|a^x - a^{x_0}| < a^\beta - a^\alpha < \varepsilon \text{ för } \alpha < x < \beta,$$

hvarmed vårt påstående är bevisadt.

Man konstaterar vidare att egenskaperna (40)—(44) gälla för hvilka reella värden som helst af exponenterna. Vi inskränka oss till att visa detta för additionsteoremet (40).

Vi antaga tvenne reella tal, γ_1 och γ_2, af hvilka åtminstone det ena är irrationellt, och vilja bevisa att $a^{\gamma_1} . a^{\gamma_2} = a^{\gamma_1 + \gamma_2}$.

Vi beteckna med (α_1) och (β_1) de rationella talklasser hvilka åtskiljas af talet γ_1, med (α_2) och (β_2) de rationella talklasser som åtskiljas af γ_2. Då är

$$a^{\alpha_1} < a^{\gamma_1} < a^{\beta_1}, \quad a^{\alpha_2} < a^{\gamma_2} < a^{\beta_2},$$

hvarur genom multiplikation följer

$$a^{\alpha_1} . a^{\alpha_2} < a^{\gamma_1} . a^{\gamma_2} < a^{\beta_1} . a^{\beta_2},$$

eller ännu, då additionsteoremet gäller för rationella exponenter,

(49) $$a^{\alpha_1+\alpha_2} < a^{\gamma_1} . a^{\gamma_2} < a^{\beta_1+\beta_2}.$$

Å andra sidan erhålles ur olikheterna $\alpha_1 < \gamma_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \gamma_2 < \beta_2$ genom addition

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \gamma_1 + \gamma_2 < \beta_1 + \beta_2,$$

och härur följer

(50) $$a^{\alpha_1+\alpha_2} < a^{\gamma_1+\gamma_2} < a^{\beta_1+\beta_2}.$$

Olikheterna (49) och (50) gifva oss

(51) $$a^{\beta_1+\beta_2} - a^{\alpha_1+\alpha_2} > | a^{\gamma_1} . a^{\gamma_2} - a^{\gamma_1+\gamma_2} |,$$

och denna olikhet gäller, såsom de föregående, huru än de rationella talen α_1, β_1, α_2, β_2 väljas inom sina resp. klasser.

Nu kunna dessa tal väljas så att venstra membrum i ofvanstående olikhet blir mindre än ett föreskrifvet, godtyckligt litet positivt tal (jmf. s. 86), ty skillnaderna $\beta_1 - \alpha_1$ och $\beta_2 - \alpha_2$ kunna göras huru små som helst, och detsamma gäller således äfven om skillnaden

$$(\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) = (\beta_1 - \alpha_1) + (\beta_2 - \alpha_2).$$

Härur följer att $a^{\gamma_1} . a^{\gamma_2} - a^{\gamma_1+\gamma_2} = 0$. Ty i annat fall skulle olikheten (51) innebära en motsägelse för tillräckligt små värden af differenserna $\beta_1 - \alpha_1$ och $\beta_2 - \alpha_2$.

7°. Det skulle återstå att redogöra för utsträckningen af exponentialfunktionens definition till komplexa argumentvärden, hvilken leder till nya intressanta resultat och uppenbarar ett intimt samband mellan exponentialfunktionen och de trigonometriska funktionerna. Behandlingen af dessa frågor faller emellertid utom planen för vår lärobok.

Öfningsuppgifter:

1) Dela intervallen (0, 1) i så många lika stora delar att oscillationen af funktionen 10^x inom hvarje del är $< \frac{1}{10}$.

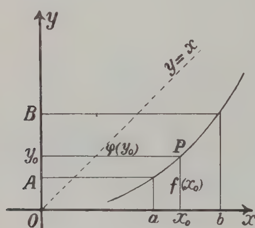
2) Bevisa riktigheten af likheten $(a^x)^y = a^{xy}$ om x och y äro *a*) positiva eller negativa brutna tal, *b*) irrationella tal.

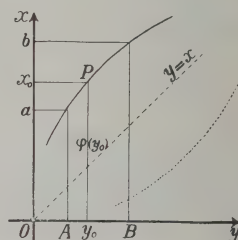
3) Bevisa att x^y är en kontinuerlig funktion af variablerna x, y för hvarje värdesystem x_0, y_0 där $x_0 > 0$ (jmf. s. 39).

14. Definition af en gifven funktions inversa funktion. — Vi antaga att funktionen $f(x)$ inom en viss intervall (a, b) är kontinuerlig och ständigt varierar i samma riktning, d. v. s. antingen ständigt tilltar eller ständigt aftar. Funktionens begynnelse- och slutvärde inom intervallen beteckna vi med A och B:

$$A = f(a), \quad B = f(b).$$

Enligt den s. 38 anförda satsen antar $f(x)$ hvarje gifvet värde y_0 mellan A och B i åtminstone en punkt x_0 mellan a och b. Det kan i förevarande fall icke finnas mer än en sådan punkt x_0, då $f(x)$ varierar i samma riktning inom intervallen (a, b). Då y_0 genomlöper alla värden från A till B, rör sig punkten x_0 ständigt i samma riktning från a till b.





Mot hvarje värde y inom intervallen (A, B) svarar således ett och ett enda värde x inom intervallen (a, b) som satisfierar ekvationen

$$(52) \qquad f(x) = y.$$

Detta värde x utgör följaktligen en funktion af y,

$$(52)' \qquad x = \varphi(y),$$

som är entydigt definierad inom intervallen (A, B).

Denna funktion $\varphi(y)$ utgör den gifna funktionens omvända eller *inversa* funktion, eller, rättare sagdt, en *gren* af denna inversa funktion, såsom vi strax närmare skola förklara.

Kurvan $y = f(x)$ åskådliggör tillika förloppet af den inversa funktionen $\varphi(y)$, om vi hänföra den till y-axeln såsom abskissaxel (jmf. den första af ofvanstående figurer). För att få abskiss- och ordinataxlarna att intaga det sedvanliga läget i förhållande till hvarandra, behöfva vi endast låta figuren rotera ett halft hvarf kring räta linien $y = x$, hvarvid den först uppritade kurvan öfvergår i den symmetriska kurvan med afseende å nämnda linie, såsom figuren till höger utvisar.

Funktionen $\varphi(y)$ *är kontinuerlig för hvarje värde* y *inom intervallen* (A, B). Ty om y_0 är ett sådant värde, ligger värdet $x_0 = \varphi(y_0)$ mellan a och b. Om vi då välja ett positivt tal ε, huru litet som helst och i hvarje fall så litet att värdena $x_0 - \varepsilon$ och $x_0 + \varepsilon$ jämväl ligga inom (a, b), falla värdena $y' = f(x_0 - \varepsilon)$ och $y'' = f(x_0 + \varepsilon)$ inom (A, B) och på hvar sin sida om värdet $y_0 = f(x_0)$. Mot hvarje värde y inom intervallen (y', y'') svarar då omvändt ett värde $x = \varphi(y)$ som faller mellan $x_0 - \varepsilon$ och $x_0 + \varepsilon$, eller mellan $\varphi(y_0) - \varepsilon$ och $\varphi(y_0) + \varepsilon$, så att man följaktligen inom denna intervall (y', y'') har

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon,$$

hvilket innebär att $\varphi(y)$ är kontinuerlig för $y = y_0$. Läsaren uppmanas att geometriskt åskådliggöra detta bevis.

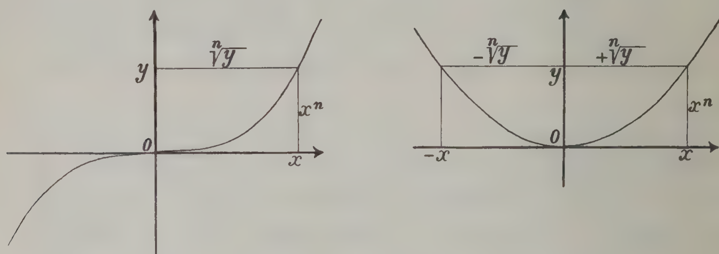
Det kan inträffa att ekvationen (52), för ett gifvet värde y inom intervallen (A, B), är satisfierad ännu för andra värden x än det som ligger inom (a, b) och hvilket vi betecknat med $\varphi(y)$. Dessa andra rötter till ekvationen (52) definiera då nya grenar af den inversa funktionen, hvilken i detta fall är en mångtydig funktion, bestående af särskilda entydiga grenar, hvilka geometriskt representeras antingen af olika kurvor eller af delar af en och samma kurva, beroende på karaktären af den gifna funktionen $f(x)$.

Vi tillämpa de ofvanstående betraktelserna på potensen x^n, där n är ett positivt helt tal. Om n är ett *udda* tal,

växer x^n ständigt och genomlöper alla värden från $-\infty$ till $+\infty$, då x växer från $-\infty$ till $+\infty$. Likheten

$$(53) \qquad y = x^n$$

definierar således omvändt x såsom en funktion af y, hvilken är entydig och kontinuerlig för alla reella värden y och växer från $-\infty$ till $+\infty$ då y växer från $-\infty$ till $+\infty$. Kurvan (52) har det i figuren till venster angifna utseendet.



Om exponenten n är ett *jämnt* tal, är funktionen x^n ständigt positiv och växer kontinuerligt från 0 till ∞ då x växer från 0 till ∞ eller aftar från 0 till $-\infty$. Funktionen antar samma värde för motsatta värden af x. Kurvan (53) förlöper sålunda helt och hållet i det öfre halfplanet och är symmetrisk med afseende å y-axeln, såsom figuren till höger anger. För hvarje gifvet positivt värde y erhålles ur (53) två reella motsatta värden x. Den inversa funktionen är således i detta fall (då vi fortfarande inskränka oss till reella tal) en tvåtydig funktion som är definierad endast för $y \geq 0$. De två grenarna, hvilka hafva motsatta värden, öfvergå kontinuerligt i hvarandra för $y = 0$.

Den inversa funktionen till $y = x^n$ betecknas, såsom bekant, $x = \sqrt[n]{y}$, eller ock $x = y^{\frac{1}{n}}$. Dock synes det, på detta stadium, vara lämpligare att, såsom vi gjort i teorin för exponentialfunktionen, använda beteckningen $y^{\frac{1}{n}}$ endast för positiva värden y och för att utmärka den positiva grenen af $\sqrt[n]{y}$.

Om vi åter beteckna den oberoende variabeln med x,

är således $x^{\frac{1}{n}}$, eller den positiva grenen af $\sqrt[n]{x}$, en för $x > 0$ entydigt definierad och kontinuerlig funktion, som växer från 0 till ∞ samtidigt med x. Enligt hvad s. 55 bevisats om sammansatta funktioner, sluta vi häraf att, om m är ett positivt helt tal, jämväl potensen $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ eller $x^{\frac{m}{n}}$ för $x > 0$ är en entydig, kontinuerlig och ständigt växande funktion. Härur följer åter att potensen

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

är kontinuerlig för $x > 0$ och aftar från ∞ till 0 då x växer från 0 till ∞.

Vi hafva sålunda entydigt definierat potensen x^{μ} för positiva värden af variabeln x, för det fall att exponenten μ är ett godtyckligt rationellt tal.

Öfningsuppgift: Undersök noggrant, såväl analytiskt som geometriskt, de reella grenarna af polynomets $x^4 - x^2$ inversa funktion.

15. **De cyclometriska funktionerna.** — Vi uppehålla oss i denna lärobok icke vid teorin för de trigonometriska funktionerna, hvilkas egenskaper vi förutsätta såsom bekanta, men skola i stället något närmare betrakta dessa funktioners inversa funktioner eller de s. k. *cyclometriska funktionerna*:

$$\text{arc sin}\, x, \ \text{arc cos}\, x, \ \text{arc tang}\, x, \ \text{arc cot}\, x.$$

Med $\text{arc sin}\, x$ förstås, som kändt, den vinkel eller båge (= arcus) hvars sinus har värdet x. Beteckna vi denna vinkel med y:

$$y = \text{arc sin}\, x,$$

är således omvändt

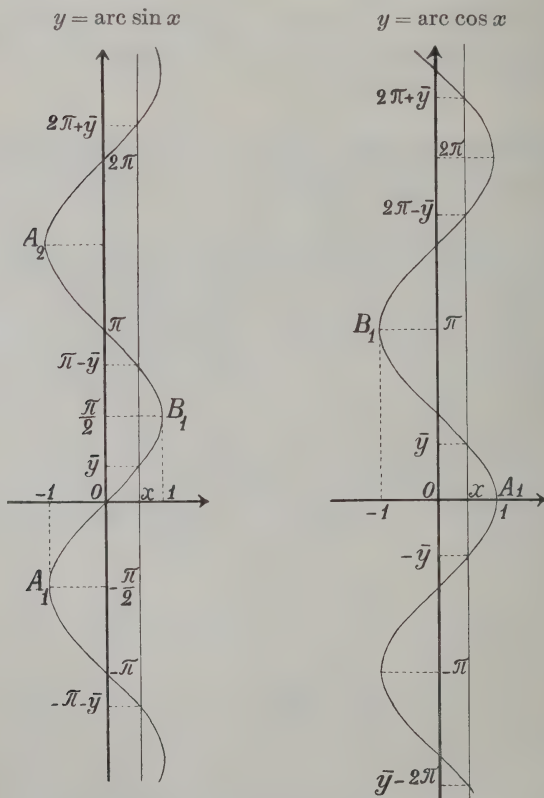
(54) $$x = \sin y.$$

Då y växer från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$, växer $\sin y$ kontinuerligt från värdet -1 till värdet 1. Mot hvarje gifvet värde x

inom intervallen $(-1, 1)$ svarar således ett och ett enda värde y inom intervallen $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ som utgör rot till likheten (54), och denna rot definierar följaktligen en funktion af x som kontinuerligt växer från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$ då x växer från -1 till 1. Vi benämna ifrågavarande funktion *hufvudgrenen* af $\text{arc}\sin x$ och beteckna den för tydlighetens skull med $\overline{\text{arc}\sin x}$. Alltså är

$$(55) \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \overline{\text{arc}\sin x} \leqq \frac{\pi}{2}.$$

I nedanstående figur representeras grenen $\overline{\text{arc}\sin x}$ af kurvstycket $A_1 B_1$ och dess värde är betecknadt med $\bar{y}$.



Då y fortfar att växa från $\frac{\pi}{2}$ till $\frac{3\pi}{2}$, aftar $\sin y$ kontinuerligt från 1 till -1. För hvarje gifvet värde x mellan -1 och 1 har ekvationen (54) således äfven inom intervallen $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ en och endast en rot. Denna rot utgör en ny gren af $\arcsin x$, hvilken kontinuerligt aftar från $\frac{3\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$ då x växer från -1 till 1. Dess värde är

$$(56) \qquad \pi - \overline{\arcsin x}\,.$$

Ty om vi för korthetens skull sätta $\overline{y} = \overline{\arcsin x}$, är

$$\sin(\pi - \overline{y}) = \sin \overline{y} = x\,;$$

$\pi - \overline{y}$ utgör således en rot till ekvationen (54), och ur olikheterna (55) följer att denna rot tillhör intervallen $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Grenen (56) representeras i figuren af kurvstycket $A_2 B_1$. Den öfvergår kontinuerligt i hufvudgrenen för $x = 1$.

Då funktionen $\sin y$ är periodisk med 2π såsom period, så att man, om n är ett godtyckligt helt tal, för hvarje värde y har

$$\sin(y + n\,.\,2\pi) = \sin y\,,$$

finnes det en oändlig mängd andra grenar af $\arcsin x$, hvilka alla framgå ur de ofvan betraktade då till dessa adderas heltaliga multipler af 2π. Funktionen $\arcsin x$ är således en oändligt mångtydig funktion, hvars grenar kunna sammanfattas i följande tvenne serier:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\arcsin x} + n\,.\,2\pi\,, \\ \pi - &\overline{\arcsin x} + n\,.\,2\pi\,. \end{aligned}\right\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

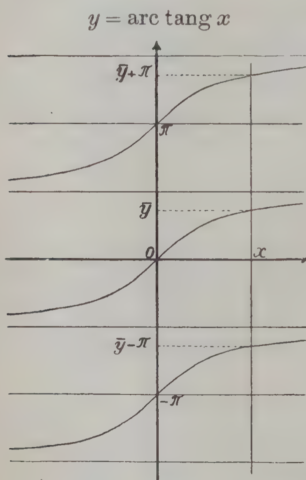
Då x växer från -1 till 1, växer grenen $\overline{\arcsin x} + n\,.\,2\pi$ kontinuerligt från $n\,.\,2\pi - \frac{\pi}{2}$ till $n\,.\,2\pi + \frac{\pi}{2}$, medan grenen $\pi - \overline{\arcsin x} + n\,.\,2\pi$ aftar från $n\,.\,2\pi + \frac{3\pi}{2}$ till $n\,.\,2\pi + \frac{\pi}{2}$, och sålunda kontinuerligt öfvergår i den förra grenen för $x = 1$.

Läsaren uppmanas att på analogt sätt i detalj diskutera funktionen arc cos x, såväl analytiskt som geometriskt. Man väljer lämpligen till *hufvudgren* den gren af funktionen som i figuren representeras af kurvstycket $B_1 A_1$, och hvars värde kontinuerligt aftar från π till 0 då x ökas från -1 till 1. Användes för hufvudgrenen åter beteckningen $\overline{\text{arc cos}\, x}$, kan man sammanfatta funktionens oändligt många grenar i följande tvenne serier:

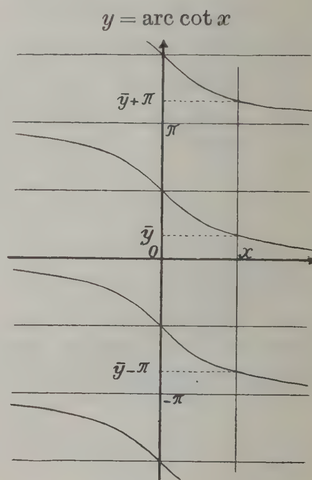
$$\begin{array}{l} \overline{\text{arc cos}\, x} + n\,.\,2\pi\,, \\ -\overline{\text{arc cos}\, x} + n\,.\,2\pi\,. \end{array} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Då x växer från -1 till 1, aftar grenen $\overline{\text{arc cos}\, x} + n\,.\,2\pi$ kontinuerligt från $(2n+1)\pi$ till $2n\pi$, medan grenen $-\overline{\text{arc cos}\, x} + n\,.\,2\pi$ växer från $(2n-1)\pi$ till $2n\pi$ och således kontinuerligt öfvergår i den förra grenen för $x = 1$.

$y = \text{arc tang}\, x$



$y = \text{arc cot}\, x$



Funktionen $y = \text{arc tang}\, x$ utgör den inversa funktionen till

$$(57) \qquad x = \text{tang}\, y\,.$$

Då y växer från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$, växer tang y kontinuerligt från $-\infty$ till $+\infty$. Mot hvarje gifvet reellt värde x svarar således

en och en enda rot y till likheten (57) som ligger mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$. Denna rot utgör en entydig och kontinuerlig funktion af x, hvilken växer från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$ då x växer från $-\infty$ till $+\infty$, och hvilken vi benämna *hufvudgrenen* af funktionen $\operatorname{arc\,tang} x$ och beteckna med $\overline{\operatorname{arc\,tang} x}$.

Då funktionen $\operatorname{tang} y$ är periodisk med π såsom period, så att

$$\operatorname{tang}(y + n\pi) = \operatorname{tang} y$$

för hvarje heltaligt värde n, har ekvationen (57) för hvarje gifvet värde x en oändlig mängd rötter som skilja sig från hvarandra på heltaliga mångfalder af π. Funktionen $\operatorname{arc\,tang} x$ är sålunda en oändligt mångtydig funktion, och dess samtliga grenar kunna sammanfattas under formen

$$\overline{\operatorname{arc\,tang} x} + n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Då x växer från $-\infty$ till $+\infty$, växer grenen $\overline{\operatorname{arc\,tang} x}$ $+ n\pi$ kontinuerligt från värdet $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ till värdet $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

På analogt sätt diskuteras funktionen $\operatorname{arc\,cot} x$. Till hufvudgren är det lämpligt att välja den gren af funktionen som kontinuerligt aftager från π till 0 då x växer från $-\infty$ till $+\infty$. Betecknas hufvudgrenen med $\overline{\operatorname{arc\,cot} x}$, kan man sammanfatta funktionens samtliga grenar under formen

$$\overline{\operatorname{arc\,cot} x} + n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Då de cyclometriska funktionerna spela en viktig roll i Analysen och det därför är nödvändigt att fullständigt beherska deras användning, uppmana vi läsaren att i detalj genomarbeta nedanstående öfningsuppgifter.

Öfningsuppgifter:

1) Lös ekvationen

$$\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,sin} \frac{4}{5},$$

a) då i hvardera termen i högra membrum väljes hufvudgrenen af $\operatorname{arc\,sin} x$;

b) då för $\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}$ väljes hufvudgrenen och för $\operatorname{arc\,sin} \frac{4}{5}$ den gren som ligger mellan $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{3\pi}{2}$.

2) Lös ekvationen

$$\operatorname{arc\,tang} x = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,sin} \frac{4}{5}$$

under samma förutsättningar som den föregående.

3) Bringa följande uttryck under enklare form:

$$\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \quad \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \operatorname{arc\,cos}(1-2\sin^2 x),$$

$$\operatorname{arc\,cos}(\sin x), \quad \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-\operatorname{tang} x}{1+\operatorname{tang} x}\right).$$

4) Förenkla följande uttryck, i hvilka antages att $|x| < 1$:

$$\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{arc\,sin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \quad \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

5) Lös ekvationen

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} a + \operatorname{arc\,tang} x.$$

6) Bevisa riktigheten af likheten

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239}.$$

7) Hvilken algebraisk relation äger rum mellan x, y, z, om

$$\operatorname{arc\,tang} a = \operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} y + \operatorname{arc\,tang} z\,?$$

16. **Logaritmer och elementära metoder för deras beräkning.** — Vi hafva sett att exponentialfunktionen a^x, om $a > 1$, kontinuerligt växer från 0 till ∞ då x växer från $-\infty$ till $+\infty$. Den antar således hvarje gifvet positivt värde en och endast en gång, eller, annorlunda uttryckt, mot hvarje positivt värde y svarar ett och endast ett reellt värde x som utgör rot till ekvationen

$$a^x = y. \tag{58}$$

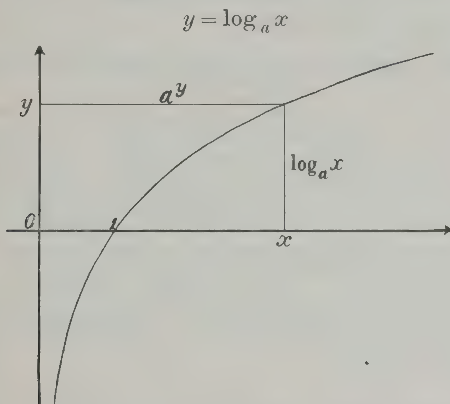
Denna rot utgör således en entydig funktion af y, som är definierad endast för positiva värden y och kontinuerligt

växer från $-\infty$ till $+\infty$ då y växer från 0 till ∞. Ifrågavarande funktion benämnes, som kändt, *logaritmen för y i det system hvars bas är a*, och betecknas

$$x = \log_a y. \tag{58)'}$$

Vi beteckna härefter den oberoende variabeln såsom vanligt med x, och betrakta funktionen $\log_a x$, hvars kurva vi här nedan upprita (för $a = 2$).

$y = \log_a x$



Den logaritmiska funktionens egenskaper härflyta omedelbart ur de tidigare bevisade egenskaperna hos exponentialfunktionen. Om x_1 och x_2 äro tvenne positiva tal, har man enligt logaritmens definition (om beteckningen förenklas)

$$x_1 = a^{\log x_1}, \quad x_2 = a^{\log x_2}. \tag{59}$$

Genom multiplikation erhålles härur, enligt additionsteoremet för a^x,

$$x_1 x_2 = a^{\log x_1} \cdot a^{\log x_2} = a^{\log x_1 + \log x_2},$$

hvilken likhet innebär logaritmens fundamentalegenskap:

$$\log (x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2. \tag{60}$$

Genom division af likheterna (59) erhålles åter, då vi göra bruk af relationen (44) s. 79 samt af additionsteoremet,

$$\frac{x_1}{x_2} = a^{\log x_1 - \log x_2},$$

hvaraf, enligt logaritmens definition, följer

$$\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log x_1 - \log x_2. \tag{61}$$

På grund af den för exponentialfunktionen gällande likheten (41) s. 78 erhålla vi slutligen, om x är ett positivt tal och μ ett godtyckligt reellt tal,

$$x^\mu = (a^{\log x})^\mu = a^{\mu \log x}, \tag{62}$$

hvarur vi afläsa logaritmens tredje grundegenskap

$$\log(x^\mu) = \mu \log x. \tag{63}$$

Då funktionen $\log x$ är kontinuerlig för $x > 0$ och exponentialfunktionen för alla värden af argumentet, kunna vi ur likheten (62) sluta, enligt den s. 55 bevisade satsen om sammansatta funktioner, att potensen x^μ är en kontinuerlig funktion af x för $x > 0$, jämväl om exponenten μ är ett irrationellt tal (jmf. s. 93).

Om vi känna talens logaritmer i ett visst system, hvars bas må vara a, kunna vi med stöd af likheten (63) lätt beräkna deras logaritmer i ett system med en godtyckligt vald bas b. Om vi utgå från definitionslikheten för $\log_b x$:

$$b^{\log_b x} = x,$$

och taga logaritmen för hvartdera membrum i systemet med basen a, erhålla vi nämligen, enligt (63),

$$\log_b x \,.\, \log_a b = \log_a x,$$

hvarur för $x = a$ följer

$$\log_b a \,.\, \log_a b = 1.$$

Alltså är

$$\log_b x = M \,.\, \log_a x,$$

där

$$M = \frac{1}{\log_a b} = \log_b a.$$

Denna konstanta faktor M, med hvilken man sålunda har att multiplicera logaritmerna i systemet med basen a för att erhålla motsvarande logaritmer i systemet med basen b, benämnes det senare systemets *modul* i förhållande till det föregående.

I praktisk räkning användes som kändt företrädesvis det *Briggska* logaritmsystemet [1]), hvars bas är 10. I teoretiska frågor användes däremot nästan uteslutande det *naturliga* eller *Neperska* logaritmsystemet [2]). Detta har till bas det s. k. *Neperska talet* e, ett irrationellt tal hvars värde är

$$e = 2{,}7182818\ldots,$$

och för hvars definition och beräkning vi i fjärde kapitlet utförligt redogöra. Moduln för det Neperska systemet i förhållande till det Briggska är

$$\frac{1}{\operatorname{Log} e} = \log_e 10 = 2{,}30258509\ldots$$

Omvändt är det Briggska systemets modul i förhållande till det Neperska

$$\operatorname{Log} e = \frac{1}{\log_e 10} = 0{,}43429448\ldots$$

Vi göra några anmärkningar af praktisk natur beträffande logaritmernas användning. Vi antaga att det gäller att söka summan eller skillnaden af tvenne uttryck, a och b, hvilka beräknas medels logaritmer. Man har då, sedan $\operatorname{Log} a$ och $\operatorname{Log} b$ erhållits, att i tabellerna slå upp motsvarande tal och härefter addera eller subtrahera dessa tal. Söker

---

[1]) Benämndt efter engelsmannen BRIGGS, som år 1620 offentliggjorde ett omfattande verk med titeln *Arithmetica logarithmica*, innehållande 14-ställiga logaritmer för de hela talen 1—20000 och 90000—100000.

[2]) Systemet har fått sitt namn efter engelsmannen NAPIER, som år 1614 offentliggjorde det första arbetet öfver logaritmer, under titeln: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus in utraque trigonometria*. Såsom bas för sina logaritmiska tabeller använde NAPIER emellertid icke talet e, utan talet $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, hvars värde kommer $\frac{1}{e}$ mycket nära.

man $\mathrm{Log}\,(a \pm b)$, har man än en gång att slå upp en logaritm i tabellerna.

Denna upprepade uppslagning af logaritmer och antilogaritmer är obekväm, och ökar dessutom osäkerheten i resultatet, hvarför man på särskilda sätt sökt undgå densamma.

Man har sålunda, på GAUSS' initiativ, konstruerat s. k. *additions-* och *subtraktionslogaritmer*, med hvilkas tillhjälp man enkelt erhåller $\mathrm{Log}\,(a \pm b)$ då $\mathrm{Log}\, a$ och $\mathrm{Log}\, b$ äro kända. Om man sätter $\frac{a}{b} = x$, är

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

och således

$$\mathrm{Log}\,(a + b) = \mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Tabellerna för additionslogaritmer hafva till argument [1] $\mathrm{Log}\, x$ och gifva direkt värdet af $\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. För att erhålla $\mathrm{Log}\,(a + b)$ har man således att beräkna skillnaden $\mathrm{Log}\, a - \mathrm{Log}\, b = \mathrm{Log}\, x$, uppslå i tabellerna motsvarande värde af $\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, och addera detta till $\mathrm{Log}\, a$. Tabellerna för subtraktionslogaritmer äro inrättade på ett liknande sätt.

Utan att använda några särskilda tabeller, kan man i flere fall väsentligen förenkla beräkningen af summan eller skillnaden af tvenne expressioner genom att införa en s. k. *hjälpvinkel*.

Om det t. ex. gäller att beräkna uttrycket

$$(64) \qquad a \sin v + b \cos v,$$

är det lämpligt att sätta a och b under formen

$$(65) \qquad a = r \cos \varphi,\ b = r \sin \varphi,$$

---

[1]) Om det större af de gifna talen betecknas med a, är $x = \frac{a}{b} > 1$ och således $\mathrm{Log}\, x > 0$. Tabellerna upptaga därför endast positiva argumentvärden.

där r är ett positivt tal och φ en vinkel som tillhör intervallen $0 \leq \varphi < 2\pi$. Att detta är möjligt, och blott på ett sätt, inses enklast om vi i ett rätvinkligt koordinatsystem utmärka den punkt P som har koordinaterna $x = a, y = b$; r och φ utgöra nämligen, såsom ur likheterna (65) omedelbart framgår, denna punkts polära koordinater. Vinkeln φ blir bestämd genom likheten

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

då man tillika observerar att, enligt (65), $\cos \varphi$ bör få samma tecken som a, $\sin \varphi$ samma tecken som b, eftersom r har ett positivt värde. Härefter beräknas r ur någon af ekvationerna (65), hvilka gifva

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}.$$

Genom substitutionen (65) öfvergår det gifna uttrycket (64) i det följande:

$$r \sin (v + \varphi);$$

hvilket lätt beräknas medels logaritmer sedan vinkeln φ och $\log r$ bestämts.

Substitutionen (65) kan äfven med fördel användas för att beräkna uttryck af formen $\sqrt{a^2 \pm b^2}$.

Vi redogöra slutligen för några elementära metoder för beräkning af logaritmer, hvilka äro af stort historiskt intresse emedan de verkligen kommo till användning vid uträkningen af de första logaritmtabellerna, ehuru de senare utträngts af de väsentligt enklare beräkningsmetoder differentialkalkylen erbjuder.

Den första af de metoder vi afse grundar sig på utveckling af logaritmerna i s. k. *kedjebråk*, hvilkas teori vi senare skola behandla. Vi tillämpa denna metod på beräkningen af den Briggska logaritmen för talet 2, d. v. s. roten till ekvationen

$$(a) \qquad 10^x = 2.$$

Då $10^0 < 2$ och $10^1 > 2$, ligger roten x mellan 0 och 1. Vi sätta

$$x = \frac{1}{x_1},$$

och upphöja i (a) hvartdera membrum till potensen x_1, hvarvid erhålles

$$(b) \qquad 2^{x_1} = 10.$$

Man finner här $2^3 < 10$ och $2^4 > 10$, hvarur framgår att $3 < x_1 < 4$. Vi sätta därför

$$x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}, \text{ hvaraf } x = \frac{1}{3 + \frac{1}{x_2}}.$$

Ekvationen (b) antar då formen

$$(c) \qquad \left(\frac{5}{4}\right)^{x_2} = 2.$$

Man finner här

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2;\ \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} > 2,$$

hvilket visar att $3 < x_2 < 4$.

Afbryta vi utvecklingen på detta steg, kunna vi approximativt bestämma värdet af x_2 medels lineär interpolation, hvarvid erhålles (jmf. s. 27)

$$\frac{x_2 - 3}{1} = \frac{2 - \frac{125}{64}}{\frac{625}{256} - \frac{125}{64}} = \frac{12}{125},$$

eller $x_2 = \frac{387}{125}$. Vi erhålla således för Log 2 närmevärdet

$$\frac{1}{3 + \frac{125}{387}} = \frac{387}{1286} = 0{,}30093\,..$$

Om vi vilja fortsätta kedjebråksutvecklingen, sätta vi

$$x_2 = 3 + \frac{1}{x_3}, \text{ hvaraf } x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x_3}}}$$

Ekvationen (c) reducerar sig då till

$$(d) \qquad \left(\frac{128}{125}\right)^{x_3} = (1,024)^{x_3} = \frac{5}{4}.$$

Roten x_3 till denna likhet ligger mellan 9 och 10, ty man erhåller, med ett fel mindre än en enhet af den tredje decimalen (räkningen ställer sig enkel om man använder förkortad multiplikation),

$$(66) \qquad \begin{aligned} (1,024)^9 &= 1,238 < \frac{5}{4}, \\ (1,024)^{10} &= 1,268 > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Man slutar härur successivt

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{x_3} < \frac{1}{9},$$

$$\frac{31}{10} < 3 + \frac{1}{x_3} < \frac{28}{9},$$

$$\frac{10}{31} > \frac{1}{3 + \frac{1}{x_3}} > \frac{9}{28},$$

$$\frac{103}{31} > 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x_3}} > \frac{93}{28},$$

och slutligen $\frac{31}{103} < x < \frac{28}{93}$, eller

$$0,30097 < x < 0,30108.$$

Alltså är

$$\text{Log } 2 = 0,3010$$

med ett fel mindre än en enhet af fjärde decimalen. Ett noggrannare värde erhålles om vi, utgående från likheterna (66), bestämma värdet af x_3 medels lineär interpolation. Man finner då $x_3 = \frac{47}{5}$, hvarur följer närmevärdet

$$\text{Log } 2 = \frac{146}{485} = 0,301031,$$

hvars fel är mindre är en enhet af den sjette decimalen.

En annan elementär metod för beräkning af logaritmer grundar sig på upprepad användning af formeln

$$\log \sqrt{a\,b} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Vilja vi t. ex. beräkna Log 2, utgå vi från värdena

$$\text{Log } 1 = 0,\ \text{Log } 10 = 1,$$

och erhålla först, då räkningen utföres med fyra decimaler,

$$\sqrt{1\,.\,10} = 3,1623,$$

$$\text{Log } 3,1623 = 0,5000\,.$$

Då 2 ligger mellan 1 och 3,1623, beräkna vi härefter

$$\sqrt{1\,.\,3,1623} = 1,7783,$$

$$\text{Log } 1,7783 = \frac{1}{2}(0 + 0,5000) = 0,2500\,.$$

Då 2 ligger mellan 1,7783 och 3,1623, blir nästa steg i räkningen

$$\sqrt{1,7783\,.\,3,1623} = 2,3714,$$

$$\text{Log } 2,3714 = \frac{1}{2}(0,2500 + 0,5000) = 0,3750.$$

Vi fortsätta på detta sätt, och finna successivt

$$\sqrt{1,7783\,.\,2,3714} = 2,0535,$$

$$\text{Log } 2,0535 = 0,3125.$$

$$\sqrt{1,7783\,.\,2,0535} = 1,9110,$$

$$\text{Log } 1,9110 = 0,2812(5).$$

$$\sqrt{1,9110\,.\,2,0535} = 1,9810,$$

$$\text{Log } 1,9810 = 0,2969.$$

$$\sqrt{1,9810 \, . \, 2,0535} = 2,0169,$$

$$\text{Log}\, 2,0169 = 0,3047.$$

$$\sqrt{1,9810 \, . \, 2,0169} = 1,9989,$$

$$\text{Log}\, 1,9989 = 0,3008.$$

Då räkningen fortsättes, sammanfaller värdet af kvadratroten med faktorernas aritmetiska medeltal, med den grad af noggrannhet som antagits vid beräkningen. Detta innebär att, mellan gränserna 1,9989 och 2,0169, talen variera närmelsevis proportionellt mot deras logaritmer, och att vi således kunna afsluta räkningen medels lineär interpolation mellan nämnda gränser. Härvid erhålles analogin

$$\frac{\text{Log}\, 2 - 0,3008}{0,3047 - 0,3008} = \frac{2,0000 - 1,9989}{2,0169 - 1,9989},$$

hvaraf

$$\text{Log}\, 2 = 0,3010.$$

Kalkylerna enligt denna senare metod ställa sig ganska enkla om kvadratrötterna beräknas enligt det förfarande som angifves i slutet af nästa kapitel.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna de Briggska logaritmerna för talen 3, 5, 7 med tre eller fyra decimaler.

2) De positiva talen p och q äro gifna genom sina Briggska logaritmer:

$$\text{Log}\, p = 1,20953, \quad \text{Log}\, q = 0,67014.$$

Beräkna, med användande af lämpligt valda hjälpvinklar, logaritmerna för uttrycken

$$\sqrt{p^2 + q^2}, \; \sqrt{p^2 - q^2}, \; p \sin 30^\circ - q \cos 30^\circ,$$

samt rötterna till ekvationen

$$x^2 + px + q = 0.$$

3) I en sferisk triangel är sidan $a = 30^\circ\, 9'$, sidan $b = 45^\circ\, 20'$ och mellanliggande vinkel $C = 87^\circ\, 15'$. Beräkna sidan c, enligt formeln

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

genom att införa en lämplig hjälpvinkel.

Andra kapitlet.

Räkning med approximativa värden.

17. **Olika frågeställningar vid approximativ kalkyl.** — I matematikens numeriska tillämpningar inträffar det oupphörligt att man för vissa i kalkylen ingående tal icke använder deras exakta värden, utan *approximativa* eller *närmevärden*, d. v. s. värden behäftade med större eller mindre fel. Detta är alltid nödvändigt då det uttryck som skall beräknas innehåller kvantiteter hvilka bestämts genom observation af ett eller annat slag och därför äro kända endast med en viss grad af noggrannhet. I fysiken och i astronomin har man sålunda ständigt att operera med approximativa värden. Men äfven inom matematikens eget område står man ofta inför samma nödvändighet, nämligen i alla de fall då det uttryck som skall beräknas innehåller något irrationellt tal, för hvilket man naturligtvis är tvungen att vid den numeriska räkningen använda ett afkortadt värde. En dylik afkortning blir af praktiska skäl nödvändig vid beräkningen af uttryck som innehålla decimaltal med många decimaler eller andra bråk med stor nämnare.

De olika frågor som ställa sig vid räkning med approximativa värden, gruppera sig kring följande tre problem:

1°. *Att bestämma noggrannheten af det värde som erhålles för ett gifvet numeriskt uttryck, då för vissa däri ingående tal användas approximativa värden hvilkas noggrannhet är känd.*

Man kan sålunda fråga sig huru noggranna värden man erhåller för uttrycken $\pi^2, \frac{1}{\pi}\ \sqrt{\pi}$, om för π användes närmevärdet 3,14, eller det noggrannare värdet 3,1416.

Vi anföra ännu följande exempel från fysiken, som senare i detalj behandlas:

(a) För att beräkna tyngdkraftens acceleration g har man uppmätt längden l af en pendel, samt bestämt den tid T under hvilken pendeln gör en enkel svängning. Härvid har man erhållit värdena

$$l = 0{,}9761 \text{ meter}, \quad T = 0{,}99052 \text{ sekunder},$$

hvilkas fel uppskattas vara mindre än $0{,}3$ mm. resp. $0{,}0001$ sekund. Med hvilken noggrannhet kan man härur beräkna g, om pendelns svängningar antagas så små att formeln

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{eller} \quad g = l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$$

utan märkbart fel kan användas?

2°. *Att afgöra huru noggranna värden man bör använda för de i ett gifvet uttryck ingående kvantiteterna, för att erhålla uttryckets värde med en föreskrifven grad af noggrannhet.*

Såsom exempel må anföras följande uppgifter:

(b) Produkten $\pi\sqrt{2}$ skall beräknas med ett fel mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$. Huru noggranna värden bör man använda för π och för $\sqrt{2}$?

(c) Huru noggrant värde bör man använda för π för att erhålla den absoluta vinkelenheten $\frac{180^\circ}{\pi}$ med ett fel mindre än $0'',005$?

(d) $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ skall beräknas med ett fel mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$. Huru noggrant värde bör uträknas för $\sqrt{5}$?

Sedan de ofvan formulerade problemen lösts, ställa sig nya spörsmål vid räkningens praktiska utförande. Man finner t. ex. vid lösning af uppgiften (b) att man bör medtaga åtta decimaler såväl i värdet för π som i värdet för $\sqrt{2}$, och således för dessa tal använda närmevärdena

$$\pi = 3{,}14159265\,, \quad \sqrt{2} = 1{,}41421356\,.$$

Om dessa värden på vanligt sätt multipliceras, kommer produkten att innehålla sexton decimaler. Af dessa är emellertid redan den åttonde osäker, och de följande decimalerna

äro således utan hvarje betydelse, hvarför det icke kommer i fråga att bibehålla dem i slutresultatet. Här ställer sig således uppgiften att anordna multiplikationen på sådant sätt att endast de signifikativa siffrorna i resultatet behöfva uträknas.

Vid behandling af uppgiften (*c*) skola vi finna att man bör medtaga sju decimaler i värdet för π. Man har således att utföra divisionen

$$\frac{180}{3{,}1415927},$$

och kvoten bör uträknas med sex decimaler. Det är emellertid klart att, vid beräkningen af de senare af dessa decimaler, divisorns sista siffror icke spela någon roll, och vi stå här således åter inför den praktiska frågan huru man på enklaste sätt kan utföra divisionen för att erhålla kvoten med den föreskrifna graden af noggrannhet.

En tredje hufvudfråga vid numerisk kalkyl är sålunda följande:

3°. *Huru kunna de elementära räkneoperationerna på enklaste sätt utföras så att resultatet erhålles med en föreskrifven grad af noggrannhet?*

Vi skola i sådant afseende angifva reglerna för s. k. *förkortad* multiplikation och division, äfvensom en förenklad metod för kvadratrotens beräkning.

18. **Absolut fel och relativt fel.** — Vi beteckna med $\bar{a}$ det riktiga eller *exakta* värdet af en viss kvantitet, med a det *approximativa* värde eller *närmevärde* vi i kalkylen använda för densamma. Skillnaden mellan det exakta och det approximativa värdet beteckna vi med Δa:

$$\Delta a = \bar{a} - a, \quad \bar{a} = a + \Delta a;$$

Δa är sålunda den *korrektion* man bör addera till det approximativa värdet för att erhålla det exakta värdet; korrektionens numeriska värde $|\Delta a|$ utgör det *fel* hvarmed det approximativa värdet a är behäftadt. Om $a < \bar{a}$ och således $\Delta a > 0$,

säges a utgöra ett *undre* närmevärde för $\bar{a}$, däremot ett *öfre* närmevärde om $a > \bar{a}$ och således $\Delta a < 0$.

I approximativ kalkyl kommer det icke i fråga att angifva korrektionens precisa värde, hvilket för öfrigt ofta är omöjligt, utan man inskränker sig till att angifva *en öfre gräns för felet*, d. v. s. ett sådant positivt tal δ att

$$|\Delta a| < \delta \text{ eller } -\delta < \Delta a < \delta .$$

Det exakta värdet $\bar{a} = a + \Delta a$ ligger då mellan gränserna

$$a - \delta < \bar{a} < a + \delta ,$$

och omvändt ligger a mellan gränserna

$$\bar{a} - \delta < a < \bar{a} + \delta .$$

Känner man därtill korrektionens tecken, kan man angifva trängre gränser för $\bar{a}$: är $\Delta a > 0$ ligger $\bar{a}$ mellan a och $a + \delta$, är $\Delta a < 0$ ligger $\bar{a}$ mellan $a - \delta$ och a.

Vi antaga att det exakta värdet $\bar{a}$ har formen af ett decimaltal med flere än n decimaler. Om vi i detta lemna bort alla decimaler som följa efter den n^{te}, erhålla vi ett undre närmevärde för $\bar{a}$, hvilket kan skrifvas under formen $\frac{k}{10^n}$, där k är ett helt tal. Om i detta värde den sista decimalen ökas med en enhet, erhålles värdet $\frac{k+1}{10^n}$, som utgör ett öfre närmevärde för $\bar{a}$. Alltså är

$$\frac{k}{10^n} < \bar{a} < \frac{k+1}{10^n} . \tag{1}$$

Värdena

$$\frac{k}{10^n}, \; \frac{k+1}{10^n} \tag{2}$$

utgöra sålunda de på hvarandra följande heltaliga multipler af $\frac{1}{10^n}$ mellan hvilka det exakta värdet $\bar{a}$ faller, och skilja sig följaktligen båda från $\bar{a}$ med mindre än $\frac{1}{10^n}$. Vi benämna dessa värden (2) kort det gifna talets (undre och öfre) *närme-*

värden på $\frac{1}{10^n}$ *när* [1]), och *att beräkna* $\bar{a}$ *på* $\frac{1}{10^n}$ *när* vill säga att bestämma något af värdena (2), likgiltigt hvilket.

Exempelvis äro närmevärdena för talet

$$\pi = 3,14159265358979\ldots$$

på $\frac{1}{10^2}$ när 3,14 och 3,15, på $\frac{1}{10^3}$ när 3,141 och 3,142, o. s. v. På samma sätt utgöras närmevärdena för 379015 på 10^3 när af talen 379000 och 380000, närmevärdena för 37,89 på en enhet när äro 37 och 38, o. s. v.

Det af närmevärdena (2) som kommer det exakta värdet $\bar{a}$ närmare, och hvilket således skiljer sig från detta med mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$, benämnes *värdet af* $\bar{a}$ *afkortadt till n decimaler*, eller, kortare, *värdet af* $\bar{a}$ *med n decimaler* [2]).

Exempelvis är värdet af talet π med två decimaler 3,14, med tre decimaler 3,142, med fyra decimaler 3,1416, med fem decimaler 3,14159, o. s. v.

Om a är ett godtyckligt närmevärde för $\bar{a}$ hvars fel är mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$, är

$$\bar{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n} < a < \bar{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$$

och således, enligt (1),

$$\frac{k - \frac{1}{2}}{10^n} < a < \frac{k + 1 + \frac{1}{2}}{10^n}.$$

---

[1]) Allmänt förstår man med ett tals *närmevärden på en* m^{te} *del när* de på hvarandra följande heltaliga multipler af $\frac{1}{m}$ mellan hvilka talet faller.

[2]) Om i talet $\bar{a}$ den $(n+1)^{sta}$ decimalen är 5 och alla följande 0, ligger dess värde midt emellan närmevärdena (2) och skiljer sig från hvartdera af dem med precis $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$. I detta fall kan hvilket som helst af nämnda närmevärden väljas till afkortadt värde för $\bar{a}$.

Dessa olikheter visa oss att, om man söker den heltaliga multipel af $\frac{1}{10^n}$ som kommer a närmast, eller, annorlunda uttryckt, om närmevärdet a afkortas till n decimaler, man erhåller någotdera af värdena (2). Alltså:

För att beräkna ett tal $\bar{a}$ *på* $\frac{1}{10^n}$ *när, är det tillräckligt att söka ett närmevärde* a *hvars fel är mindre än* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$, *och afkorta detta värde till* n *decimaler.*

För att säkert erhålla det af värdena (2) som kommer $\bar{a}$ närmare, måste man däremot utföra räkningen noggrannare, t. ex. så att felet blir mindre än $\frac{1}{10^{n+1}}$, eller i vissa fall t. o. m. ännu noggrannare. Om man sålunda beräknat π med ett fel $< \frac{1}{10^2}$, ligger det erhållna närmevärdet mellan gränserna 3,1516... och 3,1316..., och då detsamma afkortas till en decimal, kunde det således inträffa att man erhölle värdet 3,2 i stället för 3,1.

En analog anmärkning gäller det fall då man söker det mindre af värdena (2) och således vill beräkna de n första decimalerna af det exakta värdet $\bar{a}$.

Noggrannheten vid bestämningen af en kvantitets värde framgår icke enbart ur storleken af det fel som därvid blifvit begånget, utan är det nödvändigt att tillika angifva storleken af kvantiteten själf. Om man sålunda vet att, vid mätningen af ett afstånd, begåtts ett fel af t. ex. 1 meter, säger detta ännu intet om mätningens noggrannhet, så länge icke afståndets egen storlek angifves. Är denna t. ex. 1000 meter, måste mätningens noggrannhet uppenbarligen betecknas såsom mycket större än om samma fel begåtts vid mätningen af ett afstånd af 100 meters eller af endast 10 meters längd. I första fallet utgör felet $\frac{1}{1000}$, i andra fallet $\frac{1}{100}$, i tredje fallet $\frac{1}{10}$ af själfva den uppmätta kvantiteten. Dessa förhållanden: $\frac{1}{1000}$,

$\frac{1}{100}, \frac{1}{10}$, hvilka benämnas de *relativa* felen vid de betraktade mätningarna, gifva den bästa föreställningen om dessas noggrannhet.

Med *det relativa felet* vid bestämningen af en kvantitets värde menas således *förhållandet mellan felet och kvantitetens exakta värde*. Enligt den ofvan antagna beteckningen är sålunda

$$\text{relativa felet i närmevärdet } a = \frac{|\Delta a|}{\bar{a}}.$$

Det relativa felets storlek angifves ofta i procent, d. v. s. i hundradedelar.

Till åtskillnad från det relativa felet benämnes $|\Delta a|$ ofta det *absoluta* felet.

Om man vid beräkningen af en kvantitet $\bar{a}$ funnit ett närmevärde a och vet att dettas fel $|\Delta a|$ är mindre än δ, kan man äfven angifva en öfre gräns för det relativa felet. Ty det exakta värdet $\bar{a}$ är större än $a - \delta$, och ur olikheterna $|\Delta a| < \delta, \bar{a} > a - \delta$ följer

$$\frac{|\Delta a|}{\bar{a}} < \frac{\delta}{a - \delta}.$$

Vill man omvändt beräkna kvantiteten $\bar{a}$ med ett relativt fel mindre än ett föreskrifvet tal δ', har man att göra det absoluta felet $|\Delta a|$ mindre än $\bar{a}\delta'$. För att t. ex. beräkna π^2 med ett relativt fel $< \frac{1}{10000}$, bör man sålunda utföra räkningen med sådan noggrannhet att det absoluta felet blir $< \frac{\pi^2}{10000}$.

Uttrycket för det relativa felet kan skrifvas

$$\frac{|\Delta a|}{\bar{a}} = \frac{|\Delta a|}{a + \Delta a} = \frac{|\Delta a|}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta a}{a}}.$$

Om mätningen är någorlunda noggrann, är $\frac{\Delta a}{a}$ ett litet tal och den senare faktorn i högra membrum således nära lika med 1. Förhållandet $\frac{|\Delta a|}{a}$ mellan det absoluta felet och det

approximativa värdet anger således det relativa felets storlek med en för praktiska ändamål tillräcklig grad af noggrannhet.

Öfningsuppgifter:

1) Bestäm det absoluta och det relativa felet hos det af ARCHIMEDES angifna närmevärdet $\frac{22}{7}$ för talet π.

2) Enligt teorin för kedjebråk utgör bråket $\frac{239}{169}$ ett undre närmevärde för $\sqrt{2}$ hvars fel är mindre än 1 divideradt med två gånger nämnarens kvadrat. Hvilka gränser följa härur för talet $\sqrt{2}$ och huru många säkra decimaler erhållas i dess utveckling?

3) Bevisa att, om ett decimaltal afkortas till ett visst antal decimaler, det relativa felet hos det afkortade värdet i allmänhet är mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{m-1}}$, där m betecknar antalet signifikativa siffror i nämnda värde.

4) Årets längd är, med fyra decimaler, 365,2422 dygn (medelsoldygn). Beräkna felet i årets medellängd enligt den Gregorianska kalendern, och angif inom huru lång tid afvikelsen uppgår till ett dygn.

19. **Uppskattning af felet vid addition och subtraktion.** — Vi betrakta en summa af ett antal positiva eller negativa tal

$$\bar{S} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n.$$

Om vi i stället för de exakta värdena $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ använda approximativa värden, $a_1, a_2, \ldots$, hvilkas korrektioner må betecknas med $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots$, erhålla vi för $\bar{S}$ närmevärdet

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

hvars korrektion har till uttryck

$$\Delta S = \bar{S} - S = (\bar{a}_1 - a_1) + (\bar{a}_2 - a_2) + \cdots + (\bar{a}_n - a_n)$$

eller

$$\Delta S = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_n,$$

och således är lika med summan af termernas korrektioner. Härur följer

$$|\Delta S| \leq |\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \cdots + |\Delta a_n|,$$

där likhetstecknet gäller endast om de af korrektionerna $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots$ som icke äro 0 alla hafva samma tecken (jmf. satsen s. 40—41). Om man vet att

$$(3) \qquad |\Delta a_1| < \delta_1, |\Delta a_2| < \delta_2, \ldots, |\Delta a_n| < \delta_n,$$

erhålles för summans fel $|\Delta S|$ den öfre gränsen

$$|\Delta S| < \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n.$$

Äro jämväl tecknen för korrektionerna $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots$. kända, kan man angifva noggrannare gränser för ΔS. Om man t. ex. antar att af korrektionerna μ äro positiva och ν negativa, samt att det numeriska värdet af hvarje korrektion är $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$, finner man för ΔS gränserna

$$-\frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{10^m} < \Delta S < \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{10^m}.$$

Gäller det omvändt att beräkna summan $\bar{S}$ med en föreskrifven grad af noggrannhet, t. ex. så att felet $|\Delta S|$ blir mindre än ett gifvet tal ε, behöfver man endast välja talen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ så att deras summa blir $\leqq \varepsilon$, samt beräkna termerna i $\bar{S}$ med sådan noggrannhet att deras fel uppfylla villkoren (3). Exempelvis är det tillräckligt om felet i hvarje term är mindre än $\frac{\varepsilon}{n}$.

Beträffande subtraktionen af tvenne tal göra vi ännu följande anmärkning. Om det gäller att beräkna skillnaden $\bar{a} - \bar{b}$ på $\frac{1}{10^n}$ när (jmf. s. 112), är det tillräckligt om man för båda talen $\bar{a}$, $\bar{b}$ använder deras öfre närmevärden på $\frac{1}{10^n}$ när, eller för båda talen de undre närmevärdena på $\frac{1}{10^n}$ när. Ty om a, b är någotdera af dessa tvenne par närmevärden, och om man sätter

$$\bar{a} = a + \Delta a, \quad \bar{b} = b + \Delta b$$

hvaraf

$$\bar{a} - \bar{b} = (a - b) + (\Delta a - \Delta b),$$

hafva Δa och Δb samma tecken och äro båda numeriskt mindre än $\frac{1}{10^n}$, hvaraf följer att deras skillnad $(\Delta a - \Delta b)$ äfven är numeriskt mindre än $\frac{1}{10^n}$. Närmevärdet $a - b$, som har formen af ett decimaltal med n decimaler, skiljer sig följaktligen från det exakta värdet $\bar{a} - \bar{b}$ med mindre än $\frac{1}{10^n}$, och utgör således ett närmevärde för $\bar{a} - \bar{b}$ på $\frac{1}{10^n}$ när.

Vi tillämpa ofvanstående enkla betraktelser på summan

$$\bar{S} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!},$$

hvars värde vi föresätta oss att beräkna på $\frac{1}{10^7}$ när. Vi veta (jmf. s. 113) att det för detta ändamål är tillräckligt, om vi beräkna ett närmevärde S hvars fel $|\Delta S|$ är $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}$, och afkorta detta närmevärde till sju decimaler.

För de tre första termerna i summan använda vi naturligtvis deras exakta värden, medan de åtta återstående termernas decimalbråksutvecklingar, hvilka äro periodiska, måste afkortas. För att ernå den föreskrifna noggrannheten i slutresultatet är det tillräckligt att uträkna enhvar af dessa åtta termer med ett fel $< \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10^8}$. Vi afkorta därför dessa termers värden till 8 decimaler, hvarvid felet i hvarje term blir $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^8}$ och således mindre än den erforderliga gränsen. Efter hvarje term angifva vi inom parentes tecknet för dess korrektion, hvilket omedelbart framgår ur räkningen.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2{,}5$$

$$\frac{1}{3!} = 0{,}16666667 \ (-)$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}04166667 \ (-)$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}00833333 \ (+)$$

$$\frac{1}{6!} = 0{,}00138889 \ (-)$$

$$\frac{1}{7!} = 0{,}00019841 \ (+)$$

$$\frac{1}{8!} = 0{,}00002480 \ (+)$$

$$\frac{1}{9!} = 0{,}00000276 \ (-)$$

$$\frac{1}{10!} = 0{,}00000028 \ (-)$$

$$S = 2{,}71828181 .$$

Vid afkortning till 7 decimaler erhålles närmevärdet

$$(4) \qquad 2{,}7182818 ,$$

och vi äro säkra om att detta skiljer sig från det exakta värdet $\overline{S}$ med mindre än en enhet af sista decimalen.

En noggrannare uppskattning erhålles om man beaktar tecknen för termernas korrektioner. Då tre af dessa äro positiva och fem negativa, medan enhvar af dem är numeriskt mindre än $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^8}$, ligger summans korrektion ΔS mellan gränserna

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10^8} = 0{,}000000015 \quad \text{och} \quad -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10^8} = -0{,}000000025,$$

och summans exakta värde $\overline{S} = S + \Delta S$ faller således mellan gränserna

$$2{,}718281785 < \overline{S} < 2{,}718281825,$$

hvilket visar oss att närmevärdet (4) faktiskt skiljer sig från det exakta värdet $\overline{S}$ med mindre än $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^7}$.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna skillnaden $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

a) med ett relativt fel mindre än 1 %; b) på $\frac{1}{10^4}$ när.

2) Beräkna värdet af summan

$$\frac{18257}{32549} + \frac{423678}{59474} + \frac{27}{9953}$$

med två decimaler[1]).

20. **Förkortad multiplikation.** — Om det gäller att multiplicera två hela tal eller decimaltal med flere siffror, och om man icke åstundar att erhålla produktens exakta värde utan åtnöjer sig med en viss föreskrifven grad af noggrannhet, kan det vanliga multiplikationsförfarandet väsentligen förenklas.

Vi antaga t. ex. att det gäller att beräkna produkten

$$9,34781 \,.\, 0,260593$$

på $\frac{1}{10^4}$ när. Vi utföra först multiplikationen på det vanliga sättet, dock med den skillnad i uppställningen att vi uppskrifva partialprodukterna i den ordning i hvilken de erhållas då multiplikatorns siffror genomlöpas från venster till höger. Härigenom ernås bl. a. den fördel att partialprodukterna blifva ordnade efter aftagande storlek, hvilket är naturligare än att ställa den minsta partialprodukten främst, såsom vanligen brukas. För jämförelsens skull utskrifva vi den vanliga uppställningen vid sidan af den nya.

9,34781	9,34781
0,260593	0,260593
1,869562	2804343
5608686	8413029
4673905	4673905
8413029	5608686
2804343	1,869562
2,43597385133	2,43597385133

Man ser nu genast att det, för erhållande af produktens värde på $\frac{1}{10^4}$ när, ingalunda är nödvändigt att uträkna

---

[1]) Att „beräkna värdet af en kvantitet med n decimaler“ vill säga att bestämma det till n decimaler afkortade värdet af denna kvantitet (jmf. s. 112).

partialprodukterna fullständigt, utan att det är tillräckligt att beräkna deras värden med fem decimaler. Felet i hvarje partialprodukt blir då mindre än $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$ och summans fel således mindre än $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^4}$, hvilket är fullt tillräckligt. Räkningen ställer sig som följer:

$$\begin{array}{r} 9,34781 \\ 0,260593 \\ \hline 1,86956 \\ 56087 \\ 467 \\ 84 \\ 3 \\ \hline 2,43597 \end{array}$$

Vid afkortning till fyra decimaler erhålla vi närmevärdet 2,4360, hvilket säkert skiljer sig från produktens exakta värde med mindre än en enhet af sista decimalen (jmf. s. 113).

För att underlätta räkningen är det lämpligt att, vid bildandet af hvarje partialprodukt, från slutet af multiplikanden medels ett vertikalt streck afskilja de siffror hvilka endast bidraga till den *minnessiffra* man har att observera på det sista i räkningen medtagna decimalstället, i förevarande exempel det femte decimalstället. För hvarje ny partialprodukt kommer man sålunda att afskilja en siffra till från slutet af multiplikanden. Likaledes är det lämpligt att utmärka med en accent (eller öfverkorsa) de redan använda siffrorna i multiplikatorn.

För tydlighetens skull utskrifva vi här de successiva steg man har att göra i ofvanstående multiplikation, med användande af det beteckningssätt vi föreslagit.

$$\begin{array}{r} 9,3478|1 \\ 0,260593 \\ \hline 1,86956 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9,347|8|1 \\ 0,\acute{2}60593 \\ \hline 1,86956 \\ 56087 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9,3|4|7|8|1 \\ 0,\acute{2}\acute{6}\acute{0}593 \\ \hline 1,86956 \\ 56087 \\ 467 \end{array}$$

9,|3|4|7|8|1	|9,|3|4|7|8|1
0,260593	0,260593
1,86956	1,86956
56087	56087
467	467
84	84
	3
	2,43597

De minnessiffror man har att observera vid bildandet af de successiva partialprodukterna utgöras af de till närmaste hela tal afkortade värdena af produkterna

$$2 . 0{,}1 , \quad 6 . 0{,}81 , \quad 5 . 0{,}4781 , \quad 9 . 0{,}34781 , \quad 3 . 0{,}934781 .$$

Man ser omedelbart att ifrågavarande minnessiffror äro 0, 5, 2, 3, 3 [1]).

Om man vid multiplikationen af två tal afkortar samtliga partialprodukter till n decimaler [2]), blir felet i det er-

[1]) Den förkortade multiplikationen kan anordnas på flere olika sätt. Man kan exempelvis, såsom i flere läroböcker rekommenderas, vid partialprodukternas afkortning lemna minnessiffran ur räkningen och således helt och hållet negligera de siffror hvilka vi ofvan afskilt från multiplikanden. Detta innebär visserligen en förenkling, men i stället ökas felet i resultatet väsentligen, så att man, för att uppnå den föreskrifna graden af noggrannhet, blir tvungen att räkna med flere decimaler än enligt det i texten angifna förfarandet, hvarförutom uppskattningen af felets storlek ställer sig väsentligen mindre enkel.

Beträffande räkningens uppställning må ännu anmärkas, att det i vissa afseenden är fördelaktigt att uppskrifva multiplikatorns siffror i omvänd ordningsföljd, så att dess första siffra kommer att stå under den siffra i multiplikanden som närmast föregår de siffror vi afskilt från densamma. I ofvanstående exempel skulle talen sålunda uppskrifvas på följande sätt (decimalkommata behöfva icke utsättas):

93478|1
395062

Vid denna uppställning kommer hvarje siffra i multiplikatorn att multipliceras endast med de siffror i multiplikanden som stå ofvanom och till venster om densamma, hvarjämte man, enligt det i texten föreslagna förfarandet, har att observera minnessiffran.

[2]) Vid räkningens början har man härvid att från slutet af multiplikanden afskilja så många siffror, att produkten af enheten för den

hållna värdet för produkten säkert mindre än $\frac{k}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, där k betecknar antalet afkortade partialprodukter. Noggrannare gränser kunna erhållas för resultatets korrektion om man observerar tecknen för partialprodukternas korrektioner. Man kan härur i hvarje gifvet fall lätt sluta till antalet decimaler hvarmed räkningen bör ställas för ernående af en föreskrifven grad af noggrannhet i slutresultatet. *Vill man hafva produktens värde på* $\frac{1}{10^n}$ *när, är det i allmänhet tillräckligt att räkna med* $n+1$ *decimaler*, och detta är säkert fallet om antalet från 0 skilda siffror i multiplikatorn icke öfverstiger tio.

Vi vilja såsom öfning ännu beräkna produkten af talen

$$\pi = 3{,}14159265358\ldots, \quad \sqrt{2} \doteq 1{,}41421356237\ldots$$

med ett fel $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}$. Vi afkorta partialprodukterna till åtta decimaler (vi antaga således att vi af de gifna talen känna så många decimaler som härför erfordras) och utsätta efter hvarje produkt tecknet för dess korrektion. För tydlighetens skull utskrifva vi tillika vid sidan af hvarje afkortad produkt motsvarande exakta produkt. Räkningen ställer sig som följer:

3,14159265|358 ..	
1,41421356 237 ..	
3,14159265 (+)	$= \pi \,.\, 1$
1,25663706 (+)	$= \pi \,.\, 0{,}4$
3141593 (−)	$= \pi \,.\, 0{,}01$
1256637 (+)	$= \pi \,.\, 0{,}004$
62832 (−)	$= \pi \,.\, 0{,}0002$
3142 (−)	$= \pi \,.\, 0{,}00001$
942 (+)	$= \pi \,.\, 0{,}000003$
157 (+)	$= \pi \,.\, 0{,}0000005$
19 (−)	$= \pi \,.\, 0{,}00000006$
1 (−)	$= \pi \,.\, 0{,}00000000237\ldots$
4,44288294	

---

närmast föregående siffran och enheten för den första siffran i multiplikatorn blir lika med $\frac{1}{10^n}$.

Då partialprodukternas antal är tio, är felet i resultatet säkert mindre än $\frac{10}{2} \cdot \frac{1}{10^8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}$; vi sluta häraf, i det vi afkorta till sju decimaler, att värdet

$$4,4428829$$

utgör ett närmevärde på $\frac{1}{10^7}$ när för produkten $\pi \sqrt{2}$. Om man ytterligare beaktar att af partialprodukternas korrektioner fem äro positiva och fem negativa, erhåller man såsom gränser för resultatets korrektion

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10^8} = \frac{25}{10^9} \text{ och } -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10^8} = -\frac{25}{10^9},$$

hvaraf följer att det exakta värdet af $\pi \sqrt{2}$ ligger mellan gränserna

$$4,442882915 \text{ och } 4,442882965.$$

Öfningsuppgifter:

1) Hvilka närmevärden erhållas för produkten

$$8,296 . 7,814$$

om man successivt afkortar partialprodukterna till en, två, tre, fyra, fem decimaler? Uppskatta för hvarje gång felets storlek och gränserna för produktens exakta värde.

2) Beräkna på en million när värdet af produkten

$$837484 \cdot 347371.$$

3) Beräkna värdet af π^2 med åtta decimaler.

21. **Förkortad division.** — För enkelhetens skull börja vi med ett speciellt exempel. Vi bilda ett närmevärde för kvoten

$$(5) \qquad \frac{229,4703568}{7,359412},$$

sålunda att vi afkorta dividenden samt produkterna af divisorn och de successiva siffrorna i kvoten till fyra decimaler, och fortsätta räkningen tills vi erhålla resten 0. Då första siffran i kvoten kommer att angifva tiotal, hafva vi vid räk-

ningens början att medtaga fem decimaler af divisorn (jmf. not (2) s. 121); enheten för den sista af dessa decimaler, $\frac{1}{10^5}$, multiplicerad med enheten för den första siffran i kvoten, hvilken som sagdt är 10, ger oss då till produkt $\frac{1}{10^4}$, d. v. s. enheten för den fjärde decimalen. Den enda återstående decimalen i divisorn afskilja vi med ett vertikalt streck, och vid hvarje följande steg i räkningen hafva vi att afskilja en siffra till från divisorn. För att åskådliggöra de successiva faserna af räkningen, uppskrifva vi vid hvarje rest ånyo divisorn jämte de redan erhållna siffrorna i kvoten.

<table>
<tr><td>229,4704</td><td>7,35941|2</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>220,7824</td><td></td></tr>
<tr><td>8,6880</td><td>7,3594|1|2</td></tr>
<tr><td></td><td>31</td></tr>
<tr><td>7,3594</td><td></td></tr>
<tr><td>1,3286</td><td>7,3594|1|2</td></tr>
<tr><td></td><td>31,1</td></tr>
<tr><td>7359</td><td></td></tr>
<tr><td>5927</td><td>7,35|9|4|1|2</td></tr>
<tr><td></td><td>31,18</td></tr>
<tr><td>5888</td><td></td></tr>
<tr><td>39</td><td>7,3|5|9|4|1|2</td></tr>
<tr><td></td><td>31,180</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>39</td><td>7,|3|5|9|4|1|2</td></tr>
<tr><td></td><td>31,1805</td></tr>
<tr><td>37</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>|7,|3|5|9|4|1|2</td></tr>
<tr><td></td><td>31,18053</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Vi ha kommit till resten 0 genom att från den afkortade dividenden subtrahera det närmevärde som erhålles för

produkten af divisorn och kvoten då vid multiplikationen samtliga partialprodukter afkortas till fyra decimaler. För tydlighetens skull utskrifva vi denna förkortade multiplikation här nedan:

$$\begin{array}{r} 7{,}35941|2 \\ 31{,}18053 \\ \hline 220{,}7824 \\ 7{,}3594 \\ 7359 \\ 5888 \\ 37 \\ 2 \\ \hline 229{,}4704. \end{array}$$

Det exakta värdet af produkten i fråga skiljer sig med mindre än $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{3}{10^4}$ från värdet 229,4704, och då detta i sin tur skiljer sig med mindre än $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$ från dividendens exakta värde, kunna vi sluta att skillnaden

$$229{,}4703568 - 7{,}359412 \,.\, 31{,}18053$$

är numeriskt mindre än $\frac{3}{10^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{3{,}5}{10^4} \cdot$ Härur följer vidare då vi dividera med 7,359412,

$$\left| \frac{229{,}4703568}{7{,}359412} - 31{,}18053 \right| < \frac{1}{7{,}359412} \cdot \frac{3{,}5}{10^4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot$$

Det exakta värdet af kvoten (5) ligger således mellan gränserna

$$31{,}18048 \quad \text{och} \quad 31{,}18058$$

och skiljer sig följaktligen från värdet 31,1805 med mindre än $\frac{1}{10^4} \cdot$

Vi skola nu framställa det ofvan beskrifna förfarandet under en allmännare form. Vi antaga att det gäller att approximativt beräkna värdet af kvoten

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}},$$

där $\bar{a}$ och $\bar{b}$ äro decimaltal med ett ändligt eller oändligt antal decimaler. För detta ändamål afkorta vi först dividenden till n decimaler, och ersätta således $\bar{a}$ med ett närmevärde $a = \bar{a} - \Delta a$, där $|\Delta a| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Under divisionens gång afkorta vi likaledes produkterna af divisorn och de successiva siffrorna i kvoten till n decimaler [1]), samt fortsätta räkningen tills vi erhålla resten 0. Det sålunda erhållna närmevärdet för kvoten beteckna vi med q, och detta närmevärdes korrektion med Δq.

Vid divisionen hafva vi kommit till resten 0 genom att från den afkortade dividenden $\bar{a} - \Delta a$ successivt subtrahera de till n decimaler afkortade produkterna af divisorn $\bar{b}$ med enhvar af siffrorna i kvoten q. Om vi med P beteckna det närmevärde för produkten $q\bar{b}$ som framgår ur denna förkortade multiplikation, är således

$$\bar{a} - \Delta a = P.$$

Beteckna vi vidare med ΔP korrektionen för närmevärdet P, är $q\bar{b} = P + \Delta P$, eller

$$P = q\bar{b} - \Delta P.$$

Ur dessa likheter följer $\bar{a} - \Delta a = q\bar{b} - \Delta P$, eller

$$\bar{a} - q\bar{b} = \Delta a - \Delta P,$$

eller ännu, om vi dividera med $\bar{b}$,

$$(6) \qquad \Delta q = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} - q = \frac{\Delta a - \Delta P}{\bar{b}}.$$

Nu är $|\Delta a| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, och å andra sidan är felet $|\Delta P|$ vid den förkortade multiplikationen af $\bar{b}$ och q mindre än

---

[1]) Vid räkningens början bör man från slutet af divisorn (med ett vertikalt streck) afskilja så många siffror, att enheten för den närmast föregående siffran, multiplicerad med enheten för den första siffran i kvoten, ger till produkt $\frac{1}{10^n}$.

$\frac{k}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, där k betecknar antalet från 0 skilda siffror i q. Ur likheten (6) kunna vi således för felet $|\Delta q|$ i den erhållna kvoten härleda den öfre gränsen

$$(7) \qquad |\Delta q| < \frac{1}{\bar{b}} \cdot \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Noggrannare gränser erhållas för Δq om man observerar tecknen för Δa och för de afkortade partialprodukternas korrektioner.

Det är i flere afseenden lämpligt att före divisionen förlänga den gifna kvoten med en sådan potens af 10, att divisorns första siffra kommer att utmärka enheter. Om detta villkor är uppfylldt, är $\frac{1}{\bar{b}} < 1$ och olikheten (7) ger oss

$$|\Delta q| < \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Är $k < 10$, följer härur $|\Delta q| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}$, och vi erhålla således, genom att afkorta q till $n-1$ decimaler, ett närmevärde för $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ på $\frac{1}{10^{n-1}}$ när. I regel är naturligtvis $|\Delta q|$ betydligt mindre än den angifna gränsen.

För att på $\frac{1}{10^n}$ när beräkna värdet af en kvot $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, där $1 < \bar{b} < 10$, är det således i allmänhet tillräckligt att afkorta dividenden och partialprodukterna till $n+1$ decimaler, och detta är säkert fallet om det härvid erhållna värdet för kvoten icke innehåller flere än nio från 0 skilda siffror.

Såsom en tillämpning af det ofvan sagda skola vi ännu behandla uppgiften att beräkna den absoluta vinkelenheten $\frac{180^\circ}{\pi}$ på $0'',01$ när. Uttryckt i bågsekunder är denna kvantitets värde

$$\frac{648000}{\pi},$$

och vi hafva således att beräkna värdet af denna kvot på $\frac{1}{10^2}$ när. Vi ställa för detta ändamål räkningen med tre deci-

maler, utsätta tecknen för partialprodukternas korrektioner, samt utskrifva för tydlighetens skull åter vid hvarje erhållen rest divisorn jämte de redan beräknade siffrorna i kvoten. Då enheten för den första siffran i kvoten är 10^5, hafva vi vid räkningens början att i divisorn medtaga åtta decimaler. (Vi antaga åter att vi känna så många decimaler af π som erfordras för erhållande af de afkortade partialprodukterna).

```
648000,000          | 3,14159265|358...
                    |--------------------
                    | 2
628318,531 (−)
-----------------
 19681,469          | 3,1415926|5|358...
                    |--------------------
                    | 206
 18849,556 (−)
-----------------
   831,913          | 3,141592|6|5|358...
                    |--------------------
                    | 2062
   628,319 (−)
-----------------
   203,594          | 3,14159|2|6|5|358...
                    |--------------------
                    | 20626
   188,496 (−)
-----------------
    15,098          | 3,1415|9|2|6|5|358...
                    |--------------------
                    | 206264
    12,566 (+)
-----------------
     2,532          | 3,141|5|9|2|6|5|358...
                    |--------------------
                    | 206264,8
     2,513 (+)
-----------------
        19          | 3,14|1|5|9|2|6|5|358...
                    |--------------------
                    | 206264,806
        19 (−)
-----------------
         0
```

Antalet afkortade partialprodukter är sju, och då $\Delta a = 0$ och $\bar{b} > 3$, erhålla vi, enligt (6), $|\Delta q| < \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{10^3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}$. Vi få således såsom närmevärde för $\frac{180^0}{\pi}$ på $0'',01$ när

$$206264'',81 = 57^0\, 17'\, 44'',81\,.$$

Om man observerar tecknen för partialprodukternas korrektioner, erhålles ett ännu noggrannare resultat. Då två af dessa korrektioner äro positiva och fem negativa, ligger ΔP mellan gränserna $\frac{1}{10^3}$ och $-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10^3}$, och enligt (6) ligger således korrektionen Δq mellan gränserna $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10^3}$ och $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^3}$. Alltså utgör det vid divisionen erhållna värdet

$$57^0\,17'\,44'',806$$

ett närmevärde för den absoluta vinkelenheten på $0'',001$ när.

Öfningsuppgifter:

1) Hvilka närmevärden erhållas för kvoten

$$\frac{2,70369}{8,30128}$$

enligt det förkortade divisionsförfarandet, om dividenden och partialprodukterna successivt afkortas till en, två, tre, fyra decimaler? Uppskatta för hvarje gång felets storlek och angif gränserna för kvotens exakta värde.

2) Beräkna med tre decimaler förhållandet mellan talen 75169139 och 2571623, med användande af förkortad division.

3) Beräkna kvoten

$$\frac{2}{1,4142135623 73}$$

på $\frac{1}{10^{10}}$ när.

22. Uppskattning af felet vid multiplikation och division. Om man vid beräkningen af en produkt $k\bar{a}$ för faktorn k använder dess exakta värde men däremot för faktorn $\bar{a}$ ett närmevärde, a, hvars korrektion må betecknas med Δa, erhålles för produkten närmevärdet ka, hvars korrektion är

$$\Delta(ka) = k\bar{a} - ka = k(\bar{a} - a) = k\,\Delta a.$$

Det fel man begår i värdet af faktorn $\bar{a}$ blir således i produkten multipliceradt med k, medan ur likheten

$$\frac{\Delta(ka)}{k\bar{a}} = \frac{\Delta a}{\bar{a}}$$

framgår att produktens relativa fel är detsamma som det relativa felet i värdet för faktorn $\bar{a}$.

Om man exempelvis vill beräkna produkten 50π och härvid för π använder närmevärdet 3,14, hvars fel är ungefär 0,0016, blir felet i resultatet 50 gånger så stort, alltså ungefär 0,08. Vill man omvändt beräkna produkten 50π med en föreskrifven grad af noggrannhet, t. ex. med ett fel mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4}$, bör man för π använda ett närmevärde hvars fel är mindre än $\frac{1}{50}$ af denna gräns, alltså mindre än $\frac{1}{10^6}$.

Vi antaga nu att det gäller att beräkna produkten $\bar{a}\bar{b}$ och att man härvid för båda faktorerna använder approximativa värden, a och b, med korrektionerna $\Delta a = \bar{a} - a$ och $\Delta b = \bar{b} - b$. För produkten erhålles då närmevärdet ab, och dettas korrektion är

$$\Delta(ab) = \bar{a}\bar{b} - ab = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab$$
$$= a\,\Delta b + b\,\Delta a + \Delta a\,\Delta b,$$

hvilket uttryck äfven kan skrifvas

$$\Delta(ab) = \left(a + \frac{\Delta a}{2}\right)\Delta b + \left(b + \frac{\Delta b}{2}\right)\Delta a.$$

Faktorerna

$$a + \frac{\Delta a}{2} = \frac{a + \bar{a}}{2} \quad \text{och} \quad b + \frac{\Delta b}{2} = \frac{b + \bar{b}}{2}$$

ligga mellan gränserna a och $\bar{a}$ resp. b och $\bar{b}$. Om vi med α och β beteckna två tal som uppfylla villkoren

$\alpha \geq$ det större af talen a och $\bar{a}$,

$\beta \geq$ det större af talen b och $\bar{b}$,

är således

(8) $$|\Delta(ab)| \leq \alpha\,|\Delta b| + \beta\,|\Delta a|,$$

hvilken olikhet ger oss *en öfre gräns för produktens fel.* Om tecknen för Δa och Δb äro kända, kan man angifva noggrannare gränser för $\Delta(ab)$.

Såsom en tillämpning af det sagda, skola vi undersöka huru noggranna värden man bör använda för π och $\sqrt{2}$ för att erhålla värdet af produkten $\pi\sqrt{2}$ med ett fel mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$.

a och b må beteckna de närmevärden som komma till användning för nämnda tal, Δa och Δb dessa närmevärdens korrektioner. För kvantiteterna α och β kunna vi använda t. ex. värdena $\alpha = 3,2$, $\beta = 1,5$, ty det är omedelbart klart att man, för ernåendet af den föreskrifna noggrannheten i produkten, måste använda närmevärden a och b som äro mindre än dessa värden, hvilket jämväl efteråt bekräftas af det erhållna resultatet.

Felet i det närmevärde som erhålles för $\pi\sqrt{2}$ är, enligt (8), mindre än uttrycket

$$3,2\,|\Delta b| + 1,5\,|\Delta a|\,.$$

Vi äro således säkra om att i resultatet ernå den föreskrifna graden af noggrannhet om vi göra $|\Delta a|$ och $|\Delta b|$ så små att nämnda uttryck blir $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$. Detta villkor är säkert uppfylldt om $|\Delta a|$ och $|\Delta b|$ båda göras mindre än $\frac{1}{10^8}$. Man kan således för π och $\sqrt{2}$ välja t. ex. något af deras närmevärden på $\frac{1}{10^8}$ när.

Resultatet (8) utsträckes lätt till en produkt af flere faktorer. Om det t. ex. gäller att beräkna produkten $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, och om man för faktorerna använder närmevärden a, b, c, hvilkas korrektioner som vanligt må betecknas $\Delta a, \Delta b, \Delta c$, finner man, genom upprepad tillämpning af (8), olikheten

$$(9) \qquad |\Delta(abc)| \leq \alpha\beta\,|\Delta c| + \beta\gamma\,|\Delta a| + \gamma\alpha\,|\Delta b|\,,$$

där $\Delta(abc)$ betecknar korrektionen för närmevärdet abc och α, β, γ betyda tal som uppfylla villkoren

$$\alpha \geq \text{det större af talen } a \text{ och } \bar{a},$$

$$\beta \geq \text{det större af talen } b \text{ och } \bar{b},$$

$$\gamma \geq \text{det större af talen } c \text{ och } \bar{c}.$$

Läsaren uppmanas att bevisa detta resultat samt att utsträcka det till en produkt af ett godtyckligt antal faktorer.

Vi betrakta ännu en potens $\bar{a}^n$, där n är ett positivt helt tal, och undersöka noggrannheten af det närmevärde a^n som erhålles då för basen $\bar{a}$ användes ett approximativt värde a. Korrektionen för närmevärdet a^n är lika med

$$(10) \quad \Delta(a^n) = \bar{a}^n - a^n = \Delta a \left(\bar{a}^{n-1} + \bar{a}^{n-2} a + \cdots + a^{n-1}\right),$$

där $\Delta a = \bar{a} - a$ betecknar korrektionen för a. Om vi åter välja ett tal α som uppfyller villkoret

$$\alpha \geq \text{det större af talen } a \text{ och } \bar{a},$$

äro termerna inom parentesen enhvar $< \alpha^{n-1}$ och deras summa således $< n\alpha^{n-1}$, hvaraf följer

$$(11) \quad |\Delta(a^n)| < n\alpha^{n-1} |\Delta a|.$$

På liknande sätt kunde man finna en undre gräns för $|\Delta(a^n)|$.

Om i högra membrum af (10) a ersättes med $\bar{a}$ och likheten därefter divideras med $\bar{a}^n$, erhålles den approximativa likheten

$$\frac{\Delta(a^n)}{\bar{a}^n} = n \cdot \frac{\Delta a}{\bar{a}},$$

hvilken är desto närmare riktig ju noggrannare värdet a är. Vi sluta häraf att *det relativa felet i värdet af en potens är approximativt lika med basens relativa fel multipliceradt med exponenten.* Detsamma gäller, enligt hvad ofvan sagts, om produkten $k\bar{a}^n$, där k är en numerisk faktor för hvilken vid räkningen användes dess exakta värde. Om man exempelvis för radien af en sfer känner ett närmevärde r med ett relativt fel α, är således relativa felet i det värde, $4\pi r^2$, som erhålles för sferens yta, ungefär 2α, och det relativa felet i värdet $\frac{4}{3}\pi r^3$ för sferens volym ungefär 3α.

Vi skola slutligen undersöka noggrannheten af det värde som erhålles för en kvot $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, då man för $\bar{a}$ och $\bar{b}$ använder

approximativa värden a och b med korrektionerna Δa och Δb. Korrektionen för det erhållna närmevärdet $\frac{a}{b}$ kan skrifvas

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}-\frac{a}{b}=\frac{a+\Delta a}{b+\Delta b}-\frac{a}{b}=\frac{b\,\Delta a-a\,\Delta b}{b(b+\Delta b)},$$

eller

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b\,\Delta a-a\,\Delta b}{b\,\bar{b}}.$$

Om vi välja ett positivt tal β' som uppfyller villkoret

$$\beta' \leqq \text{det mindre af talen } b \text{ och } \bar{b},$$

erhålla vi såsom öfre gräns för kvotens fel

$$(12) \qquad \left|\Delta\left(\frac{a}{b}\right)\right|<\frac{b\,|\Delta a|+a\,|\Delta b|}{\beta'^2}.$$

Äro tecknen för Δa och Δb bekanta, kan man angifva noggrannare gränser för $\Delta\left(\frac{a}{b}\right)$.

Om speciellt $\Delta a=0$, d. v. s. om man vid kalkylen använder täljarens exakta värde, erhålles

$$(12)' \qquad \left|\Delta\left(\frac{a}{b}\right)\right|<\frac{a\,|\Delta b|}{\beta'^2}.$$

Vi antaga t. ex. att det gäller att beräkna kvoten

$$\frac{648000}{\pi}$$

med ett fel mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2}$. Vi beteckna med Δ korrektionen för det närmevärde som användes för π. För β' kunna vi använda t. ex. värdet 3. Felet i kvoten är då, enligt (12)′, mindre än

$$\frac{648000}{9}\,|\Delta|=72000\,|\Delta|,$$

och detta uttryck blir i sin tur mindre än $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2}$ om vi göra

$$|\Delta|<\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}=\frac{1}{1,44}\cdot\frac{1}{10^7}.$$

Det är således fullt tillräckligt om vi för π använda dess till sju decimaler afkortade värde 3,1415927, i hvilket fall $|\Delta| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}$.

Öfningsuppgifter:

1) För sidorna i en rektangel har vid mätning erhållits värdena 1,3673 m. och 0,7964 m., hvilkas fel uppskattas icke öfverstiga $\frac{1}{2}$ mm. Med hvilken noggrannhet kan rektangelns yta beräknas?

2) Uppskatta storleken af det fel man begår i värdet af uttrycket $\frac{\pi^4}{4!}$ om för π användes närmevärdet 3,14. Huru noggrant närmevärde bör man använda för π för att erhålla uttryckets värde med ett fel mindre än $\frac{1}{10^6}$?

3) Faktorerna i produkten $a\,b\,c$ ligga mellan gränserna

$$1 < a < 2, \quad 5 < b < 6, \quad 10 < c < 11.$$

Huru noggranna närmevärden bör man använda för dessa faktorer för att erhålla produktens värde med ett fel $< \frac{1}{10^4}$?

4) Med hvilken noggrannhet bör man beräkna värdena af a och b för att erhålla värdet af kvoten $\frac{a}{b}$ med ett fel $< \frac{1}{10^4}$, då man vet att $5 < a < 6$ och $0{,}1 < b < 0{,}2$?

23. **Om felens anhopning under kalkylens gång.** — Då det gäller att faktiskt uträkna värdet af ett aritmetiskt uttryck som innehåller kvantiteter hvilkas värden äro kända endast med en viss grad af noggrannhet, eller irrationella tal, eller andra tal hvilkas värden man af praktiska skäl är tvungen att förenkla, kommer det fel som, på grund af de företagna afkortningarna, blifvit begånget vid beräkningen af en viss del af uttrycket, att inverka jämväl på räkningens senare skeden, och felen komma sålunda i allmänhet att hopa sig under kalkylens gång. Det är skäl att här något närmare ingå på denna fråga, hvilken redan tidigare i förbigående berörts.

Vi betrakta först en produkt af två faktorer, $\bar{a}\bar{b}$, och antaga att vid dess beräkning för faktorerna användas värden, a, b, af hvilka åtminstone det ena ej är exakt. Vi er-

hålla då för produkten ett närmevärde, ab, hvars korrektion må betecknas med Δ_1:

$$\bar{a}\bar{b} = ab + \Delta_1.$$

Vi hafva i n° 22 lärt oss att beräkna en öfre gräns för $|\Delta_1|$, om noggrannheten af värdena a och b är bekant.

Om produkten ab exakt uträknades, skulle dess sista siffror i allmänhet lemna ett bidrag af en mindre storleksordning än Δ_1 och vore således utan betydelse för resultatet. Man afkortar därför värdet ab, t. ex. så att endast en osäker siffra bibehålles i resultatet, hvilket lämpligen sker medels förkortad multiplikation. Vid denna afkortning erhålles i stället för det exakta värdet af ab ett närmevärde, $[ab]$, hvars korrektion vi beteckna med Δ_2:

$$ab = [ab] + \Delta_2.$$

Ur denna och den föregående likheten följer

$$\bar{a}\bar{b} = [ab] + (\Delta_1 + \Delta_2).$$

Det närmevärde $[ab]$ som slutligen erhållits för produkten $\bar{a}\bar{b}$ har således till korrektion $\Delta_1 + \Delta_2$.

Gäller det att beräkna produkten $\bar{a}\bar{b}$ med ett fel mindre än en gifven kvantitet ε, måste man, då tecknen för Δ_1 och Δ_2 i allmänhet icke på förhand äro kända, ställa räkningen så att $|\Delta_1| + |\Delta_2| < \varepsilon$.

En analog anmärkning gäller beräkningen af en kvot af tvenne tal.

Vi gå till en produkt af tre faktorer, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Vi beräkna först produkten $\bar{a}\bar{b}$, med beaktande af ofvanstående anmärkningar. Det erhållna närmevärdet beteckna vi med $[ab]$, dess korrektion med Δ_1:

$$\bar{a}\bar{b} = [ab] + \Delta_1.$$

Genom multiplikation med $\bar{c}$ följer härur

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [ab]\bar{c} + \bar{c}\Delta_1.$$

Vi beräkna nu produkten $[ab]\bar{c}$, beteckna det erhållna närmevärdet med $[abc]$ och dess korrektion med Δ_2:

$$[ab]\,\bar{c} = [abc] + \Delta_2 .$$

Vi hafva då, enligt denna och den föregående likheten,

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [abc] + (\bar{c}\Delta_1 + \Delta_2) .$$

Korrektionen för det slutligen erhållna värdet $[abc]$ är således $\bar{c}\Delta_1 + \Delta_2$.

För att säkert erhålla värdet af produkten $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ med ett fel mindre än en gifven kvantitet ε, bör man således ställa räkningen så att $\bar{c}\,|\Delta_1| + |\Delta_2| < \varepsilon$.

På analogt sätt har man att förfara för att med en föreskrifven grad af noggrannhet beräkna en produkt af flere än tre faktorer.

Såsom en tillämpning af det sagda skola vi beräkna värdet af produkten

$$17,8730216 \,.\, 0,284513 \,.\, 2,6035712$$

med fyra decimaler. För detta ändamål ställa vi räkningen så att felet i det erhållna närmevärdet blir $< \frac{1}{10^5}$.

Vi beteckna såsom ofvan med Δ_1 korrektionen för det närmevärde som erhålles för produkten af de två första faktorerna, med Δ_2 korrektionen för det värde som erhålles vid multiplikation af nyssnämnda närmevärde med den tredje faktorn. Då denna är < 3, är, enligt det ofvan sagda, felet i slutresultatet $< 3\,|\Delta_1| + |\Delta_2|$. Vi ernå således den eftersträfvade graden af noggrannhet om vi t. ex. göra

$$|\Delta_1| < \frac{1}{10^6}, \quad |\Delta_2| < \frac{7}{10^6},$$

ty då är $3\,|\Delta_1| + |\Delta_2| < \frac{1}{10^5}$.

Vid multiplikationen af de två första faktorerna afkorta vi i öfverensstämmelse härmed partialprodukterna till sju decimaler:

$$
\begin{array}{r}
17,873021|6 \\
0,284513 \\
\hline
3,5746043 \\
1,4298417 \\
714921 \\
89365 \\
1787 \\
536 \\
\hline
5,0851069
\end{array}
$$

Då antalet afkortade partialprodukter är sex, är felet $|\Delta_1|$ i det erhållna värdet $< 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{3}{10^7}$.

Vi multiplicera nu detta värde med den tredje faktorn och afkorta denna gång partialprodukterna till sex decimaler:

$$
\begin{array}{r}
5,085106|9 \\
2,6035712 \\
\hline
10,170214 \\
3,051064 \\
15255 \\
2543 \\
356 \\
5 \\
1 \\
\hline
13,239438
\end{array}
$$

Felet $|\Delta_2|$ vid denna multiplikation är $< \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$. Alltså är

$$3|\Delta_1| + |\Delta_2| < 3 \cdot \frac{3}{10^7} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{44}{10^7} < \frac{5}{10^6}.$$

Det exakta värdet af den betraktade produkten ligger således mellan gränserna

$$13,239433 \text{ och } 13,239443,$$

och dess värde med fyra decimaler är följaktligen

$$13,2394.$$

Vi skola ännu behandla den i n° 17 ställda uppgiften (a) (s. 109). Det gäller att beräkna tyngdkraftens acceleration g, enligt formeln

$$g = l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = \pi^2 \frac{l}{T^2},$$

då man för l och T funnit värdena (med meter resp. sekund såsom enheter)

$$l = 0{,}9761\,, \quad T = 0{,}99052\,,$$

hvilkas fel antagas ligga under gränserna

$$|\Delta l| < \frac{3}{10^4}, \quad |\Delta T| < \frac{1}{10^4}.$$

Vi hafva först att uppskatta den osäkerhet i värdet af g som härrör af osäkerheten i värdena l och T. Om vi allmänt beteckna korrektionen för ett värde f med Δf, är enligt (12)

$$|\Delta g| \leqq \frac{\pi^2}{T'^4}\left(T^2 |\Delta l| + l\,|\Delta(T^2)|\right),$$

där T' är ett tal som är mindre än såväl det exakta som det approximativa värdet för T. Vi kunna välja $T' = 0{,}99$ och hafva då $T'^2 > 0{,}98$, $T'^4 > 0{,}96$. Vidare är, enligt (11), $|\Delta(T^2)| < 2\,T''\,|\Delta T|$, där T'' betecknar ett tal större än såväl det exakta som det approximativa värdet för T. Vi kunna välja $T'' = 1$, och erhålla då $|\Delta(T^2)| < 2\,|\Delta T|$. Då slutligen $\pi^2 < 10$, $T^2 < 1$, $l < 1$, följer ur ofvanstående olikhet

$$|\Delta g| < \frac{10}{0{,}96}\left(|\Delta l| + 2\,|\Delta T|\right) < \frac{10}{0{,}96}\left(\frac{3}{10^4} + \frac{2}{10^4}\right) < \frac{5{,}3}{10^3}.$$

Såsom häraf framgår, kan felet i det värde som erhålles för g uppgå till flere enheter af den tredje decimalen. Men det är äfven möjligt att detta fel är mycket mindre, ty felen i l och T kunna delvis kompensera hvarandra. För att icke öka osäkerheten i resultatet är det därför skäl att uträkna värdet af uttrycket $l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ på en enhet när af den tredje deci-

malen, och för detta ändamål ställa vi räkningen så att felet i denna blir mindre än $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{5}{10^4}$.

Vi beteckna med $|\Delta|$ det fel som begås vid beräkningen af kvoten

$$\frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{0,99052}.$$

Vid uppskattningen af det härur härrörande felet i värdet af $\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$, kunna vi i formeln (11) för α med säkerhet använda värdet 3,5, och finna då att ifrågavarande fel är mindre än

$$2 \, . \, 3,5 \, |\Delta| = 7 \, |\Delta| \, .$$

Detta fel blir i slutresultatet multipliceradt med l, hvarigenom det något minskas, men å andra sidan ökas osäkerheten i resultatet genom de afkortningar vi företaga, först då vi upphöja det för $\frac{\pi}{T}$ erhållna värdet i kvadrat, därefter då $\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ multipliceras med l. Vi beräkna därför $\frac{\pi}{T}$ med sådan noggrannhet att felet $|\Delta|$ blir $< \frac{5}{10^5}$, hvarvid $7\,|\Delta| < \frac{3,5}{10^4}$.

Om man utför räkningen medels förkortad division med fem decimaler, erhålles

$$\frac{\pi}{T} = 3,17166 + \Delta, \quad |\Delta| < \frac{3}{10^5}.$$

Härur följer enligt olikheten (11), där vi nu för α kunna använda t. ex. värdet $\alpha = 3,2$,

$$\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = (3,17166)^2 + \Delta_1, \quad |\Delta_1| < 2 \, . \, 3,2 \, |\Delta| < \frac{20}{10^5}.$$

Medels förkortad multiplikation erhålles

$$(3,17166)^2 = 10,05943 + \Delta_2, \quad |\Delta_2| < \frac{3}{10^5},$$

hvaraf

$$\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = 10,05943 + \Delta_3, \quad |\Delta_3| = |\Delta_1 + \Delta_2| < \frac{23}{10^5}.$$

Genom multiplikation med l följer härur

$$l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = 0{,}9761\,.\,10{,}05943 + \Delta_4\,, \quad |\Delta_4| = l\,|\Delta_3| < \frac{23}{10^5}\,.$$

Då produkten uträknas medels förkortad multiplikation, erhålles

$$0{,}9761\,.\,10{,}05943 = 9{,}81902 + \Delta_5\,, \quad |\Delta_5| < \frac{2}{10^5}\,,$$

och således

$$l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = 9{,}81902 + \Delta_6\,, \quad |\Delta_6| = |\Delta_4 + \Delta_5| < \frac{25}{10^5}\,.$$

Vi sluta härur att det till tre decimaler afkortade värdet af $l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ är $= 9{,}819$, samt att

$$l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = 9{,}819 + \Delta_7\,, \text{ där } |\Delta_7| = \left|\Delta_6 + \frac{2}{10^5}\right| < \frac{27}{10^5} < \frac{3}{10^4}\,.$$

Enligt hvad tidigare visats är, om det exakta värdet för tyngdkraftens acceleration betecknas med $\bar{g}$,

$$\bar{g} = l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \Delta g\,, \text{ där } |\Delta g| < \frac{5{,}3}{10^3}\,.$$

Vårt slutresultat blir följaktligen

$$\bar{g} = 9{,}819 + \Delta'\,,$$

där $\Delta' = \Delta g + \Delta_7$ och således

$$|\Delta'| < \frac{5{,}6}{10^3}\,.$$

Öfningsuppgifter:

1) Man har med sju decimaler

$$\text{Log}\,\pi = 0{,}4971499\,, \quad \frac{1}{\text{Log}\,e} = 2{,}3025851\,.$$

Beräkna härur den Neperska logaritmen för π och angif resultatets noggrannhet.

2) Beräkna den Neperska logaritmen för π då man har gifvet

$$\text{Log}\,\pi = 0{,}4971499\,, \quad \text{Log}\,e = 0{,}4342945\,.$$

3) Beräkna $(1{,}024)^9$ och $(1{,}024)^{10}$ med fyra decimaler (jmf. s 105).

4) Beräkna värdet af uttrycket $\frac{a}{b^2}$ på $\frac{1}{10^3}$ när, då

$$a = 2{,}6059341\,,\; b = 0{,}081409653\,.$$

5) Enligt de geodetiska mätningarna har jorden närmelsevis formen af en rotationsellipsoid, hvars polarradie har längden 6356549 m. och ekvatorsradie längden 6378393 m. Felet i det förra värdet torde icke öfverstiga 300 m., felet i det senare värdet icke 400 m. Beräkna jordens volym med så många säkra siffror som ur dessa data kunna erhållas.

24. **Uppskattning af felet vid utdragning af kvadratroten ur ett approximativt värde. Förenklad metod för kvadratrotens beräkning.** — Om vid beräkningen af $\sqrt{\bar{a}}$ det exakta värdet $\bar{a}$ ersättes med ett närmevärde a, hvars korrektion $\bar{a} - a$ åter må betecknas med Δa, erhålles för kvadratroten närmevärdet $\sqrt{a}$, och dettas korrektion kan skrifvas under formen

$$\Delta(\sqrt{a}) = \sqrt{\bar{a}} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{\bar{a}} - \sqrt{a})(\sqrt{\bar{a}} + \sqrt{a})}{\sqrt{\bar{a}} + \sqrt{a}} = \frac{\bar{a} - a}{\sqrt{\bar{a}} + \sqrt{a}}$$

eller

$$\Delta(\sqrt{a}) = \frac{\Delta a}{\sqrt{\bar{a}} + \sqrt{a}}\,. \tag{13}$$

Om man i högra membrum ersätter $\sqrt{a}$ med $\sqrt{\bar{a}}$ och härefter dividerar med $\sqrt{\bar{a}}$, erhålles den approximativa likheten

$$\frac{\Delta(\sqrt{a})}{\sqrt{\bar{a}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta a}{\bar{a}}\,.$$

Det relativa felet i kvadratrotens värde är således approximativt lika med hälften af det relativa felet i det för kvantiteten under rotmärket använda närmevärdet.

Gäller det t. ex. att beräkna $\sqrt{\pi}$ och användes för π närmevärdet 3,14, hvars fel är ungefär 0,0016 och relativa fel således ungefär $\frac{1}{2000}$, erhålles för kvadratroten ett närmevärde hvars relativa fel är ungefär $\frac{1}{4000}$.

För att erhålla en öfre gräns för felet i kvadratrotens värde, välja vi ett positivt tal α som uppfyller villkoret

$$\alpha \leq \text{det mindre af talen } \sqrt{a} \text{ och } \sqrt{\bar{a}}.$$

Enligt (13) är då

(14) $$|\Delta(\sqrt{a})| \leq \frac{|\Delta a|}{2\alpha}.$$

Högra membrum i likheten (13) är approximativt lika med $\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$. Skillnaden mellan dessa uttryck kan skrifvas

$$\frac{\Delta a}{\sqrt{\bar{a}}+\sqrt{a}} - \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{\bar{a}}-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{\bar{a}}+\sqrt{a})}\,\Delta a = -\frac{(\Delta a)^2}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{\bar{a}}+\sqrt{a})^2},$$

hvaraf följer

$$\Delta(\sqrt{a}) = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}} - \frac{(\Delta a)^2}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{\bar{a}}+\sqrt{a})^2},$$

eller, då $\Delta(\sqrt{a}) = \sqrt{a+\Delta a} - \sqrt{a}$,

(15) $$\sqrt{a+\Delta a} = \sqrt{a} + \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}} - \frac{(\Delta a)^2}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{\bar{a}}+\sqrt{a})^2}.$$

Formeln (15) leder till en väsentlig förenkling af den vanliga metoden för kvadratrotens beräkning. Vi antaga att, vid tillämpningen af denna metod på ett gifvet tal $\bar{a}$, för $\sqrt{\bar{a}}$ erhållits närmevärdet q och att den sista resten är r. Till denna rest hafva vi kommit genom att från $\bar{a}$ successivt subtrahera flere termer hvilkas summa är q^2. Således är

$$\bar{a} = q^2 + r.$$

Vi kunna följaktligen tillämpa formeln (15) i det vi sätta $a = q^2$, $\Delta a = r$, och få då

(16) $$\sqrt{\bar{a}} = \sqrt{q^2+r} = q + \frac{r}{2q} - \frac{1}{2q}\left(\frac{r}{\sqrt{\bar{a}}+q}\right)^2.$$

Då $r > 0$ och således $\sqrt{\bar{a}} > q$, är den sista termen numeriskt mindre än

$$\frac{1}{2q}\left(\frac{r}{2q}\right)^2.$$

Om q beräknats med flere gällande siffror, är sistnämnda

kvantitet liten i förhållande till $\frac{r}{2q}$, och man erhåller således ett väsentligen noggrannare värde för roten om man till q adderar korrektionstermen $\frac{r}{2q}$.

Förrän vi gå att allmänt undersöka huru stor approximation härvid ernås, skola vi behandla ett speciellt exempel. Vi beräkna på vanligt sätt $\sqrt{2}$ och afbryta räkningen sedan vi erhållit den femte decimalen i roten och bildat motsvarande rest.

2	1,41421
1	1
100	24
96	4
400	281
281	1
11900	2824
11296	4
60400	28282
56564	2
383600	282841
282841	1
100759	282842

Enligt den ofvan antagna beteckningen är

$$q = 1,41421, \quad r = 0,0000100759.$$

En approximativ uppskattning ger

$$\frac{r}{2q} < \frac{3,6}{10^6}, \quad \left(\frac{r}{2q}\right)^2 < \frac{13}{10^{12}}, \quad \frac{1}{2q}\left(\frac{r}{2q}\right)^2 < \frac{5}{10^{12}}.$$

Alltså är

$$\sqrt{2} = q + \frac{r}{2q} - \Delta, \tag{17}$$

där talet Δ är positivt och mindre än $\frac{5}{10^{12}}$.

Vi beräkna kvoten $\frac{r}{2q}$ medels förkortad division, i det vi afkorta partialprodukterna till tolf decimaler[1]):

```
0,000010075900 | 2,82842
        848526 | 0,0000035623774
       -------
       1590640
       1414210
       -------
        176430
        169705
        ------
          6725
          5657
          ----
          1068
           849
          ----
           219
           198
           ---
            21
            20
            --
             1
             1
             -
             0
```

---

[1]) Om enheten för den sista decimalen i närmevärdet q är $\frac{1}{10^n}$, har den sista af de siffror i resten r, hvilka vid rotutdragningens afbrytande äro nedflyttade, till enhet $\frac{1}{10^{2n}}$, hvaraf följer

$$\frac{r}{2q} = \frac{R}{2Q} \cdot \frac{1}{10^n},$$

där $Q = 10^n q$ betecknar det hela tal som bildas af siffrorna i q, och där den hela delen af $R = 10^{2n} r$ bildas af de siffror i resten r som vid räkningens afbrytande äro nedflyttade.

Om man utvecklar kvoten $\frac{R}{2Q}$ till ett decimaltal, erhålles således värdet af korrektionstermen $\frac{r}{2q}$ uttryckt i samma enhet som den sista decimalen i q.

I ofvanstående exempel kan man således utveckla kvoten $\frac{100759}{282842}$ till decimaltal, och erhåller då värdet af $\frac{r}{2q}$ uttryckt i enheter af den femte decimalen.

Antalet afkortade partialprodukter är sex och felet i kvoten således mindre än

$$\frac{1}{2,8}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{12}}<\frac{1,1}{10^{12}}.$$

Vi sluta härur, i det vi afkorta kvoten till tolf decimaler,

(18) $$q+\frac{r}{2q}=1,414213562377+\Delta',$$

där

$$|\Delta'|<\frac{1,1}{10^{12}}+\frac{4}{10^{13}}=\frac{1,5}{10^{12}}.$$

Ur (17) och (18) följer att värdet af $\sqrt{2}$ ligger mellan gränserna

$$1,41421356237 \text{ och } 1,41421356238,$$

och att man således med tolf riktiga siffror har

$$\sqrt{2}=1,41421356237\,.$$

Korrektionstermen $\frac{r}{2q}$ ger oss således i förevarande fall sex riktiga siffror till i rotens värde, alltså lika många siffror till som antalet siffror i närmevärdet q.

Vi skola nu bevisa följande allmänna sats:

Om man, enligt det vanliga förfaringssättet, för $\sqrt{\bar{a}}$ funnit ett närmevärde q med $n+1$ (>2) signifikativa siffror, och om den sista resten betecknas med r, erhåller man genom att till q addera kvoten $\frac{r}{2q}$, utvecklad till decimaltal, åtminstone n signifikativa siffror till i rotens värde, hvarvid den sista af dessa siffror i ogynnsammaste fall kan vara osäker på en enhet.

Genom att på förhand, om så behöfves, multiplicera det gifna talet med en lämplig potens af 100, hvarvid dess kvadratrot blir multiplicerad med samma potens af 10, kan man alltid åstadkomma att

$$1<\bar{a}<100\,,\quad \text{hvaraf följer}\quad 1<q<10\,.$$

Enheten för den sista siffran i närmevärdet q, hvilket antagits hafva $n+1$ signifikativa siffror, är då $\frac{1}{10^n}$. Om nämnda siffra ökas med en enhet, erhålles ett öfre närmevärde för $\sqrt{\bar{a}}$. Alltså är

$$\left(q+\frac{1}{10^n}\right)^2 > \bar{a} = q^2 + r,$$

hvarur följer

$$\frac{2q}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} > r$$

eller

$$\frac{r}{2q} < \frac{1}{10^n} + \frac{1}{2q} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = \frac{1}{10^n}\left(1 + \frac{1}{2q} \cdot \frac{1}{10^n}\right).$$

Nu är, enligt vårt antagande, $q > 1$ och $n > 1$. Ur ofvanstående olikhet kunna vi således sluta

$$\frac{r}{2q} < \frac{1}{10^n}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{1,05}{10^n},$$

och, om vi upphöja till kvadrat,

$$\left(\frac{r}{2q}\right)^2 < \frac{1,2}{10^{2n}},$$

hvaraf slutligen, då $q > 1$, följer

$$\frac{1}{2q}\left(\frac{r}{2q}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2q}\right)^2 < \frac{0,6}{10^{2n}}.$$

Det numeriska värdet af den sista termen i formeln (16) belöper sig således, i ogynnsammaste fall, blott till c. $\frac{1}{2}$ enhet af den $(2n)^{te}$ decimalen, hvartill kommer att denna term alltid är negativ, så att dess inverkan i viss mån kan beaktas. Genom att till q addera korrektionstermen $\frac{r}{2q}$ få vi således, enligt (16), minst n signifikativa siffror till i resultatet, hvarmed satsen är bevisad.

Ur likheten (16) skola vi ännu härleda ett annat resultat som ofta kommer till användning vid numerisk kalkyl.

Vi antaga att det gäller att beräkna uttrycket $\sqrt{ab}$, hvilket representerar medelproportionalen mellan talen a och b, eller deras *geometriska medeltal*. Vi beteckna med M talens aritmetiska medeltal och med δ deras differens, och hafva då, om $a > b$,

$$\frac{a+b}{2} = M, \quad \frac{a-b}{2} = \frac{\delta}{2},$$

hvarur genom addition och subtraktion följa likheterna

$$a = M + \frac{\delta}{2}, \quad b = M - \frac{\delta}{2},$$

och, då dessa multipliceras,

$$ab = M^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

eller slutligen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{M^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

Enligt formeln (16), där vi i förevarande fall hafva att substituera

$$\bar{a} = ab, \quad q = M, \quad r = -\left(\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

erhålla vi nu omedelbart för det geometriska medeltalet $\sqrt{ab}$ uttrycket

$$(19) \qquad \sqrt{ab} = M - \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2M} - \frac{1}{2M} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^4}{(\sqrt{ab} + M)^2}.$$

Då de två senare termerna äro negativa, är alltid

$$\sqrt{ab} < M,$$

såsom för öfrigt redan tidigare visats (jmf. s. 45). Den sista termen i (19) är således numeriskt mindre än

$$(20) \qquad \frac{1}{2M} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^4}{(2\sqrt{ab})^2} = \frac{1}{8Mab}\left(\frac{\delta}{2}\right)^4 = \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2M} \cdot \frac{\delta^2}{16\,ab}.$$

Häraf synes att, om talen a och b äro nära lika och δ således är en liten kvantitet, den tredje termen i högra membrum af (19) är mycket liten, såväl absolut taget som i förhållande till den andra termen, och att följaktligen uttrycket

$$M - \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2M} \tag{21}$$

ger ett närmevärde för $\sqrt{ab}$ som är desto noggrannare ju mindre δ är. För att afgöra huru noggrant detta värde är, har man i hvarje gifvet fall att uppskatta storleken af kvantiteten (20).

Såsom exempel skola vi beräkna uttrycket (jmf. s. 106)

$$\sqrt{1,9110 \,.\, 2,0535}\,.$$

Man finner i detta fall

$$M = 1,98225\,, \quad \delta = 0,1425\,,$$

hvaraf successivt erhålles

$$\frac{\delta}{2} = 0,07125\,, \quad \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 < 0,006\,, \quad \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 < 0,00004$$

$$8Mab > 15 \,.\, 3,8 > 50\,,$$

och således

$$\frac{1}{8Mab}\left(\frac{\delta}{2}\right)^4 < 0,000001\,.$$

Uttrycket (21) ger oss således i förevarande fall rotens värde med ett fel mindre än en enhet af den sjette decimalen. Vid afkortning till fem decimaler finner man

$$\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2M} = 0,00128\,,$$

hvarur för den betraktade roten följer värdet 1,98097.

Öfningsuppgifter:

1) Huru noggrant värde bör man använda för $\sqrt{2}$ för att erhålla värdet af $\sqrt{30 + 10\sqrt{2}}$ med ett fel $< \frac{1}{10^5}$?

2) Beräkna värdet af

$$\cos 18^0 = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

på en enhet när af den sjunde decimalen.

3) Beräkna $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ med sex decimaler.

4) Beräkna $\sqrt[4]{3}$ med åtta decimaler.

5) Beräkna den Briggska logaritmen för π med fyra decimaler enligt den s. 106 beskrifna metoden.

Tredje kapitlet.

Teorin för kedjebråk.

25. **Euklides' algoritm.** — I sjunde och tionde böckerna af EUKLIDES' *Elementa* framställes ett allmänt förfaringssätt för undersökningen af förhållandet mellan två gifna storheter af samma slag. Detta förfaringssätt, som erhållit namnet *Euklides' algoritm*, har sedermera vunnit en synnerligen vidsträckt användning inom matematiken, och är speciellt af grundläggande betydelse för talteorin och algebran.

För att fixera uttryckssättet och ernå större åskådlighet, tänka vi oss under de gifna storheterna, A och B, hvilkas förhållande det gäller att undersöka, tvenne rätliniga sträckor. Vi antaga vidare $A > B$.

Vi uppmäta först sträckan A med sträckan B, d. v. s. vi afsätta uppå A, utgående från dess ena ändpunkt, sträckan B så många gånger detta är möjligt, d. v. s. tills vi erhålla en rest R af A som är mindre än B. Inträffar detta då B afsatts q gånger, har man

$$A = qB + R, \quad R < B.$$

Om $R = 0$ och således $A = qB$, är förhållandet mellan A och B lika med det hela talet q.

Är däremot resten $R > 0$, uppmäta vi sträckan B med R. Antaga vi att R innehålles q_1 gånger i B, med en rest R_1 som är mindre än R, erhålles

$$B = q_1 R + R_1, \quad R_1 < R.$$

Om resten $R_1 = 0$, följer ur ofvanstående likheter

$$B = q_1 R, \quad A = (q q_1 + 1) R.$$

I detta fall utgör således R ett gemensamt mått för A och B, och dessa sträckors förhållande är lika med det rationella talet $\frac{q q_1 + 1}{q_1} = q + \frac{1}{q_1}$. Är däremot $R_1 > 0$, uppmäta vi R med R_1, o. s. v.

Detta förfaringssätt leder oss sålunda till en kedja af likheter:

$$(1) \qquad \begin{aligned} A &= q\ B + R, \\ B &= q_1 R + R_1, \\ R &= q_2 R_1 + R_2, \\ & \dots\dots\dots\dots, \\ R_{n-1} &= q_{n+1} R_n + R_{n+1}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

hvilken afbrytes i händelse någon af de successiva mätningarna går jämnt ut, så att resten blir 0, men hvilken innehåller ett obegränsadt antal likheter om detta förhållande aldrig inträder och hvarje rest således är större än 0. Talen $q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ äro samtligen *positiva hela tal*, och resterna $R, R_1, \dots$ bilda *en aftagande räcka*:

$$(2) \qquad A > B > R > R_1 > \dots > R_n > R_{n+1} > \dots$$

Om kedjan (1) *är obegränsad, sjunker* R_ν *med växande index under hvarje föreskrifven gräns, eller, annorlunda uttryckt,* R_ν *närmar sig gränsvärdet* 0 *då* ν *växer mot* ∞.

Ur (1) och (2) följer nämligen, då hvarje tal q är > 1,

$$\begin{aligned} A &\geqq B + R > 2R, \\ R &\geqq R_1 + R_2 > 2R_2, \\ R_2 &> R_3 + R_4 > 2R_4 \end{aligned}$$

o. s. v., hvarur successivt erhålles

$$R < \frac{A}{2}, R_2 < \frac{R}{2} < \frac{A}{2^2}, R_4 < \frac{R_2}{2} < \frac{A}{2^3},$$

och allmänt, för hvarje positivt helt tal k,

$$(3) \qquad R_{2k} < \frac{A}{2^{k+1}}.$$

Är nu ε en föreskrifven längd, huru liten som helst, kan man bestämma k så stort att $\frac{A}{2^{k+1}} < \varepsilon$. Enligt (3) är då $R_{2k} < \varepsilon$, och ur (2) följer således att $R_\nu < \varepsilon$ om $\nu > 2k$, hvilket just innebär det vi ville bevisa.

Den Euklidiska algoritmen tillkomma följande grundväsentliga egenskaper:

Om storheterna A och B äro kommensurabla, leder den Euklidiska algoritmen efter ett ändligt antal steg till en rest som är noll, så att kedjan (1) följaktligen består af ett ändligt antal likheter.

Om man omvändt antar att den Euklidiska algoritmen, tillämpad på tvenne gifna storheter A och B, efter ett ändligt antal steg leder till en rest $=0$, *äro A och B kommensurabla.*

Är R_n *den sista af de rester som äro större än* 0, *utgör* R_n *det största gemensamma måttet för A och B, och hvarje annat gemensamt mått för dessa storheter innehålles exakt i* R_n.

Vi antaga först att storheterna A och B äro kommensurabla och hafva E såsom gemensamt mått, d. v. s. att $A = mE$, $B = nE$, där m och n äro positiva hela tal. Ur den första af likheterna (1) följer då

$$R = A - qB = (m - qn)\, E,$$

hvaraf framgår att resten R, om den ej är noll, utgör en heltalig mångfald af E, och att E således är ett gemensamt mått för B och R.

Ur den andra af likheterna (1) sluter man nu på samma sätt att resten $R_1 = B - q_1 R$, såframt den icke är noll,

utgör en heltalig mångfald af E, och att R och R_1 således hafva E såsom gemensamt mått.

Genom att fortgå på detta sätt finner man att *hvarje från noll skild rest R_ν är en heltalig mångfald af E och således* $> E$. Allmängiltigheten af denna slutsats bevisas medels fullständig induktion.

Ur (3) och (2) följer emellertid att, om det hela talet k väljes så stort att $\frac{A}{2^{k+1}} < E$, man har $R_\nu < E$ så snart $\nu \geqq 2k$. Enligt hvad just bevisats, är således säkert $R_\nu = 0$ för $\nu > 2k$, och kedjan (1) innehåller följaktligen blott ett ändligt antal likheter, hvarmed första delen af satsen är bevisad.

Vi antaga nu omvändt att den Euklidiska algoritmen, tillämpad på storheterna A och B, efter ett ändligt antal steg leder till en rest 0, och beteckna med R_n den sista från noll skilda resten. Kedjan (1) afslutas då med likheten $R_{n-1} = q_{n+1} R_n$, hvilken visar att R_{n-1} är en heltalig mångfald af R_n. Den närmast föregående likheten

$$R_{n-2} = q_n R_{n-1} + R_n = (q_n q_{n+1} + 1) R_n$$

visar att detsamma gäller för R_{n-2}, och då vi sålunda successivt gå tillbaka i kedjan (1), erhålla vi slutligen det resultat att storheterna A och B båda utgöra heltaliga mångfalder af R_n och således äro kommensurabla, såsom vår sats utsäger.

Vi hafva tillika funnit att R_n, d. v. s. den sista af de rester som äro större än noll, utgör ett gemensamt mått för A och B. Å andra sidan hafva vi ofvan visat att, om E är ett godtyckligt gemensamt mått för nämnda storheter, hvarje från 0 skild rest R_ν, och således äfven R_n, utgör en heltalig mångfald af E. Vi sluta häraf att R_n är det största gemensamma måttet för A och B, samt att hvarje annat gemensamt mått exakt innehålles i R_n, hvarmed den ofvan formulerade satsen är fullständigt bevisad.

Denna sats kan kompletteras som följer:

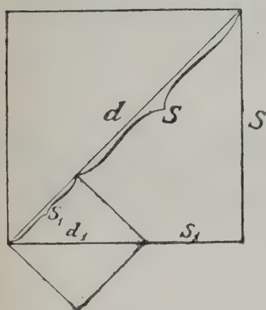
Om storheterna A och B äro inkommensurabla, innehåller kedjan (1) *alltid ett obegränsadt antal likheter, och omvändt, om tillämpningen af Euklides' algoritm på tvenne storheter A och B*

leder till en obegränsad kedja (1), *äro dessa storheter inkommensurabla*.

Riktigheten af dessa påståenden följer omedelbart ur den föregående satsen medels indirekt bevis.

Om A och B äro positiva hela tal, reducerar sig det ofvan beskrifna förfarandet till den vanliga metoden för uppsökandet af talens största gemensamma divisor. Då resterna R_ν i detta fall äro hela tal och aftaga med växande index, är det utan vidare klart att man en gång kommer till en rest som är 0. Den sista från 0 skilda resten utgör, enligt ofvanstående sats, de gifna talens största gemensamma divisor.

Vi skola tillämpa ofvanstående betraktelser på problemet att bestämma förhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat, hvilket i historiskt afseende är af det största intresse, emedan grekerna antagligen genom detsamma först leddes till insikt om existensen af inkommensurabla storheter.



Vi beteckna kvadratens diagonal med d och dess sida med s. Då $s < d < 2s$, ger Euklides' algoritm oss såsom första likhet $d = s + s_1$, där $0 < s_1 < s$.

Vi konstruera nu en kvadrat med s_1 till sida, såsom vidstående figur anger, och beteckna dess diagonal med d_1. Ur figuren afläses omedelbart relationen $s = d_1 + s_1$. Å andra sidan erhålles ur den mindre kvadraten, då dess diagonal d_1 uppmätes med dess sida, $d_1 = s_1 + s_2$ där $s_2 < s_1$. Vi få således $s = 2s_1 + s_2$, hvilket är den andra likheten i den Euklidiska kedjan.

s_1 utgör skillnaden mellan diagonalen d och sidan s i den gifna kvadraten, s_2 åter utgör skillnaden mellan diagonalen och sidan i den kvadrat hvars sida är s_1. Vi konstruera nu vidare en kvadrat med sidan s_2, därefter en kvadrat hvars sida s_3 utgör skillnaden mellan sistnämnda kvadrats diagonal och sida, o. s. v. Vi erhålla sålunda en obegränsad följd af kvadrater, hvilkas sidor ständigt aftaga:

$$s > s_1 > s_2 > s_3 > \cdots > s_n > s_{n+1} > \cdots > 0 .$$

Hvarje kvadrat konstrueras ur den föregående enligt samma lag. Samma resonemang som, tillämpadt på den gifna kvadraten, gaf oss relationen $s = 2s_1 + s_2$, ger oss således, då vi utgå från kvadraten med sidan s_1, relationen $s_1 = 2s_2 + s_3$, då vi utgå från kvadraten med sidan s_2, relationen $s_2 = 2s_3 + s_4$, o. s. v. in infinitum.

Den Euklidiska algoritmen leder oss således, då den tillämpas på sträckorna d och s, till följande obegränsade kedja af likheter:

$$
\begin{aligned}
d &= s + s_1, \\
s &= 2s_1 + s_2, \\
s_1 &= 2s_2 + s_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
s_{n-1} &= 2s_n + s_{n+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Enligt den tidigare bevisade satsen sluta vi härur att d och s icke hafva något gemensamt mått, och att således *diagonalen och sidan i en kvadrat äro inkommensurabla.*

26. **Utveckling i kedjebråk.** — Likheterna (1) leda till en intressant framställningsform för förhållandet mellan de gifna storheterna A och B. Dessa likheter kunna nämligen skrifvas:

$$
\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B} = q + \cfrac{1}{\frac{B}{R}},
$$

$$
\frac{B}{R} = q_1 + \frac{R_1}{R} = q_1 + \cfrac{1}{\frac{R}{R_1}},
$$

$$
\frac{R}{R_1} = q_2 + \frac{R_2}{R_1} = q_2 + \cfrac{1}{\frac{R_1}{R_2}},
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
$$

$$
\frac{R_{n-2}}{R_{n-1}} = q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}}.
$$

Härur följer genom successiv insättning

$$\frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{R_1}{R}} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{R_2}{R_1}}} = \cdots,$$

och allmänt

$$(5) \qquad \frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots \, + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{R_n}{R_{n-1}}}}}}}}$$

förutsatt att resterna $R, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ alla äro olika noll.

Om $R_n = 0$ och storheterna A och B således äro kommensurabla, erhålles för deras förhållande uttrycket

$$(6) \qquad q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots \, + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Ett dylikt uttryck benämnes ett *kedjebråk*; q utgör kedjebråkets *hela beståndsdel* och $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dess *partial- eller delnämnare* eller, kortare, dess *nämnare*.

Om däremot A och B äro inkommensurabla och således samtliga rester R större än 0, gäller likheten (5) för huru stora värden n som helst. *Den restterm* $\frac{R_n}{R_{n-1}}$ *som är fogad till den sista delnämnaren* q_n *är alltid positiv och mindre än* 1, då ju $R_{n-1} > R_n > 0$. I det vi gifva n allt större värden, ledas vi till att betrakta det oändliga kedjebråket

(7) $$q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$$

Vi skola längre fram se att detta uttrycks värde, hvilket definieras såsom gränsvärdet för det ändliga kedjebråket (6) då n växer mot ∞, är lika med förhållandet mellan de gifna storheterna A och B, hvilket förhållande i förevarande fall är irrationellt. Allmänt skola vi visa att hvarje gifvet oändligt kedjebråk (7) med heltaliga positiva nämnare har till värde ett ändligt irrationellt tal.

Exempelvis erhålles ur likheterna (4) för förhållandet $\frac{d}{s}$ mellan diagonalen och sidan i en kvadrat det oändliga kedjebråket

(8) $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

I det föregående hafva vi ständigt antagit $A > B$. För att utveckla ett förhållande $\frac{A}{B}$ där $A < B$, skrifva vi

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}}$$

och tillämpa det ofvan beskrifna förfarandet på förhållandet $\frac{B}{A}$. Vi erhålla sålunda för $\frac{A}{B}$ en kedjebråksutveckling hvars hela beståndsdel är 0.

Såsom en tillämpning skola vi utveckla förhållandet $\frac{740}{611}$ i kedjebråk. Likheterna (1) blifva i detta fall:

$$\begin{aligned}
740 &= 1 \,.\, 611 + 129, \\
611 &= 4 \,.\, 129 + 95, \\
129 &= 1 \,.\, 95 + 34, \\
95 &= 2 \,.\, 34 + 27, \\
34 &= 1 \,.\, 27 + 7, \\
27 &= 3 \,.\, 7 + 6, \\
7 &= 1 \,.\, 6 + 1, \\
6 &= 6 \,.\, 1,
\end{aligned}$$

hvarur erhålles

$$\frac{740}{611} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}}}}$$

Vi utveckla ännu talet 3,1416 i kedjebråk:

$$\begin{aligned}
3{,}1416 &= 3 + \frac{1416}{10000}, \\
10000 &= 7 \,.\, 1416 + 88 \\
1416 &= 16 \,.\, 88 + 8 \\
88 &= 11 \,.\, 8 \,.
\end{aligned}$$

Ur dessa likheter följer

$$3{,}1416 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{11}}}$$

Öfningsuppgifter:

1) Jordens omloppstid kring solen är 365,2422 dygn. Utveckla detta tal i kedjebråk.

2) Jupiters dagliga medelrörelse är 299″,1 och medelrörelserna för de små planeterna Hecuba, Hilda och Thule resp. 618″,0, 450″,8 och 404″,3. Utveckla förhållandena mellan dessa sistnämnda medelrörelser och Jupiters medelrörelse i kedjebråk.

27. **Kedjebråksutveckling af approximativa värden.** — Vi antaga att det gäller att utveckla ett gifvet förhållande $\frac{\overline{A}}{\overline{B}}$

i kedjebråk, men att härvid de exakta värdena $\bar{A}$ och $\bar{B}$ ersättas med vissa närmevärden A och B. Dessas korrektioner må betecknas med ΔA och ΔB, så att $\bar{A} = A + \Delta A$, $\bar{B} = B + \Delta B$. Det gäller då att afgöra huru långt den kedjebråksutveckling som erhålles för förhållandet $\frac{A}{B}$ öfverensstämmer med den sökta utvecklingen för $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$, eller, annorlunda uttryckt, huru många af nämnarena i förstnämnda utveckling äro exakta.

För de rester och nämnare som erhållas vid utveckling af $\frac{A}{B}$ använda vi de tidigare beteckningarna, hvarvid således likheterna (1) och (5) fortfarande gälla.

Den hela beståndsdelen q i utvecklingen (5) är exakt om $\bar{A}$ innehåller $\bar{B}$ q gånger men icke $q+1$ gånger, eller, annorlunda uttryckt, om resten

$$(9) \qquad \bar{R} = \bar{A} - q\bar{B}$$

uppfyller villkoret $\bar{B} > \bar{R} \geqq 0$.

Om detta villkor är uppfylldt och om därtill $\bar{B}$ innehåller $\bar{R}$ q_1 gånger men icke $q_1 + 1$ gånger, d. v. s. om resten

$$(9)' \qquad \bar{R}_1 = \bar{B} - q_1 \bar{R}$$

uppfyller villkoret $\bar{R} > \bar{R}_1 > 0$, är jämväl den första delnämnaren q_1 exakt.

För att den andra delnämnaren q_2 skall vara exakt, erfordras ytterligare att resten

$$(9)'' \qquad \bar{R}_2 = \bar{R} - q_2 \bar{R}_1$$

uppfyller villkoret $\bar{R}_1 > \bar{R}_2 \geqq 0$.

Sätta vi i analogi med det föregående

$$(9)''' \qquad \bar{R}_3 = \bar{R}_1 - q_3 \bar{R}_2, \quad \bar{R}_4 = \bar{R}_2 - q_4 \bar{R}_3, \ldots,$$

inses allmänt att $q, q_1, q_2, \ldots, q_n$ äro exakta om man har

$$\bar{B} > \bar{R} > \bar{R}_1 > \bar{R}_2 > \cdots > \bar{R}_n \geqq 0,$$

och blott i detta fall. Är antingen $\bar{R}_{n+1} < 0$ eller $\bar{R}_{n+1} > \bar{R}_n$, är den följande delnämnaren q_{n+1} icke mer exakt, utan i förra fallet för stor, i senare fallet för liten.

Vi införa beteckningarna

$$\Delta R = \bar{R} - R\,,\quad \Delta R_1 = \bar{R}_1 - R_1\,,\quad \Delta R_2 = \bar{R}_2 - R_2\,,\ldots$$

ur hvilka följer

$$\bar{R} = R + \Delta R\,,\quad \bar{R}_1 = R_1 + \Delta R_1\,,\quad \bar{R}_2 = R_2 + \Delta R_2\,,\ldots$$

Genom att från likheterna $(9)\,,(9)'\,,(9)''$ o. s. v. i ordning subtrahera likheterna

$$R = A - qB\,,\quad R_1 = B - q_1 R\,,\quad R_2 = R - q_2 R_1\,,\ldots,$$

hvilka omedelbart följa ur (1), erhålla vi för korrektionerna ΔR, $\Delta R_1,\ldots$ uttrycken

$$(10)\qquad \begin{array}{l} \Delta R\ = \Delta A - q\ \Delta B\ , \\ \Delta R_1 = \Delta B - q_1 \Delta R\ , \\ \Delta R_2 = \Delta R - q_2 \Delta R_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Med hjälp af dessa uttryck kan man, då ΔA och ΔB äro kända, successivt bestämma ΔR, ΔR_1, $\Delta R_2,\ldots$ och sålunda afgöra om $\bar{R}\,, \bar{R}_1\,, \bar{R}_2,\ldots$ uppfylla de ofvan uppställda villkoren.

Såsom exempel skola vi söka kedjebråksutvecklingen af talet π, och använda härvid först närmevärdet 3,1416. Vi kunna sätta $A = 31416$, $B = 10000$, och hafva då $\Delta B = 0$ samt, med tre decimaler,

$$\Delta A = -0{,}073 = \delta\,.$$

Enligt den s. 157 utförda kalkylen, är

$$\begin{array}{llll} R = 1416\,, & R_1 = 88\,, & R_2 = 8\ , & R_3 = 0\ , \\ q = 3\ , & q_1 = 7\ , & q_2 = 16\,, & q_3 = 11\,. \end{array}$$

Den första af likheterna (10) ger oss $\Delta R = \delta = -0{,}073$, hvarur omedelbart framgår att $B > \bar{R} > 0$ och att värdet $q = 3$ således är exakt.

Ur den andra af likheterna (10) följer att $\Delta R_1 = -7\delta$

$= 0,5\ldots$ Alltså är $\bar{R} > \bar{R}_1 > 0$ och således värdet $q_1 = 7$ exakt.

För ΔR_2 erhålles värdet

$$\Delta R_2 = \delta - 16\,\Delta R_1 = 113\,\delta .$$

Då detta värde är < -8, är $\bar{R}_2 = R_2 + \Delta R_2 < 0$, hvaraf vi sluta att värdet $q_2 = 16$ är för stort.

För att erhålla flere riktiga nämnare i kedjebråksutvecklingen af π måste vi utgå från ett noggrannare närmevärde för detta tal. Vi välja värdet

$$3{,}1415926536 ,$$

hvars korrektion ligger mellan $-\frac{1}{10^{11}}$ och $-\frac{1{,}1}{10^{11}}$. Vi hafva således att tillämpa EUKLIDES' algoritm på talen

$$A = 31415926536 , \quad B = 10^{10} ,$$

hvarvid $\Delta A = \delta$, $\Delta B = 0$, där δ ligger mellan $-0{,}10$ och $-0{,}11$. Räkningen ställer sig på följande sätt, då efter hvarje division omedelbart kontrolleras om den erhållna delnämnaren är exakt:

$$A = 3B + R , \quad R = 1415926536 ;$$

$$\Delta R = \delta\,(= -0{,}1\ldots), \quad B > \bar{R} > 0 , \quad q = 3 \text{ exakt.}$$

$$B = 7R + R_1 , \quad R_1 = 88514248 ;$$

$$\Delta R_1 = -7\delta\,(= 0{,}7\ldots), \quad \bar{R} > \bar{R}_1 > 0 , \quad q_1 = 7 \text{ exakt.}$$

$$R = 15R_1 + R_2 , \quad R_2 = 88212816 ;$$

$$\Delta R_2 = \Delta R - 15\Delta R_1 = 106\,\delta\,(> -12) , \quad \bar{R}_1 > \bar{R}_2 > 0 , \quad q_2 = 15 \text{ exakt.}$$

$$R_1 = 1.R_2 + R_3 , \quad R_3 = 301432 ;$$

$$\Delta R_3 = \Delta R_1 - \Delta R_2 = -113\,\delta\,(< 13) , \quad \bar{R}_2 > \bar{R}_3 > 0 , \quad q_3 = 1 \text{ exakt.}$$

$$R_2 = 292\,R_3 + R_4 , \quad R_4 = 194672 ;$$

$$\Delta R_4 = \Delta R_2 - 292\,\Delta R_3 = 33102\,\delta\,(> -3642) , \quad \bar{R}_3 > \bar{R}_4 > 0 , \quad q_4 = 292 \text{ exakt.}$$

$$R_3 = 1.R_4 + R_5 , \quad R_5 = 106760 ;$$

$$\Delta R_5 = \Delta R_3 - \Delta R_4 = -33215\,\delta\,(< 3654) , \quad \bar{R}_4 > \bar{R}_5 > 0 , \quad q_5 = 1 \text{ exakt.}$$

$$R_4 = \quad 1 . R_5 + R_6 , \quad R_6 = 87912 ;$$

$$\Delta R_6 = \Delta R_4 - \Delta R_5 = 66317 \delta \, (> -7295) , \; \overline{R}_5 > \overline{R}_6 > 0 , \; q_6 = 1 \text{ exakt.}$$

$$R_5 = \quad 1 . R_6 + R_7 , \quad R_7 = 18848 ;$$

$$\Delta R_7 = \Delta R_5 - \Delta R_6 = -99532 \delta \, (< 10949) ; \; \overline{R}_6 > \overline{R}_7 > 0 , \; q_7 = 1 \text{ exakt.}$$

$$R_6 = \quad 4 R_7 + R_8 , \quad R_8 = 12520 ;$$

$$\Delta R_8 = \Delta R_6 - 4 \Delta R_7 = 464445 \delta < -0,1 . 464445 = -46444,5 .$$

Ur den öfre gränsen för ΔR_8 framgår att $\overline{R}_8 = R_8 + \Delta R_8$ har ett negativt värde och att således värdet $q_8 = 4$ är för stort, hvarför vi måste afbryta algoritmen med den nästsista likheten $R_5 = 1 . R_6 + R_7$. Vi erhålla sålunda följande kedjebråksutveckling för talet π:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \Theta}}}}}}}$$

där $\Theta = \dfrac{\overline{R}_7}{\overline{R}_6}$ ligger mellan 0 och 1.

Öfningsuppgifter:

1) Man har med 7 decimaler

$$\text{Log } 2 = 0,3010300 .$$

Beräkna härur så många delnämnare det är möjligt i kedjebråksutvecklingen af Log 2 (jmf. s. 104—105).

2) Beräkna kedjebråksutvecklingarna för det Neperska talet e samt för $\dfrac{e-1}{2}$ med så många exakta delnämnare som kunna erhållas, då för e användes närmevärdet 2,71828183, hvars korrektion ligger mellan gränserna $-\dfrac{2}{10^9}$ och $-\dfrac{1}{10^9}$.

28. **Ett kedjebråks konvergenter.** — Vi betrakta ett ändligt eller oändligt kedjebråk

$$q+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots}}}$$

där q är ett positivt helt tal eller 0 och $q_1, q_2, \ldots$ positiva hela tal.

Om vi afbryta detta kedjebråk efter den första, den andra, den tredje delnämnaren, o. s. v., erhålla vi en följd af bråk

$$\frac{P_1}{Q_1}=q+\frac{1}{q_1},\ \frac{P_2}{Q_2}=q+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},\ldots,\ \frac{P_n}{Q_n}=q+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}},\ldots$$

hvilka benämnas kedjebråkets *konvergenter*. Den n^{te} konvergenten $\frac{P_n}{Q_n}$ är, såsom synes, bildad af q och de n första delnämnarne $q_1, q_2, \ldots, q_n$; densamma beror således alls icke af de delnämnare hvilkas index är större än n.

Vi inslå följande förfarande för konvergenternas reduktion till vanliga bråk. Vi hafva

$$q+\frac{1}{q_1}=\frac{q_1 q+1}{q_1}$$

och kunna således sätta

$$(11)\qquad P_1=q_1 q+1,\quad Q_1=q_1.$$

Den andra konvergenten bilda vi ur den första genom att ersätta q_1 med $q_1+\frac{1}{q_2}$ och förlänga med q_2. Bråket antar härvid formen

$$\frac{q(q_1 q_2+1)+q_2}{q_1 q_2+1}=\frac{q_2(q_1 q+1)+q}{q_2 q_1+1}.$$

Vi kunna således sätta

$$P_2=q_2(q_1 q+1)+q,\quad Q_2=q_2 q_1+1.$$

Om vi för likformighetens skull införa beteckningarna

(12) $$P_0 = q,\ Q_0 = 1,\quad \text{hvaraf}\quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q}{1} = q,$$

kunna uttrycken för P_2 och Q_2 skrifvas

$$\begin{cases} P_2 = q_2 P_1 + P_0, \\ Q_2 = q_2 Q_1 + Q_0. \end{cases}$$

Den tredje konvergentens täljare och nämnare bilda vi på analogt sätt, i det vi i $\frac{P_2}{Q_2}$ ersätta q_2 med $q_2 + \frac{1}{q_3}$ och därefter förlänga med q_3. Vi erhålla då

$$P_3 = q_3\left(\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) P_1 + P_0\right) = q_3 (q_2 P_1 + P_0) + P_1,$$

$$Q_3 = q_3\left(\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) Q_1 + Q_0\right) = q_3 (q_2 Q_1 + Q_0) + Q_1,$$

hvilka uttryck kortare kunna skrifvas

$$\begin{cases} P_3 = q_3 P_2 + P_1, \\ Q_3 = q_3 Q_2 + Q_1. \end{cases}$$

Då detta förfaringssätt fortsättes, erhålles för den n^{te} konvergentens täljare och nämnare följande enkla *rekursionsformler*:

(13) $$\begin{cases} P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Dessa formlers allmängiltighet bevisas medels fullständig induktion. Vi antaga således formlerna riktiga för ett visst värde n, och visa att de då äfven gälla för värdet $n+1$.

Enligt det förfaringssätt vi inslagit, erhållas täljaren och nämnaren i den $(n+1)^{\text{sta}}$ konvergenten sålunda att man i $\frac{P_n}{Q_n}$ ersätter q_n med $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$ och därefter förlänger med q_{n+1}. På detta sätt finner man [1])

[1]) Enligt hvad redan framhållits, bero uttrycken P_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-1}, Q_{n-2} alls icke af q_n.

$$P_{n+1} = q_{n+1}\left(\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right)P_{n-1} + P_{n-2}\right)$$
$$= q_{n+1}(q_n P_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1},$$

$$Q_{n+1} = q_{n+1}\left(\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right)Q_{n-1} + Q_{n-2}\right)$$
$$= q_{n+1}(q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + Q_{n-1}.$$

Men på grund af likheterna (13), hvilka enligt antagandet gälla för det betraktade värdet n, kunna dessa uttryck skrifvas

$$P_{n+1} = q_{n+1} P_n + P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = q_{n+1} Q_n + Q_{n-1},$$

och vi återfinna således formlerna (13) där n ersatts med $n+1$.

Då nu formlerna (13) direkt verificerats för $n=2$ och $n=3$, kunna vi sluta att de gälla äfven för alla följande värden n, h. s. b.

Formlerna (13) äro synnerligen bekväma för praktisk räkning och därjämte, såsom vi skola se, af grundläggande betydelse för kedjebråkens teori. De visa oss främst att P_n *och* Q_n *äro positiva hela tal, hvilka växa samtidigt med* n. Om det gifna kedjebråket är oändligt, är äfven räckan af dess konvergenter obegränsad, och dessas täljare och nämnare ökas beständigt och växa slutligen öfver hvarje föreskrifven gräns.

Såsom tillämpning af det ofvan sagda skola vi först beräkna konvergenterna för den s. 157 härledda kedjebråksutvecklingen af förhållandet $\frac{740}{611}$. Enligt (11) och (12) är

$$P_0 = 1, \quad Q_0 = 1, \quad P_1 = 5, \quad Q_1 = 4,$$

hvaraf $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{5}{4}$, och med användande af rekursionsformlerna (13) sluter man härur successivt

$$P_2 = 1.\ 5 + 1 = 6, \quad Q_2 = 1.\ 4 + 1 = 5, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{6}{5},$$
$$P_3 = 2.\ 6 + 5 = 17, \quad Q_3 = 2.\ 5 + 4 = 14, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{17}{14},$$
$$P_4 = 1.17 + 6 = 23, \quad Q_4 = 1.14 + 5 = 19, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{23}{19},$$

$$P_5 = 3 \,.\, 23 + 17 = 86\,, \quad Q_5 = 3 \,.\, 19 + 14 = 71\,, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{86}{71}\,,$$

$$P_6 = 1 \,.\, 86 + 23 = 109\,, \quad Q_6 = 1 \,.\, 71 + 19 = 90\,, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{109}{90}\,,$$

$$P_7 = 6 \,.\, 109 + 86 = 740\,, \quad Q_7 = 6 \,.\, 90 + 71 = 611\,, \quad \frac{P_7}{Q_7} = \frac{740}{611}\,.$$

Det s. 161 erhållna kedjebråket för π har följande konvergenter, hvilkas värden läsaren uppmanas att kontrollera:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1}\,, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}\,, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}\,, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}\,, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{103993}{33102}\,,$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{104348}{33215}\,, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{208341}{66317}\,, \quad \frac{P_7}{Q_7} = \frac{312689}{99532}\,.$$

Ofningsuppgifter:

1) Beräkna de tio första konvergenterna för kedjebråket (8) s. 156.
2) Bilda konvergenterna för talet 0,2422 (jmf. uppgift (1) s. 157).
3) Beräkna konvergenterna för de kedjebråk som härledts i uppgiften (2) s. 157.

29. **Konvergenternas egenskaper.** — Om den förra af likheterna (13) multipliceras med Q_{n-1}, den senare med P_{n-1}, och resultaten subtraheras, erhålles

$$P_n\, Q_{n-1} - Q_n\, P_{n-1} = -\,(P_{n-1}\, Q_{n-2} - Q_{n-1}\, P_{n-2})\,.$$

Denna likhet gäller, såsom formlerna (13), för $n = 2, 3, 4, \ldots$, och man finner sålunda successivt

$$\begin{aligned} P_1\, Q_0 - Q_1\, P_0 &= -\,(P_2\, Q_1 - Q_2\, P_1) \\ &= (-1)^2\,(P_3\, Q_2 - Q_3\, P_2) \\ &= (-1)^3\,(P_4\, Q_3 - Q_4\, P_3) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (-1)^{n-1}\,(P_n\, Q_{n-1} - Q_n\, P_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Men enligt (11) och (12) är

$$P_1\, Q_0 - Q_1\, P_0 = (q_1\, q + 1) \cdot 1 - q_1\, q = 1\,,$$

och vi erhålla således

$$(14) \qquad P_n\, Q_{n-1} - Q_n\, P_{n-1} = (-1)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

hvilken formel är af fundamental vikt för kedjebråkens teori.

Man erhåller t. ex. för de s. 165 anförda konvergenterna för talet π följande likheter:

$$P_1 Q_0 - Q_1 P_0 = 22 . \ 1 - 7 . \ 3 = 22 - 21 = 1,$$
$$P_2 Q_1 - Q_2 P_1 = 333 . \ 7 - 106 . \ 22 = 2331 - 2332 = -1,$$
$$P_3 Q_2 - Q_3 P_2 = 355 . 106 - 113 . 333 = 37630 - 37629 = 1,$$

o. s. v.

Ur (14) framgår omedelbart att *talen* P_n *och* Q_n *äro relativa primtal*, d. v. s. att de icke hafva någon annan gemensam heltalig divisor än 1. Ty hvarje gemensam divisor till P_n och Q_n utgör äfven divisor till $P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}$, och innehålles således, enligt (14), i enheten. Alltså:

Kedjebråkets konvergenter erhållas under reducerad eller förkortad form om deras täljare och nämnare bildas enligt rekursionsformlerna (13).

Likheten (14) tillåter oss vidare att draga intressanta slutsatser beträffande konvergenternas inbördes storlek. Då denna likhet divideras med $Q_n Q_{n-1}$, erhålles

$$(15) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Vi ersätta här n med $n-1$ och addera den erhållna likheten

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-2}}{Q_{n-1} Q_{n-2}} = \frac{(-1)^n}{Q_{n-1} Q_{n-2}}$$

till den föregående. Vi få då

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = (-1)^n \left(\frac{1}{Q_{n-1} Q_{n-2}} - \frac{1}{Q_n Q_{n-1}}\right)$$
$$= (-1)^n \frac{Q_n - Q_{n-2}}{Q_n Q_{n-1} Q_{n-2}},$$

eller, enligt (13),

$$(16) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = (-1)^n \frac{q_n}{Q_n Q_{n-2}}.$$

Skillnaden i venstra membrum är således positiv om n är ett jämnt tal, negativ om n är ett udda tal, och man har följaktligen för hvarje positivt helt tal k

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} > \frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}, \quad \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}},$$

hvarur för $k = 1, 2, 3, \ldots$ successivt erhålles

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \cdots < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \cdots, \\ &\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \cdots > \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} > \cdots. \end{aligned}$$

Alltså:

Konvergenterna med jämn index bilda en stigande talräcka, konvergenterna med udda index en fallande talräcka.

Ur det ofvan sagda följer vidare:

Hvarje konvergent med jämn index är mindre än hvilken som helst af konvergenterna med udda index.

Likheten (15) ger oss nämligen, för $n = 2k + 1$ och för $n = 2k$,

$$(18) \qquad \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} > \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}, \quad \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} > \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}.$$

Vi antaga först att det gifna kedjebråket är ändligt och beteckna med $\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$ den sista konvergenten med jämn index. Den sista konvergenten med udda index är då antingen $\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}$ eller $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$, och densamma är således, enligt ofvanstående olikheter, i hvartdera fallet större än den sista konvergenten med jämn index, hvarur enligt (17) riktigheten af vårt påstående omedelbart framgår.

Vi antaga nu att det gifna kedjebråket är oändligt och räckan af dess konvergenter således obegränsad, och vilja bevisa att $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, där m och n äro tvenne godtyckligt valda positiva hela tal eller 0. För detta ändamål behöfva vi endast välja ett positivt helt tal k som är större än såväl m som n, hvaraf följer $2k + 1 > 2m + 1, 2k > 2n$,

och sammanställa de ofvan bevisade olikheterna (jmf. (17) och (18))

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} > \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}, \quad \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} > \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}, \quad \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}},$$

ur hvilka den sökta olikheten omedelbart följer.

Exempelvis har man mellan de s. 165 uppskrifna konvergenterna för talet π följande olikheter

$$\frac{3}{1} < \frac{333}{106} < \frac{103993}{33102} < \frac{208341}{66317},$$

$$\frac{22}{7} > \frac{355}{113} > \frac{104348}{33215} > \frac{312689}{99532},$$

hvarjämte hvarje konvergent i den undre raden är större än enhvar af konvergenterna i den öfre.

Öfningsuppgifter:

1) Bestäm, med stöd af likheten (14), alla heltaliga lösningssystem x, y till den s. k. *Diophantiska* ekvationen

$$740\,x - 611\,y = 1.$$

Lös härefter ekvationen

$$740\,x - 611\,y = 3$$

i hela tal.

2) Sök alla heltaliga lösningssystem till den Diophantiska ekvationen

$$113\,x - 89\,y = 5$$

och speciellt de minsta positiva hela tal x, y som satisfiera densamma.

3) Bestäm alla system af hela tal x, y, z som satisfiera det Diophantiska ekvationssystemet

$$\begin{cases} 17\,x - 11\,y = 1, \\ 9\,x + y - 5\,z = 19. \end{cases}$$

30. **Uppskattning af skillnaden mellan ett tal och en af dess konvergenter.** — Om ett gifvet positivt tal ω utvecklas i kedjebråk och detta afbrytes efter en viss delnämnare q_n, har man, såsom i n° 26 visats,

$$\omega = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_n + \Theta_n}}}$$

där $0 < \Theta_n < 1$. Detta uttryck framgår ur konvergenten

$$\frac{P_n}{Q_n} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\cdot}{\cdot \; + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

då i denna q_n ersättes med $q_n + \Theta_n$. Nu är enligt (13)

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

där P_{n-1}, Q_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-2} alls icke bero af q_n. I det vi för q_n substituera $q_n + \Theta_n$, erhålla vi således för ω uttrycket

$$\omega = \frac{(q_n + \Theta_n) P_{n-1} + P_{n-2}}{(q_n + \Theta_n) Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{(q_n P_{n-1} + P_{n-2}) + \Theta_n P_{n-1}}{(q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + \Theta_n Q_{n-1}},$$

hvilket enligt (13) kan skrifvas

(19) $$\omega = \frac{P_n + \Theta_n P_{n-1}}{Q_n + \Theta_n Q_{n-1}} \qquad (0 < \Theta_n < 1).$$

Ur denna likhet följer

$$\omega - \frac{P_n}{Q_n} = -\Theta_n \cdot \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_n (Q_n + \Theta_n Q_{n-1})},$$

eller, på grund af likheten (14),

(20) $$\omega - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{\Theta_n}{Q_n (Q_n + \Theta_n Q_{n-1})}.$$

Högra membrum är positivt om talet n är jämnt, negativt om n är udda. I förra fallet är således $\omega > \frac{P_n}{Q_n}$, i senare fallet $\omega < \frac{P_n}{Q_n}$, hvaraf följande viktiga sats:

Om ett gifvet tal ω utvecklas i kedjebråk och man bildar dettas konvergenter, är hvarje konvergent med jämn index mindre än ω, hvarje konvergent med udda index större än ω. Talet ω ligger således alltid mellan två på hvarandra följande af dess konvergenter.

Ett undantag utgör, i det fall då ω är ett rationellt tal, den sista konvergenten, hvars värde sammanfaller med ω.

Då $\Theta_n < 1$ och $Q_n + \Theta_n Q_{n-1} > Q_n$, kunna vi ur (20) vidare härleda olikheten

$$(21) \qquad \left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Skillnaden mellan ett tal och hvilken som helst af dess konvergenter är således numeriskt mindre än det reciproka värdet af kvadraten på konvergentens nämnare.

Denna gräns kan ytterligare skärpas. Då ω ligger mellan $\frac{P_n}{Q_n}$ och $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, såsom ofvan visats, är nämligen

$$\left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right|.$$

Men enligt (14) är

$$(22) \qquad \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{| P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n |}{Q_n Q_{n+1}} = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

och vi få således

$$(21)' \qquad \left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Då enligt (13) $Q_{n+1} > q_{n+1} Q_n$, kunna vi ur (21)′ ännu sluta till den enklare men mindre precisa olikheten

$$(21)'' \qquad \left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1}} \cdot \frac{1}{Q_n^2}.$$

Olikheten (21)′ leder oss till följande intressanta sats:

Uttrycket $\left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right|$ *aftager beständigt då n växer. Hvarje*

konvergent kommer således det gifna talet närmare än de föregående konvergenterna.

Vi hafva att visa att, för hvarje index n,

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \left|\omega - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|.$$

Ur (21)′ följer, då n ersättes med $n+1$,

(23) $$\left|\omega - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \frac{1}{Q_{n+1}\,Q_{n+2}}.$$

Men enligt (13) är $Q_{n+2} = q_{n+2}\,Q_{n+1} + Q_n > Q_{n+1} + Q_n > 2\,Q_n$,

hvaraf $Q_{n+1}\,Q_{n+2} > 2\,Q_n\,Q_{n+1}$ och följaktligen

(23)′ $$\left|\omega - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Q_n\,Q_{n+1}}.$$

Enär ω ligger mellan $\frac{P_n}{Q_n}$ och $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, kunna vi å andra sidan skrifva likheten (22) under formen

(24) $$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| + \left|\omega - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q_n\,Q_{n+1}}.$$

Då vi härifrån subtrahera olikheten (23)′, erhålles

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Q_n\,Q_{n+1}} > \left|\omega - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|,$$

hvilket är den sökta olikheten.

Detta bevis ger oss tillika en undre gräns för $\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right|$, nämligen $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Q_n\,Q_{n+1}}$. Sammanställa vi denna med den öfre gränsen (21)′, kunna vi således skrifva

(25) $$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Q_n\,Q_{n+1}} < \left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n\,Q_{n+1}}.$$

En noggrannare undre gräns erhålles då (23) subtraheras från (24).

Om det gifna talet ω är irrationellt och räckan af dess konvergenter således obegränsad, kunna vi ur olikheten (21) sluta att uttrycket $\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right|$ sjunker under hvarje föreskrifven gräns då n växer, eller annorlunda uttryckt, att $\frac{P_n}{Q_n}$ *har talet* ω *såsom gränsvärde eller limes för* $n = \infty$, hvilket betecknas

$$(26) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \omega .$$

Vi kunna häraf t. ex. sluta att konvergenterna för kedjebråket (8) s. 156 hafva till gränsvärde förhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat, d. v. s. $\sqrt{2}$.

Vi skola tillämpa ofvanstående resultat på de första konvergenterna för talet π (jmf. s. 165).

$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}$ är det närmevärde för π som angafs af ARCHIMEDES. Då $Q_2 = 106$, erhålles ur (21)'

$$\frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{7 \,.\, 106} = \frac{1}{742} < 0{,}00135 .$$

Faktiskt är, med fem decimaler,

$$\frac{22}{7} - \pi = 0{,}00126 .$$

Af särskildt intresse är vidare närmevärdet $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}$, hvilket angafs af den holländska matematikern METIUS (omkring år 1600). Man har $Q_4 = 33102$, och olikheten (21)' ger således i förevarande fall

$$\frac{355}{113} - \pi < \frac{1}{113 \,.\, 33102} < 0{,}0000002674 .$$

Vid uträkning med tio decimaler finner man

$$\frac{355}{113} - \pi = 0{,}0000002668 .$$

Öfningsuppgifter:

1) Undersök noggrannheten af de första konvergenterna för talen e och $\frac{e-1}{2}$ (jmf. uppgiften (2) s. 161).

2) Beräkna värdet af $\sqrt{2}$ ur dess kedjebråksutveckling med tolf decimaler. Felet bör noggrant uppskattas och räkningen utföras så enkelt som möjligt.

3) Bevisa, genom att subtrahera (23) från (24), riktigheten af olikheten

$$\left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| > \frac{1}{Q_n(Q_{n+1}+Q_n)} > \frac{1}{q_{n+1}+2} \cdot \frac{1}{Q_n^2}.$$

31. Jämförelse mellan ett tals konvergenter och öfriga rationella värden. — För att så noggrant som möjligt angifva värdet af ett tal ω medels ett bråk [1]) med gifven nämnare b, har man att söka de på hvarandra följande heltaliga multipler af $\frac{1}{b}$ mellan hvilka ω faller, samt att af dessa multipler utvälja den som kommer ω närmare. Beteckna vi denna med $\frac{a}{b}$, kunna vi för afvikelsen mellan ω och $\frac{a}{b}$ på förhand icke angifva någon noggrannare gräns än

$$\left| \omega - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b}.$$

Olikheten (21) visar oss således att, bland ett tals rationella närmevärden, dess konvergenter utmärka sig genom en särskildt hög grad af noggrannhet. Vi skola i förevarande paragraf närmare undersöka denna fråga, och bibehålla härvid de tidigare beteckningarna.

Vi veta att det gifna talet ω faller mellan konvergenterna $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ och $\frac{P_n}{Q_n}$, och närmare den senare af dem. Häraf sluta vi främst:

Hvarje tal som skiljer sig mindre från ω än konvergenten $\frac{P_n}{Q_n}$ ligger mellan $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ och $\frac{P_n}{Q_n}$.

Antaga vi att värdet af bråket $\frac{a}{b}$ faller mellan nämnda konvergenter, är

---

[1]) Då vi i denna paragraf tala om ett *bråk*, antaga vi detta alltid gifvet under formen af en kvot af två hela tal.

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|=\frac{|P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}|}{Q_nQ_{n-1}}=\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}.$$

Å andra sidan är

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|=\frac{|aQ_{n-1}-bP_{n-1}|}{bQ_{n-1}}\geqq\frac{1}{bQ_{n-1}},$$

ty $aQ_{n-1}-bP_{n-1}$ är ett helt tal som är olika noll, då $\frac{a}{b}$ är olika $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, och dess numeriska värde är således >1. Ur dessa två olikheter följer

$$\frac{1}{bQ_{n-1}}<\frac{1}{Q_nQ_{n-1}},\quad bQ_{n-1}>Q_nQ_{n-1},$$

eller $b>Q_n$. Alltså:

I hvarje bråk som till sitt värde ligger mellan $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ *och* $\frac{P_n}{Q_n}$ *är nämnaren större än* Q_n.

Då denna slutsats sammanställes med den föregående, erhålles följande resultat:

Hvarje bråk, som kommer ett gifvet tal närmare än en viss af detta tals konvergenter, har större nämnare än ifrågavarande konvergent.

Om ett bråk $\frac{a}{b}$, som icke är till formen identiskt med konvergenten $\frac{P_n}{Q_n}$, kommer talet ω lika nära som denna konvergent, är säkert $b>Q_n$. Ty antingen är $\frac{a}{b}=\frac{P_n}{Q_n}$, och i detta fall är påståendet riktigt, då ju bråket $\frac{P_n}{Q_n}$ icke kan förkortas; eller ligga $\frac{a}{b}$ och $\frac{P_n}{Q_n}$ på motsatta sidor om ω, och då ligger $\frac{a}{b}$ mellan $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ och ω $\left(\text{emedan } \omega \text{ ligger närmare } \frac{P_n}{Q_n} \text{ än } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$ och således äfven mellan $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ och $\frac{P_n}{Q_n}$, hvaraf enligt näst-föregående sats följer att $b>Q_n$.

Bland de bråk hvilkas nämnare äro $< Q_n$, finnes således, om vi undantaga konvergenten $\frac{P_n}{Q_n}$, icke något enda som skulle komma ω närmare än eller lika nära som denna konvergent. Vi hafva härmed bevisat följande intressanta sats, hvarur framgår den särställning ett tals konvergenter intaga bland dess rationella närmevärden öfverhufvud:

Hvarje konvergent till ett gifvet tal kommer detta närmare än hvilket annat bråk som helst med mindre eller lika stor nämnare.

Vi äro sålunda säkra om att konvergenten $\frac{22}{7}$ återger värdet af π noggrannare än hvarje annat bråk hvars nämnare är $\leqq 7$, konvergenten $\frac{333}{106}$ noggrannare än hvarje annat bråk hvars nämnare är < 106, o. s. v.

Ofvan erhållna resultat kunna väsentligen preciseras om vi jämföra en konvergent $\frac{P_n}{Q_n}$ endast med de bråk, $\frac{a}{b}$, som ligga på samma sida om det gifna talet ω som denna konvergent. De af ifrågavarande bråk som utgöra noggrannare närmevärden för ω än $\frac{P_n}{Q_n}$, ligga mellan $\frac{P_n}{Q_n}$ och ω.

Vi känna en räcka dylika bråk, ty vi veta af det föregående att konvergenterna $\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}, \frac{P_{n+4}}{Q_{n+4}}, \ldots$ från samma sida allt mer närma sig det gifna talet ω. Vi hafva således att närmare undersöka de bråk hvilkas värden falla mellan två på hvarandra följande af dessa konvergenter.

Enligt (13) är

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{P_n + q_{n+2} P_{n+1}}{Q_n + q_{n+2} Q_{n+1}}. \tag{27}$$

Vi betrakta det allmännare uttrycket

$$\frac{P_n + \varrho P_{n+1}}{Q_n + \varrho Q_{n+1}} = \frac{P_{n+1} + \frac{P_n}{\varrho}}{Q_{n+1} + \frac{Q_n}{\varrho}}, \tag{28}$$

och visa att detta besitter följande egenskaper:

Då ϱ *kontinuerligt växer från* 0 *till* ∞, *varierar uttrycket (28) kontinuerligt och ständigt i samma riktning från värdet* $\frac{P_n}{Q_n}$ *till värdet* $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$.

Om ϱ växer med $\Delta\varrho$, erhåller uttrycket (28) tillväxten

$$\frac{P_n + (\varrho + \Delta\varrho) P_{n+1}}{Q_n + (\varrho + \Delta\varrho) Q_{n+1}} - \frac{P_n + \varrho P_{n+1}}{Q_n + \varrho Q_{n+1}}$$

$$= \Delta\varrho \frac{P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n}{(Q_n + \varrho Q_{n+1})(Q_n + (\varrho + \Delta\varrho) Q_{n+1})},$$

hvilken enligt (14) kan skrifvas

$$(-1)^n \frac{\Delta\varrho}{(Q_n + \varrho Q_{n+1})(Q_n + (\varrho + \Delta\varrho) Q_{n+1})}.$$

Om $\varrho > 0$ och $\Delta\varrho > 0$, är detta uttrycks numeriska värde $< \frac{|\Delta\varrho|}{Q_n^2}$. Vi sluta häraf till en början att uttrycket (28) är kontinuerligt för $\varrho > 0$, hvilket för öfrigt följer af hvad vi i första kapitlet visat om rationella funktioners kontinuitet. Men vi se vidare att ofvanstående tillväxt, för $\varrho > 0$, $\Delta\varrho > 0$, alltid har samma tecken som $(-1)^n$, hvaraf följer att, då ϱ växer från 0 till ∞, uttrycket (28) antingen ständigt ökas eller ständigt minskas, beroende på om talet n är jämnt eller udda. Slutligen antar ifrågavarande uttryck för $\varrho = 0$ värdet $\frac{P_n}{Q_n}$ och närmar sig, då ϱ växer mot ∞ och $\frac{1}{\varrho}$ således aftar mot 0, gränsvärdet $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, såsom framgår ur dess senare form. Vårt påstående är härmed fullständigt bevisadt.

För $\varrho = q_{n+2}$ reducerar sig, enligt likheten (27), uttrycket (28) till $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$. *Dess värde ligger således mellan* $\frac{P_n}{Q_n}$ *och* $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$ *om* $0 < \varrho < q_{n+2}$.

Man ser vidare omedelbart att *värdet af uttrycket (28) är rationellt alltid och endast om* ϱ *har ett rationellt värde.* Sätta vi

$$\varrho = \frac{t}{s},$$

där s och t äro positiva hela tal, antar (28) formen af ett bråk

$$(28)' \qquad \frac{sP_n + tP_{n+1}}{sQ_n + tQ_{n+1}}$$

med heltalig täljare och nämnare. Ur likheterna

$$Q_n(sP_n + tP_{n+1}) - P_n(sQ_n + tQ_{n+1}) = (-1)^n t,$$
$$Q_{n+1}(sP_n + tP_{n+1}) - P_{n+1}(sQ_n + tQ_{n+1}) = (-1)^{n+1} s,$$

hvilka bevisas med stöd af (14), framgår att *bråket (28)' har reducerad form (d. v. s. icke kan förkortas) om s och t äro relativa primtal.* Ty en faktor som är gemensam för bråkets täljare och nämnare innehålles, enligt dessa likheter, såväl i t som i s.

Af ofvanstående resultat draga vi följande slutsats:

Alla bråk hvilka till sitt värde ligga mellan $\frac{P_n}{Q_n}$ och $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$ framgå ur uttrycket (28)' då åt s, t efterhand gifvas alla möjliga positiva heltalsvärden som uppfylla villkoret $\frac{t}{s} < q_{n+2}$.

Dessa bråk utgöra desto noggrannare närmevärden för det gifna talet ω ju större förhållandet $\frac{t}{s}$ är.

Vi skola speciellt betrakta dem bland ifrågavarande bråk hvilkas nämnare ligga mellan Q_n och Q_{n+2}. De erhållas ur (28)' då för s, t väljas alla system af positiva hela tal som satisfiera villkoret

$$sQ_n + tQ_{n+1} < Q_{n+2},$$

ty ur detta villkor följer, då $Q_n + q_{n+2}Q_{n+1} = Q_{n+2}$ och $s > 1$, att $t < q_{n+2}$ och således $\frac{t}{s} < q_{n+2}$.

Om $q_{n+2} = 1$ finnes det icke några bråk af nämnda slag, ty i detta fall är $Q_{n+2} = Q_n + Q_{n+1}$ och ofvanstående villkor är således icke uppfylldt för några positiva hela tal s, t.

Är däremot $q_{n+2} > 1$, existera bråk med de erfordrade egenskaperna, och bland dessa bråk äro de af särskildt intresse som erhållas ur (28)' för $s = 1$, alltså bråken

$$(29) \qquad \frac{P_n + tP_{n+1}}{Q_n + tQ_{n+1}} \qquad (t = 1, 2, \ldots, q_{n+2} - 1),$$

hvilka sägas utgöra *sidokonvergenter* till det gifna talet ω. Om dessa sidokonvergenter[1]), hvilka, enligt hvad ofvan sagts, alla hafva reducerad form, skola vi bevisa följande sats:

Hvarje bråk $\frac{a}{b}$ *som till sitt värde ligger mellan två på hvarandra följande tal i räckan*

$$(30)\quad \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}}, \frac{P_n+2P_{n+1}}{Q_n+2Q_{n+1}}, \ldots, \frac{P_n+(q_{n+2}-1)P_{n+1}}{Q_n+(q_{n+2}-1)Q_{n+1}}, \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}},$$

har större nämnare än det senare af dessa två tal.

Vi antaga att $\frac{a}{b}$ ligger mellan $\frac{P_n+tP_{n+1}}{Q_n+tQ_{n+1}}$ och det därpå följande talet i räckan (30). Man finner då, enligt (14),

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{P_n+tP_{n+1}}{Q_n+tQ_{n+1}}\right| < \left|\frac{P_n+(t+1)P_{n+1}}{Q_n+(t+1)Q_{n+1}}-\frac{P_n+tP_{n+1}}{Q_n+tQ_{n+1}}\right| =$$

$$= \frac{1}{(Q_n+(t+1)Q_{n+1})(Q_n+tQ_{n+1})},$$

och å andra sidan

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{P_n+tP_{n+1}}{Q_n+tQ_{n+1}}\right| = \frac{|a(Q_n+tQ_{n+1})-b(P_n+tP_{n+1})|}{b(Q_n+tQ_{n+1})}$$

$$> \frac{1}{b(Q_n+tQ_{n+1})},$$

och ur dessa olikheter följer

$$b > Q_n+(t+1)Q_{n+1},$$

hvarmed satsen är bevisad (jmf. det analoga beviset s. 174).

Vi uppskrifva nu räckan af alla konvergenter med jämn index, började med $\frac{P_0}{Q_0}$, och de mellan dem liggande sidokonvergenterna:

---

[1]) Om det gifna talet ω är rationellt och $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ $(=\omega)$ dess sista konvergent (i hvilket fall vi kunna sätta $q_{n+2}=\infty$), ger oss uttrycket (29), då t genomlöper alla positiva hela tal, en oändlig följd sidokonvergenter, hvilka från samma sida allt mer närma sig talet ω och hafva detta till gränsvärde.

$$
\text{(I)}\quad
\begin{array}{l}
\dfrac{P_0}{Q_0},\ \dfrac{P_0+P_1}{Q_0+Q_1},\ \dfrac{P_0+2P_1}{Q_0+2Q_1},\ldots\ldots,\dfrac{P_0+(q_2-1)P_1}{Q_0+(q_2-1)Q_1},\\[2ex]
\dfrac{P_2}{Q_2},\ \dfrac{P_2+P_3}{Q_2+Q_3},\ \dfrac{P_2+2P_3}{Q_2+2Q_3},\ldots\ldots,\dfrac{P_2+(q_4-1)P_3}{Q_2+(q_4-1)Q_3},\\[2ex]
\dfrac{P_4}{Q_4},\ \dfrac{P_4+P_5}{Q_4+Q_5},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Likaså uppskrifva vi räckan af alla konvergenter med udda index och de mellan dem liggande sidokonvergenterna:

$$
\text{(II)}\quad
\begin{array}{l}
\dfrac{P_1}{Q_1},\ \dfrac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2},\ \dfrac{P_1+2P_2}{Q_1+2Q_2},\ldots\ldots,\dfrac{P_1+(q_3-1)P_2}{Q_1+(q_3-1)Q_2},\\[2ex]
\dfrac{P_3}{Q_3},\ \dfrac{P_3+P_4}{Q_3+Q_4},\ \dfrac{P_3+2P_4}{Q_3+2Q_4},\ldots\ldots,\dfrac{P_3+(q_5-1)P_4}{Q_3+(q_5-1)Q_4},\\[2ex]
\dfrac{P_5}{Q_5},\ \dfrac{P_5+P_6}{Q_5+Q_6},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

I räckan (I) ökas talen beständigt, i räckan (II) aftaga de beständigt. I hvardera räckan växa bråkens nämnare oupphörligt, och hvarje bråk har reducerad form.

Om ω har ett irrationellt värde, äro båda räckorna oändliga och konvergera båda mot gränsvärdet ω, räckan (I) från den undre sidan, räckan (II) från den öfre.

Är däremot ω ett rationellt tal och $\frac{P_n}{Q_n}$ $(=\omega)$ den sista konvergenten, afslutas, i händelse n är jämnt, räckan (I) med $\frac{P_n}{Q_n}$, medan däremot räckan (II) fortsättes in infinitum, ty efter $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ följer en obegränsad räcka sidokonvergenter,

$$\frac{P_{n-1}+tP_n}{Q_{n-1}+tQ_n} \qquad (t=1,2,3,\ldots).$$

hvilka konvergera mot gränsvärdet $\frac{P_n}{Q_n}=\omega$. Om n är ett udda tal är förhållandet omvändt: räckan (II) är ändlig och afslutas med $\frac{P_n}{Q_n}$, medan i (I) efter konvergenten $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$

följer en oändlig räcka sidokonvergenter, hvilka hafva ω till gränsvärde.

Ur det sagda följer att hvarje undre närmevärde för ω som är $> \frac{P_0}{Q_0} (= q)$ antingen sammanfaller med något af talen i räckan (I) eller ligger mellan två på hvarandra följande af dessa tal. På samma sätt ligger hvarje öfre närmevärde för ω som är $< \frac{P_1}{Q_1}$ antingen mellan två på hvarandra följande tal i räckan (II) eller är det lika med ett af dessa tal.

Nu följer af det ofvan bevisade att hvarje bråk, $\frac{a}{b}$, som till sitt värde ligger mellan två på hvarandra följande tal i räckan (I) eller i räckan (II), har större nämnare än det senare af dessa tal. Då denna slutsats sammanställes med den föregående, erhålles följande resultat:

Hvarje bråk, $\frac{a}{b}$, *som är* $< \omega$ *och kommer* ω *närmare än ett visst tal i räckan* (I), *har större nämnare än det följande talet i denna räcka eller är identiskt med detta tal.*

Likaså, om bråket $\frac{a}{b}$ *är* $> \omega$ *och kommer* ω *närmare än ett visst tal i räckan* (II), *är* b *större än det följande talets nämnare, såframt icke* $\frac{a}{b}$ *är identiskt med detta tal.*

Med stöd af dessa egenskaper hos räckorna (I) och (II) kunna vi omedelbart lösa följande intressanta problem:

Att bland alla bråk, $\frac{a}{b}$, *hvilkas nämnare icke öfverskrida en viss gräns* M, *finna det som till sitt värde kommer ett gifvet tal* ω *närmast.*

För detta ändamål bilda vi de mot talet ω svarande räckorna (I) och (II), samt utvälja härefter först från räckan (I) det sista tal hvars nämnare är $< M$. Detta tal är, bland alla dem af de betraktade bråken som äro mindre än ω, det som kommer ω närmast; ty ett bråk som är $< \omega$ och kommer ω närmare än ifrågavarande tal, har, enligt hvad ofvan bevisats, åtminstone lika stor nämnare som det följande talet i räckan, och dettas nämnare är $> M$.

Från räckan (II) utvälja vi likaledes det sista tal hvars nämnare är $< M$. Detta tal kommer ω närmast bland alla de bråk som äro $> \omega$ och hvilkas nämnare äro $< M$.

Det af dessa två tal som afviker mindre från ω ger oss lösningen till problemet.

Såsom tillämpning skola vi, bland alla de bråk hvilkas nämnare icke öfverstiga 10000, söka det som kommer talet π närmast.

Vi hafva i detta fall (jmf. s. 165)

$$Q_3 = 113\,, \quad Q_3 + Q_4 = Q_5 = 33215\,.$$

Då den föreskrifna gränsen 10000 ligger mellan dessa tal, är $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}$ noggrannast bland alla de rationella öfre närmevärden för π hvilkas nämnare äro < 10000.

För att finna det noggrannaste undre närmevärdet hafva vi att bland de mellan $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}$ och $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{103993}{33102}$ liggande sidokonvergenterna

$$\frac{333 + 355\,t}{106 + 113\,t} \qquad (t = 1\,, 2\,, \ldots, 291\ (= q_4 - 1))$$

utvälja den sista hvars nämnare är < 10000. Villkoret

$$106 + 113\,t < 10000$$

ger oss $t < 87{,}5\ldots$ Den sökta sidokonvergenten motsvarar således värdet $t = 87$ och utgöres följaktligen af bråket

$$\frac{333 + 355\,.\,87}{106 + 113\,.\,87} = \frac{31218}{9937}\,.$$

Bland de bråk hvilkas nämnare icke öfverstiga 10000, utgör således $\frac{355}{113}$ det noggrannaste öfre närmevärdet och $\frac{31218}{9937}$ det noggrannaste undre närmevärdet för talet π. Vid uträkning med nio decimaler finner man

$$\frac{355}{113} - \pi = 0{,}000000267\,,$$

$$\pi - \frac{31218}{9937} = 0{,}000000624\,.$$

Den förra skillnaden är väsentligen mindre än den senare, och vi komma således till det resultat att, bland alla bråk hvilkas nämnare äro < 10000, det af METIUS angifna bråket $\frac{355}{113}$ kommer π närmast. Den synnerliga noggrannheten hos detta närmevärde härrör däraf att den följande delnämnaren q_4 i kedjebråksutvecklingen af talet π har ett exceptionellt stort värde, nämligen 292.

Öfningsuppgifter:

1) En meter är $= 3,3681$ fot. Uttryck förhållandet mellan dessa längdenheter, äfvensom förhållandet mellan en kilometer och en verst $= 3600$ fot, så noggrant det är möjligt medels bråk hvilkas nämnare icke öfverstiga 20.

2) Undersök noggrannheten hos de första konvergenterna för kedjebråksutvecklingen af talet 0,2422 (jmf. uppgiften (1) s. 157). Hvilka slutsatser kunna ur denna undersökning dragas beträffande fördelningen af de s. k. skottdagarna, om man vill ernå en så noggrann tideräkning som möjligt?

3) Hvilket bland de bråk som komma π närmare än $\frac{22}{7}$ har den minsta nämnaren? Lös samma uppgift för konvergenten $\frac{355}{113}$.

4) Bevisa att olikheten

$$\left|\frac{a}{b} - \omega\right| > \frac{1}{2b^2}$$

är uppfylld för hvarje bråk $\frac{a}{b}$ $(b > 1)$ som icke utgör en konvergent till talet ω. Härur följer LAGRANGE's intressanta sats:

Hvarje bråk $\frac{a}{b}$, $(b > 1)$, *som uppfyller villkoret*

$$\left|\frac{a}{b} - \omega\right| < \frac{1}{2b^2},$$

utgör en konvergent till talet ω.

32. **Oändliga kedjebråk**. — Vi hafva i det föregående sett att EUKLIDES' algoritm, då den tillämpas på tvenne inkommensurabla storheter, alltid leder till en obegränsad kedja af likheter, ur hvilka förhållandet mellan dessa storheter erhålles under formen af ett kedjebråk som fortsättes in infinitum. Vi hafva vidare visat att detta kedjebråks successiva kon-

vergenter allt mer närma sig nämnda förhållande, hvars värde är ett irrationellt tal, och hafva detta till gränsvärde.

Vi skola nu direkt betrakta ett oändligt kedjebråk

$$(31) \qquad q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \ddots}}}}$$

där q är ett positivt helt tal eller 0 och delnämnarne q_1, $q_2, \ldots, q_n, \ldots$ äro positiva hela tal, gifna enligt en bestämd lag som entydigt definierar det mot hvarje föreskrifven index n svarande talet q_n [1]).

Enligt n° 29 veta vi att detta kedjebråks konvergenter med jämn index bilda en stigande talräcka:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \cdots\cdots < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \cdots\cdots,$$

medan dess konvergenter med udda index bilda en fallande talräcka:

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \cdots\cdots > \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} > \cdots\cdots,$$

samt att hvarje tal i den första räckan är mindre än hvarje tal i den senare. Ur likheten (15) i samma paragraf sluta

[1]) I Analysen betraktas äfven kedjebråk af den allmännare formen

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}},$$

där talen a, b dessutom icke nödvändigtvis äro hela tal utan, i vissa undersökningar, kunna hafva godtyckliga reella eller t. o. m. komplexa värden.

vi vidare, i det vi ersätta n med $2k+1$, att det är möjligt att välja k så stort att skillnaden

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{1}{Q_{2k}\,Q_{2k+1}}$$

blir mindre än ett på förhand gifvet godtyckligt litet tal ε.

De två oändliga talmängder som bildas, den ena af samtliga konvergenter med jämn index, den andra af samtliga konvergenter med udda index, besitta således följande tre egenskaper:

Hvarje tal i den förra mängden är mindre än hvarje tal i den senare.

Det finnes i den förra mängden intet största och i den senare intet minsta tal.

Om man föreskrifvit ett godtyckligt litet positivt tal ε, kan man alltid välja tvenne tal ur hvar sin af de betraktade mängderna på sådant sätt att deras skillnad är numeriskt mindre än ε.

Enligt den s. 87 anförda allmänna satsen kunna vi häraf sluta att det finnes ett och endast ett tal som *åtskiljer* ifrågavarande talmängder, d. v. s. som är större än hvarje konvergent med jämn index och samtidigt mindre än hvarje konvergent med udda index. Vi beteckna detta tal med ω.

Talet ω ligger sålunda mellan $\frac{P_n}{Q_n}$ och $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, n må hafva hvilket värde som helst. Då enligt (15)

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_{n+1}\,Q_n} < \frac{1}{Q_n^{\,2}},$$

är således äfven

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^{\,2}} \tag{32}$$

för hvarje index n. I denna olikhet närmar sig högra membrum gränsvärdet 0 då n växer, och vi erhålla således

$$\omega = \lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n}.$$

Ur (32) kunna vi vidare sluta att ω *är ett irrationellt tal*. Ty i motsatt fall hade man $\omega = \frac{a}{b}$, där a och b äro positiva hela tal, och således

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{|aQ_n - bP_n|}{bQ_n}.$$

Täljaren i högra membrum är > 1, ty $aQ_n - bP_n$ är ett helt tal som säkert icke är 0, då $\omega \neq \frac{P_n}{Q_n}$ för hvarje n. Vi erhålla således

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_u}\right| \geq \frac{1}{bQ_n},$$

hvilken olikhet, sammanställd med (32), ger oss

$$\frac{1}{bQ_n} < \frac{1}{Q_n^2}, \quad bQ_n > Q_n^2$$

eller $Q_n < b$, och detta för hvarje index n. Denna slutsats innebär emellertid en omöjlighet, ty vi veta att Q_n växer öfver hvarje föreskrifven gräns då n ökas.

Vi hafva sålunda bevisat följande viktiga sats:

De successiva konvergenterna för hvarje gifvet oändligt kedjebråk (31) hafva till gränsvärde ett irrationellt tal, hvilket är större än hvarje konvergent med jämn index och mindre än hvarje konvergent med udda index.

Vi säga kort att ifrågavarande irrationella tal utgör *det oändliga kedjebråkets värde*.

För hvarje reellt positivt tal hafva vi medels ett bestämdt förfaringssätt, nämligen EUKLIDES' algoritm, erhållit en kedjebråksutveckling af det ofvan betraktade slaget, hvilken är ändlig eller oändlig, beroende på om det gifna talet är rationellt eller irrationellt, och omvändt hafva vi visat att hvarje gifvet kedjebråk har ett fullt bestämdt värde, hvilket är rationellt eller irrationellt, allt efter som kedjebråket är ändligt eller oändligt.

För att förfullständiga dessa resultat hafva vi ännu att ådagalägga att ett gifvet tal endast på ett sätt kan utvecklas i kedjebråk, eller, med andra ord, att *två kedjebråk som icke äro till formen identiska hafva olika värden.* I beviset stödja vi oss på de egenskaper vi lärt känna hos konvergenterna.

Vi betrakta således tvenne kedjebråk

$$\omega = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}\,, \qquad \omega' = q' + \cfrac{1}{q'_1 + \cfrac{1}{q'_2 + \cdots}}$$

hvilka icke äro till formen identiska. Vi antaga allmänt att de hela beståndsdelarna och de n första delnämnarne äro desamma i de två utvecklingarna, men att de $(n+1)^{\text{sta}}$ delnämnarne hafva olika värden:

$$q = q',\, q_1 = q'_1, \ldots, q_n = q'_n,\, q_{n+1} \neq q'_{n+1}.$$

Det gäller att visa att $\omega \neq \omega'$.

Ur antagandet följer att konvergenterna

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$$

äro gemensamma för båda kedjebråken. De därpå följande konvergenterna kunna skrifvas:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1} + q_{n+1} P_n}{Q_{n-1} + q_{n+1} Q_n}, \quad \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}} = \frac{P_{n-1} + q'_{n+1} P_n}{Q_{n-1} + q'_{n+1} Q_n}.$$

Om t. ex. $q'_{n+1} > q_{n+1}$, sätta vi $q'_{n+1} = q_{n+1} + s$, hvarvid s är ett positivt helt tal, och finna då, enligt (13),

$$\frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}} = \frac{(P_{n-1} + q_{n+1} P_n) + s P_n}{(Q_{n-1} + q_{n+1} Q_n) + s Q_n} = \frac{P_{n+1} + s P_n}{Q_{n+1} + s Q_n} = \frac{P_n + \varrho P_{n+1}}{Q_n + \varrho Q_{n+1}},$$

där $\varrho = \frac{1}{s}$ är ett positivt tal < 1. Enligt hvad s. 176—177 visats om uttrycket (28), sluta vi härur att $\frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}}$ antingen ligger mellan $\frac{P_n}{Q_n}$ och $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$ eller sammanfaller med sistnämnda kon-

vergent (nämligen om $s = 1$ och $q_{n+2} = 1$). Talet ω', som ju ligger mellan $\frac{P'_n}{Q'_n}\left(= \frac{P_n}{Q_n}\right)$ och $\frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}}$, tillhör således intervallen $\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}\right)$, medan däremot ω ligger utanför denna intervall. Härmed är vårt påstående bevisadt.

Såsom en afslutning på detta kapitel skola vi betrakta de s. k. *periodiska* kedjebråken, i hvilka en viss följd af delnämnare periodiskt upprepar sig. Antaga vi att denna följd utgöres af nämnarne $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+k}$, har kedjebråket, hvars värde vi beteckna med x, formen

$$q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n+k} + \cfrac{1}{q_{n+1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n+k} + \ddots}}}}}}}}}$$

Om vi sätta

$$y = \cfrac{1}{q_{n+1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n+k} + \cfrac{1}{q_{n+1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n+k} + \ddots}}}}}}$$

se vi att värdet x framgår ur konvergenten

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

då q_n ersättes med $q_n + y$. (För att strängt ådagalägga riktigheten af detta påstående, har man att stödja sig på vissa allmänna satser om gränsvärden hvilka bevisas i följande kapitel). Alltså är

$$x = \frac{(q_n + y) P_{n-1} + P_{n-2}}{(q_n + y) Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n + y P_{n-1}}{Q_n + y Q_{n-1}}.$$

Å andra sidan kan värdet x erhållas äfven sålunda att man i konvergenten

$$\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}} = \frac{q_{n+k} P_{n+k-1} + P_{n+k-2}}{q_{n+k} Q_{n+k-1} + Q_{n+k-2}}$$

ersätter q_{n+k} med $q_{n+k} + y$:

$$x = \frac{(q_{n+k} + y) P_{n+k-1} + P_{n+k-2}}{(q_{n+k} + y) Q_{n+k-1} + Q_{n+k-2}} = \frac{P_{n+k} + y P_{n+k-1}}{Q_{n+k} + y Q_{n+k-1}}.$$

Ur denna och föregående likhet sluta vi

$$y = \frac{x Q_n - P_n}{P_{n-1} - x Q_{n-1}} = \frac{x Q_{n+k} - P_{n+k}}{P_{n+k-1} - x Q_{n+k-1}}.$$

Det gifna kedjebråkets värde x satisfierar således följande kvadratiska likhet med heltaliga koefficienter:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (Q_n Q_{n+k-1} - Q_{n-1} Q_{n+k}) x^2 \\ & - (P_n Q_{n+k-1} + Q_n P_{n+k-1} - P_{n-1} Q_{n+k} - Q_{n-1} P_{n+k}) x \\ & + (P_n P_{n+k-1} - P_{n-1} P_{n+k}). \end{aligned}$$

Vi hafva härmed bevisat följande intressanta resultat:

Hvarje periodiskt kedjebråk har ett irrationellt värde som utgör rot till en ekvation af andra graden med heltaliga koefficienter.

Exempelvis satisfierar värdet af kedjebråket

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

ekvationen

$$x = 1 + \frac{1}{2 + (x - 1)} = \frac{x + 2}{x + 1},$$

hvilken reducerar sig till $x^2 = 2$, hvaraf $x = \sqrt{2}$.

Man kan omvändt bevisa att *rötterna till hvarje andra grads likhet med heltaliga koefficienter* (och således speciellt kvadratroten ur ett rationellt tal) *hafva periodiska kedjebråksutvecklingar, förutsatt att deras värden ej äro rationella.* Det skulle emellertid föra oss för långt att här ingå på beviset för denna sats[1]).

Öfningsuppgifter:

1) Utveckla $\sqrt{3}$ i kedjebråk och beräkna ur detta kvadratrotens värde med tio decimaler.

2) Bestäm i algebraisk form värdet af det kedjebråk i hvilket $q = 0$, $q_1 = 4$, och hvars öfriga delnämnare bilda en periodisk upprepning af följden 1, 2, 3.

3) En sträcka är delad enligt „det gyllene snittet". Utveckla förhållandet mellan den större och den mindre delen i kedjebråk och bilda dettas konvergenter.

4) Utveckla $\sqrt{13}$ och $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i kedjebråk.

[1]) Se t. ex. P. Bachmann, *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen.*

Fjärde kapitlet.

Satser om gränsvärden.

33. **Funktioners gränsvärden**. — I det föregående hafva vi redan särskilda gånger användt begreppet *limes* eller *gränsvärde*. Vi skola nu närmare precisera detta för hela den högre Analysen grundläggande begrepp.

Funktionen $f(x)$ antages vara entydigt definierad inom en viss intervall kring värdet x_0, t. ex. inom intervallen $(x_0 - h, x_0 + h)$, utom möjligen för värdet x_0 självt. Mot hvarje från x_0 skildt argumentvärde inom intervallen svarar således ett bestämdt funktionsvärde.

Om det finnes ett ändligt värde A sådant att skillnaden $f(x) - A$ närmar sig noll då x närmar sig x_0, säga vi att funktionen $f(x)$ *har värdet A såsom gränsvärde eller limes för* $x = x_0$, eller att $f(x)$ *närmar sig gränsvärdet A* eller *konvergerar mot gränsvärdet A* då x närmar sig värdet x_0. Vi angifva detta kort medels beteckningen

$$\lim_{x = x_0} f(x) = A.$$

Vi precisera ytterligare innebörden af denna utsago, i det vi uppställa följande stränga definition:

Definition. — *Funktionen $f(x)$ säges hafva värdet A till gränsvärde för $x = x_0$, om det är möjligt att, sedan man fixerat ett positivt tal ε, huru litet som helst, finna ett positivt tal δ sådant att olikheten*

(1) $$|f(x) - A| < \varepsilon$$

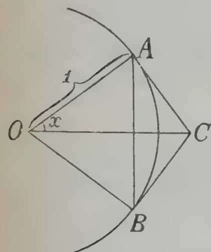
äger rum så snart

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Dessa olikheter innebära, i annan form, att mot hvarje punkt x inom intervallen $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, med undantag af x_0, svarar ett funktionsvärde $f(x)$ som faller inom intervallen $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$. Då talet ε minskas måste i allmänhet äfven δ minskas för att detta villkor skall vara uppfylldt.

Vi betrakta såsom första exempel den genom uttrycket $\frac{\sin x}{x}$ definierade funktionen. Denna har ett ändligt bestämdt värde för hvarje från noll skildt argumentvärde x. För $x = 0$ antar däremot det gifna uttrycket formen $\frac{0}{0}$ och definierar således intet bestämdt funktionsvärde. Det gäller att afgöra om $\frac{\sin x}{x}$ konvergerar mot ett gränsvärde då x närmar sig 0.

Vi stödja oss på satsen att en cirkelbåge är längre än dess korda men kortare än hvarje kring densamma omskrifven bruten linie, en sats som omedelbart följer ur själfva definitionen för cirkelbågens längd, till hvilken vi senare återkomma. I enlighet härmed är (se vidstående figur), om vinkeln x ligger mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, bågen $AB = 2x$ längre än kordan $AB = 2 \sin x$ men kortare än den brutna linien $ACB = 2 \operatorname{tang} x$, alltså:



$$\sin x < x < \operatorname{tang} x .$$

Då $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, följer härur

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 , \qquad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x .$$

Men man har

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} ,$$

och vi erhålla slutligen

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} ,$$

hvilken olikhet gäller jämväl för $x < 0$, då ju uttrycket $\frac{\sin x}{x}$ blir oförändradt om x ersättes med $-x$. Alltså är, huru litet

det positiva talet ε än väljes, $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ så snart $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$ eller $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$, och enligt vår definition är således

$$(2) \qquad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Den ofvan funna olikheten $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ kan skrifvas

$$\left|\frac{1-\cos x}{x}\right| < \frac{|x|}{2},$$

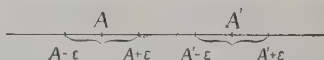
hvarur vi sluta

$$(3) \qquad \lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 .$$

Vi återgå till den ofvan uppställda definitionen och göra beträffande densamma några allmänna anmärkningar.

Det är lätt att finna funktioner som för ett speciellt argumentvärde icke hafva något gränsvärde. Funktionen $\sin\frac{1}{x}$, som är entydigt definierad för hvarje värde x utom $x = 0$, konvergerar sålunda icke mot något gränsvärde då x närmar sig 0, hvilket framgår däraf att funktionen antar hvarje värde från -1 till $+1$ inom intervallen $-\varepsilon < x < \varepsilon$, huru litet ε än väljes.

Det bör däremot uttryckligen framhållas att, om ett gränsvärde öfverhufvud existerar, detta är entydigt bestämdt, eller annorlunda uttryckt: *en funktion $f(x)$ kan icke hafva två olika gränsvärden för ett gifvet argumentvärde $x = x_0$*. Ty antag att det finnes tvenne olika gränsvärden, A och A'; man kan då välja ett positivt tal ε så litet att intervallerna $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ och $(A'-\varepsilon, A'+\varepsilon)$ icke hafva någon punkt gemen-



sam, hvartill endast erfordras att $\varepsilon < \frac{|A-A'|}{2}$. Sedan ε sålunda bestämts, kunna vi, på grund af antagandet $\lim_{x=x_0} f(x) = A$, välja ett positivt tal δ sådant att värdet af $f(x)$ faller inom $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ så snart $|x - x_0| < \delta$, och då enligt vårt antagande jämväl $\lim_{x=x_0} f(x) = A'$, kunna vi finna ett annat

tal δ' sådant att $f(x)$ faller inom $(A'-\varepsilon, A'+\varepsilon)$ om $|x-x_0| < \delta'$. Om $|x-x_0|$ är mindre än såväl δ som δ', skulle värdet af $f(x)$ således samtidigt tillhöra $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ och $(A'-\varepsilon, A'+\varepsilon)$. Detta är emellertid omöjligt då de två intervallerna icke hafva någon punkt gemensam, och vårt påstående är härmed bevisadt.

Låtom oss antaga att funktionen $f(x)$, enligt dess ursprungliga definition, har ett bestämdt värde för hvarje argumentvärde inom intervallen (x_0-h, x_0+h) med undantag af x_0, samt att funktionen för $x \Rightarrow x_0$ har ett bestämdt ändligt gränsvärde A. Om vi då utsträcka funktionens definition till punkten x_0 i det vi där tilldela densamma värdet A och således sätta $f(x_0)=A$, är den numera inom hela intervallen (x_0-h, x_0+h) definierade funktionen $f(x)$ *kontinuerlig för* $x=x_0$. Ty olikheten (1), som enligt vårt antagande är uppfylld för $|x-x_0| < \delta$, kan nu skrifvas $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, och vi återfinna således kontinuitetsvillkoret i den form vi tidigare angifvit (s. 35).

Omvändt inser man omedelbart att, *om funktionen* $f(x)$ *är definierad inom intervallen* (x_0-h, x_0+h) *och kontinuerlig för* $x=x_0$, *är*

$$\lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0).$$

Enligt kontinuitetsdefinitionen kan man nämligen för hvarje gifvet ε finna ett δ sådant att $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ så snart $|x-x_0| < \delta$. Men detta innebär å andra sidan, enligt den ofvan uppställda definitionen, att $f(x)$ har $f(x_0)$ till gränsvärde för $x=x_0$.

Om värdet af en funktion $f(x)$, då x antingen växer mot $+\infty$ eller aftar mot $-\infty$, alltmer närmar sig ett ändligt bestämdt värde A, säger man att $f(x)$ *har* A *såsom gränsvärde för* $x=\infty$ resp. *för* $x=-\infty$, och skrifver

$$\lim_{x=\infty} f(x) = A, \text{ resp. } \lim_{x=-\infty} f(x) = A.$$

Den precisa innebörden af dessa likheter är följande:

Sedan det positiva talet ε *fixerats, huru litet som helst, kan man finna ett annat positivt tal* X *sådant att olikheten* $|f(x)-A| < \varepsilon$ *äger rum, i förra fallet för alla värden* x *som äro större än* X, *i senare fallet för alla värden* x *som äro mindre än* $-X$.

Vi betrakta såsom exempel funktionen $\frac{2x+1}{3x+2}$. Genom division erhålles

$$\frac{2x+1}{3x+2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3(3x+2)},$$

hvaraf vi sluta

$$\left|\frac{2x+1}{3x+2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3\,|3x+2|}.$$

Högra membrum är mindre än ε om $|3x+2| > \frac{1}{3\varepsilon}$, alltså om $x > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}$ eller $x < -\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}$, och detta äger rum huru litet det positiva talet ε än väljes. Enligt ofvanstående definition är således

$$\lim_{x=\infty} \frac{2x+1}{3x+2} = \lim_{x=-\infty} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{2}{3}.$$

I det föregående ha vi under A ständigt tänkt oss ett ändligt värde. Man använder emellertid äfven uttryckssättet: *$f(x)$ har ∞ eller $-\infty$ såsom gränsvärde för $x = x_0$*, hvilket betecknas

$$\lim_{x=x_0} f(x) = \infty, \text{ resp. } \lim_{x=x_0} f(x) = -\infty,$$

och inlägger häri följande betydelse:

Om M är ett gifvet, godtyckligt stort positivt tal, kan man finna ett annat positivt tal δ sådant att $f(x)$ är, i förra fallet större än M, i senare fallet mindre än $-M$, för alla värden x som uppfylla villkoret $|x - x_0| < \delta$.

Exempelvis är

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

ty man har $\frac{1}{x^2} > M$ så snart $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, och detta gäller huru stort det positiva talet M än väljes.

På analogt sätt användas beteckningarna

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty \text{ eller } -\infty, \quad \lim_{x=-\infty} f(x) = \infty \text{ eller } -\infty,$$

hvilkas precisa innebörd läsaren uppmanas att själf formulera.

Det kan vidare inträffa att skillnaden $f(x) - A$ närmar sig 0 blott om x närmar sig x_0 från höger, d. v. s. genom värden som äro större än x_0. För att utmärka detta kan man använda beteckningen

$$\lim_{x = x_0 + 0} f(x) = A.$$

Om åter $f(x) - A$ närmar sig 0 då x från venster närmar sig värdet x_0, skrifver man

$$\lim_{x = x_0 - 0} f(x) = A.$$

Om de två gränsvärdena

$$\lim_{x = x_0 + 0} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{x = x_0 - 0} f(x)$$

båda existera och hafva ett och samma värde, utgör detta funktionens gränsvärde för $x = x_0$ i vanlig mening. Men de kunna äfven existera samtidigt och vara olika.

Exempelvis är, för $a > 1$,

$$\lim_{x = +0} \frac{1}{a^{\frac{1}{x}} + 1} = 0, \quad \lim_{x = -0} \frac{1}{a^{\frac{1}{x}} + 1} = 1.$$

Likaså är, enligt de definitioner vi ofvan uppställt,

$$\lim_{x = +0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x = -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Öfningsuppgifter: Undersök följande gränsvärden, med noggrann tillämpning af de ofvan gifna definitionerna:

$$\lim_{x = 0} x \cos \frac{1}{x}, \quad \lim_{x = 1} \frac{1}{\log x}, \quad \lim_{x = \pm \infty} \frac{6 - x}{5x + 1},$$

$$\lim_{x = \infty} \frac{1}{2 + \cos x}, \quad \lim_{x = \pm \infty} \frac{a^x}{a^x + 1}, \quad \lim_{x = \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

34. **Gränsvärdet för en oändlig talräcka.** — Begreppet gränsvärde uppträder under en något modifierad form om man utgår från en oändlig följd eller räcka af tal

(4) $$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots,$$

gifna enligt en bestämd lag.

Definition. — *Talräckan (4) säges hafva talet U till gränsvärde eller konvergera mot gränsvärdet U:*

$$\lim_{n=\infty} u_n = U,$$

om skillnaden $u_n - U$ med växande n närmar sig 0, d. v. s. om man för hvarje positivt tal ε, huru litet detta än väljes, kan finna ett helt tal n_0 sådant att

$$|u_n - U| < \varepsilon \text{ så snart } n > n_0.$$

Dessa olikheter innebära att talen $u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \ldots$ samtligen falla inom intervallen $(U - \varepsilon, U + \varepsilon)$. Om ε minskas måste n_0 i allmänhet ökas för att detta villkor skall vara uppfylldt.

Om $a \leq u_n \leq b$ från och med en viss index n_0, och om räckan (4) konvergerar mot ett gränsvärde U, är äfven $a \leq U \leq b$. Ty vore $U > b$, skulle $U - u_n$ för $n \geq n_0$ vara större än eller lika med den positiva kvantiteten $U - b$, hvilket är omöjligt då $\lim (U - u_n) = 0$, och på samma sätt inses att U icke kan vara mindre än a.

Hafva speciellt talen i räckan (4) samma värde A, från och med ett visst tal u_{n_0}, utgör A tillika gränsvärde för talräckan, ty i detta fall är skillnaden $u_n - A$ exakt 0 och således mindre än hvilket positivt tal ε som helst för $n \geq n_0$.

Om talen i räckan (4) med växande index öfverskrida hvarje föreskrifven gräns, så att olikheten $u_n > M$, huru stort det positiva talet M än väljes, är uppfylld från och med något visst värde n, säger man att *talräckan (4) har ∞ till gränsvärde* och skrifver $\lim u_n = \infty$. Likaså säger man att *räckan (4) konvergerar mot gränsvärdet $-\infty$*, om olikheten $u_n < -M$, huru stort det positiva talet M än väljes, äger rum för alla värden n som öfverskrida en viss gräns.

Vi betrakta såsom första exempel talräckan

(5) $$a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$$

Vi antaga först $a > 1$ och sätta $a = 1 + \Delta$. Då är, såsom s. 82 visats, $a^n > 1 + n\Delta$. Om M är ett positivt tal, huru stort som helst, är således $a^n > M$ om $n > \frac{M-1}{\Delta}$, och talräckan (5) har sålunda i detta fall ∞ till gränsvärde.

Om $a = 1$, hafva samtliga tal i räckan (5) värdet 1 och dess gränsvärde är således äfven 1.

Är $-1 < a < 1$ och således $|a| < 1$, kan man skrifva $|a| = \frac{1}{1+\Delta}$, där $\Delta > 0$, och har då

$$|a^n| = \frac{1}{(1+\Delta)^n} < \frac{1}{1+n\Delta} < \frac{1}{n\Delta}.$$

Huru litet det positiva talet ε än väljes är således $|a^n| < \varepsilon$ om $n > \frac{1}{\varepsilon\Delta}$, hvilket visar att räckan (5) i detta fall konvergerar mot gränsvärdet 0.

Om $a = -1$, äro talen i räckan (5) omvexlande lika med -1 och $+1$, och räckan har således intet gränsvärde. Detsamma gäller om $a < -1$, ty räckans tal äro då vexelvis negativa och positiva, medan deras numeriska värden ständigt ökas.

Vi skola nu undersöka talräckan

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$$

Om vi sätta $\sqrt[n]{n} = 1 + \Delta_n$, erhålles enligt binomialformeln

$$n = (1 + \Delta_n)^n = 1 + n\Delta_n + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_n^2 + \cdots + \Delta_n^n,$$

hvarur följer, då alla termer i högra membrum äro positiva,

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\Delta_n^2, \quad \Delta_n^2 < \frac{2}{n-1}, \quad \Delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Huru litet ε än väljes är således $\Delta_n < \varepsilon$ och följaktligen

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon,$$

om vi göra $\frac{2}{n-1} < \varepsilon^2$, d. v. s. $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot$ Alltså är

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Läsaren uppmanas att medels logaritmer uträkna värdet af $\sqrt[n]{n}$ för en följd växande värden n, t. ex. för $n = 10, 50, 100, 500, 1000$.

Vi söka slutligen gränsvärdet för talräckan

$$\frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots,$$

och använda härvid en metod som ofta kommer till användning, och som består i att undersöka förhållandet mellan två på hvarandra följande tal i räckan. Om vi sätta

$$\frac{x^n}{n!} = u_n, \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = u_{n+1},$$

erhålles

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Vi välja ett positivt tal $\alpha < 1$ och härefter ett helt tal n_0 sådant att $\frac{|x|}{n_0+1} < \alpha$, d. v. s. $n_0 > \frac{|x|}{\alpha} - 1$. Då är

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha \quad \text{för} \quad n \geqq n_0.$$

För $n = n_0, n_0+1, \ldots, n_0+p-1$ följer härur

$$\left|\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right| < \alpha, \quad \left|\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\right| < \alpha, \ldots, \quad \left|\frac{u_{n_0+p}}{u_{n_0+p-1}}\right| < \alpha,$$

och, då dessa p olikheter hopmultipliceras,

$$\left|\frac{u_{n_0+p}}{u_{n_0}}\right| < \alpha^p \quad \text{eller} \quad |u_{n_0+p}| < \alpha^p |u_{n_0}|,$$

hvilket resultat gäller för hvarje positivt helt tal p.

Är nu ε ett gifvet, godtyckligt litet positivt tal, kunna vi, då $\alpha < 1$, välja ett så stort positivt helt tal p_0 att $\alpha^{p_0} < \frac{\varepsilon}{|u_{n_0}|}$ eller $\alpha^{p_0} |u_{n_0}| < \varepsilon$. Enligt ofvanstående olikhet är då

äfven $|u_{n_0+p}| < \varepsilon$ för $p \geqq p_0$, eller, hvilket är detsamma, $|u_n| < \varepsilon$ för $n \geqq n_0 + p_0$. Alltså är

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 0,$$

oberoende af hvilket värde x har.

Vi skola ännu göra några allmänna anmärkningar beträffande den ofvan uppställda definitionen.

Man inser omedelbart (jmf. s. 192) att, *om en gifven talräcka öfverhufvud konvergerar mot ett gränsvärde, är detta gränsvärde entydigt bestämdt.*

Lika lätt inses riktigheten af följande sats (jmf. s. 193):

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $x = X$ och om räckan af argumentvärden

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

har X till gränsvärde, konvergera de motsvarande funktionsvärdena

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

mot gränsvärdet $f(X)$.

Exempelvis kunna vi däraf att $\log x$ är kontinuerlig för $x = 1$ samt att $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, sluta att

$$\lim_{n=\infty} \log\left(\sqrt[n]{n}\right) = \log 1,$$

eller, med andra ord, att

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Vi framhålla slutligen följande enkla sats som ofta kommer till användning:

Om talräckorna

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \quad \text{och} \quad v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

uppfylla villkoret

$$\lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = 0,$$

och om den förra af dessa räckor har ett bestämdt gränsvärde U, konvergerar den senare räckan mot detta samma gränsvärde.

Riktigheten af påståendet framgår ur identiteten

$$v_n - U = (v_n - u_n) + (u_n - U),$$

då man observerar att båda termerna i högra membrum närma sig 0 då n växer. Vi uppmana läsaren att i detalj genomföra beviset för denna och de föregående satserna.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$.

2) Undersök gränsvärdet för talräckan

$$\frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \ldots, \frac{x^n}{n}, \ldots$$

för olika värden af x.

3) Bevisa att, om talräckan (4) konvergerar mot gränsvärdet U, man jämväl har

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = U.$$

35. **Några allmänna satser om gränsvärden.** — I Analysen har man oupphörligt att göra bruk af följande enkla satser om gränsvärden (alla gränsvärden gälla för $n = \infty$):

Antag att talräckan

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

konvergerar mot ett ändligt gränsvärde U.

Om C är en godtycklig konstant, har man då

(6) $$\lim (C u_n) = C \lim u_n = C U.$$

Hafva vi en annan talräcka

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

som äfven har ett ändligt gränsvärde V, gälla vidare följande satser:

(7) $$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = U + V,$$

$$(8) \qquad \lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = U - V,$$

$$(9) \qquad \lim (u_n v_n) = \lim u_n \,.\, \lim v_n = U\,V,$$

samt slutligen, under förutsättning att $V \neq 0$,

$$(10) \qquad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{U}{V}.$$

Bevisen för dessa satser grunda sig direkt på definitionen för en talräckas gränsvärde och äro analoga med bevisen för motsvarande satser rörande funktioners kontinuitet (jmf. s. 48—53). Vi inskränka oss till att ådagalägga riktigheten af likheten (10), i det vi uppmana läsaren att själf genomföra de öfriga satsernas bevis.

Vi hafva att bevisa att skillnaden

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{U}{V} = \frac{u_n V - v_n U}{v_n V} = \frac{(u_n - U)\,V - (v_n - V)\,U}{v_n V}$$

till sitt numeriska värde kan göras godtyckligt liten genom att n göres tillräckligt stort.

Enligt vårt antagande är $|V| > 0$. Vi välja ett positivt tal ε som är $< \frac{|V|}{2}$ och för öfrigt godtyckligt litet. Sedan ε fixerats, välja vi ett helt tal n_1 sådant att $|u_n - U| < \varepsilon$ för $n > n_1$, samt ett annat helt tal n_2 sådant att $|v_n - V| < \varepsilon$ för $n > n_2$, hvilket är möjligt emedan vi antagit $\lim u_n = U$ och $\lim v_n = V$. Om vi med n_0 beteckna det större af talen n_1 och n_2, är då för $n > n_0$ samtidigt $|u_n - U| < \varepsilon$ och $|v_n - V| < \varepsilon$, hvaraf vi sluta

$$|(u_n - U)\,V - (v_n - V)\,U| < (|U| + |V|)\,\varepsilon \quad \text{för } n > n_0.$$

Ur identiteten $v_n = V + (v_n - V)$ följer åter

$$|v_n| \geq |V| - |v_n - V|,$$

och således för $n > n_0$, då $|v_n - V| < \varepsilon$ och $\varepsilon < \frac{|V|}{2}$,

$$|v_n| > |V| - \varepsilon > |V| - \frac{|V|}{2} = \frac{|V|}{2},$$

hvaraf $|v_n V| > \frac{|V|^2}{2}$. Vi få sålunda slutligen olikheten

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{U}{V}\right| < \frac{2(|U|+|V|)}{|V|^2}\varepsilon \quad \text{för } n > n_0,$$

hvilken gäller huru litet ε än väljes, blott talet n_0 för hvarje gång bestämmes såsom ofvan är sagdt. Då högra membrum i denna olikhet kan göras mindre än hvilket föreskrifvet positivt tal som helst genom att ε väljes tillräckligt litet, är riktigheten af likheten (10) bevisad.

Vi betrakta nu i stället för två talräckor tvenne funktioner, $u(x)$ och $v(x)$, hvilka närma sig ändliga gränsvärden, U och V, då x närmar sig ett visst värde x_0 (som äfven kan vara ∞ eller $-\infty$):

$$\lim_{x=x_0} u(x) = U, \quad \lim_{x=x_0} v(x) = V.$$

Under dessa förutsättningar gälla följande satser, som äro analoga med satserna (6)—(10) och bevisas på enahanda sätt (alla gränsvärden gälla för $x = x_0$):

(6)′ $\lim C u(x) = C \lim u(x) = CU$, om C är konstant,

(7)′ $\lim\big(u(x) + v(x)\big) = \lim u(x) + \lim v(x) = U + V$,

(8)′ $\lim\big(u(x) - v(x)\big) = \lim u(x) - \lim v(x) = U - V$,

(9)′ $\lim\big(u(x)\, v(x)\big) = \lim u(x) \,.\, \lim v(x) = UV$,

samt slutligen, under förutsättning att $V \neq 0$,

(10)′ $$\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)} = \frac{U}{V}.$$

För att bevisa t. ex. satsen (9)′, skrifva vi (jmf. beviset s. 49):

$$u(x)\,v(x) - UV = \big(u(x) - U\big)\,v(x) + \big(v(x) - V\big)U.$$

Sedan vi fixerat ε, huru litet som helst, kunna vi, på grund af våra förutsättningar, välja ett positivt tal δ_1 sådant att

$$|u(x) - U| < \varepsilon \quad \text{för } |x - x_0| < \delta_1,$$

samt ett annat positivt tal δ_2 sådant att

$$|v(x) - V| < \varepsilon \text{ för } |x - x_0| < \delta_2.$$

Ur identiteten $v(x) = V + (v(x) - V)$ följer då att $|v(x)| < |V| + \varepsilon$ för $|x - x_0| < \delta_2$. Beteckna vi med δ det mindre af talen δ_1 och δ_2, är således för $|x - x_0| < \delta$

$$|u(x)v(x) - UV| < \varepsilon(|V| + \varepsilon) + \varepsilon|U| = \varepsilon(|U| + |V| + \varepsilon).$$

Högra membrum kan göras huru litet som helst genom att ε väljes tillräckligt litet, och härmed är riktigheten af satsen (9)′ ådagalagd.

Vi skola tillämpa ofvanstående satser på några enkla exempel. Vi söka först gränsvärdet för $x = 0$ af uttrycket $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$, hvilket för detta argumentvärde antar den obestämda formen $\frac{0}{0}$. Vi skrifva för detta ändamål

$$\frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Då x närmar sig 0, konvergerar $\frac{\sin x}{x}$, såsom tidigare visats, mot gränsvärdet 1, och den senare faktorn, $\frac{1}{\cos x}$, hvilken är kontinuerlig för $x = 0$, konvergerar mot det värde den antar för detta argumentvärde, alltså likaledes mot värdet 1. Enligt sats (9)′ är således

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tang} x}{x} = 1.$$

För att finna gränsvärdet af $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ för $x = 0$, skrifva vi

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b}.$$

För $x = 0$ hafva de två första faktorerna gränsvärdet 1, och då den sista faktorn är konstant, följer af (6)′ och (9)′ att

$$\lim_{x=0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

Vi söka ännu gränsvärdet för kvoten $\frac{2x+1}{3x+2}$ då x växer mot ∞, hvarvid såväl täljaren som nämnaren öfverskrider

hvarje ändlig gräns (jmf. s. 194). Genom att dividera täljaren och nämnaren med x, erhålla vi

$$\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}.$$

Då x växer mot ∞, närmar sig i högra membrum täljaren gränsvärdet 2, nämnaren gränsvärdet 3, och vi erhålla således, enligt (10)',

$$\lim_{x=\infty}\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{2}{3}.$$

Vi undersöka slutligen huru uttrycket

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}$$

förhåller sig då x växer mot ∞, hvarvid dess båda termer blifva oändliga. Genom förlängning med $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2x-1}$ antar detta uttryck formen

$$\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2x-1}}=\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}.$$

I det sista uttrycket konvergerar täljaren mot gränsvärdet 3 och nämnaren mot gränsvärdet 2 då x obegränsadt växer, hvaraf vi sluta

$$\lim_{x=\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)=\frac{3}{2}.$$

Samma gränsvärde erhålles för $x=-\infty$.

De ofvan uppställda satserna kunna väsentligen generaliseras. Genom upprepad användning af satserna (6)—(10) finner man sålunda, om $P(u,v)$ och $Q(u,v)$ äro godtyckliga polynom af u och v, och om man antager $\lim u_n=U$, $\lim v_n=V$, följande likheter:

$$\lim_{n=\infty}P(u_n,v_n)=P(U,V),$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{P(u_n,v_n)}{Q(u_n,v_n)}=\frac{P(U,V)}{Q(U,V)},$$

af hvilka den senare förutsätter att $Q(U,V)\neq 0$.

Men dessa resultat utgöra i sin tur speciella fall af en allmän sats, som gäller för funktioner af godtyckligt många variabler, men hvilken vi för enkelhetens skull här utsäga för en funktion af två variabler (jmf. s. 199):

Antag att funktionen $f(u, v)$ är kontinuerlig för $u = U$, $v = V$, samt att talräckan $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ konvergerar mot gränsvärdet U och talräckan $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ mot gränsvärdet V:

$$\lim_{n=\infty} u_n = U, \quad \lim_{n=\infty} v_n = V.$$

Under dessa förutsättningar har räckan

$$f(u_1, v_1),\ f(u_2, v_2), \ldots, f(u_n, v_n), \ldots$$

värdet $f(U, V)$ till gränsvärde:

$$\lim_{n=\infty} f(u_n, v_n) = f(U, V).$$

Att $f(u, v)$ är kontinuerlig för $u = U$, $v = V$ vill säga (jmf. s. 39) att man för hvarje gifvet positivt ε kan finna ett tal δ sådant att $|f(u, v) - f(U, V)| < \varepsilon$ om man samtidigt har $|u - U| < \delta$ och $|v - V| < \delta$. På grund af antagandena $\lim u_n = U$, $\lim v_n = V$, kunna vi åter bestämma ett så stort helt tal n_0 att man för $n > n_0$ har $|u_n - U| < \delta$ och $|v_n - V| < \delta$. Alltså är

$$|f(u_n, v_n) - f(U, V)| < \varepsilon \text{ så snart } n > n_0,$$

och detta äger rum huru litet ε än väljes, blott n_0 för hvarje gång bestämmes så som ofvan är sagdt. Vår sats är härmed bevisad.

Öfningsuppgifter:

1) Bestäm följande gränsvärden:

$$\lim_{x=a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{x^2+1}{x+3} \sin\frac{3}{x}, \quad \lim_{x=\infty} x^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x=0} x^x.$$

2) Sök limes för $n = \infty$ af uttrycket

$$\frac{1}{n^\nu} \cdot C_n^{(\nu)} = \frac{1}{n^\nu} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)}{1 . 2 \ldots \nu}.$$

3) Bevisa att man för $a > 1$ har

$$\lim_{n=\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty, \text{ och allmännare } \lim_{x=\infty} \frac{a^x}{x^p} = \infty,$$

p må vara huru stort som helst (jmf. beviset s. 198).

4) Undersök allmänt huru en rationell funktion

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

förhåller sig då x växer mot ∞ eller aftar mot $-\infty$.

5) Vi antaga en räcka af positiva tal $a_1, a_2, \ldots$, sådan att förhållandet $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ med växande n konvergerar mot ett bestämdt gränsvärde. Bevisa att uttrycket $\sqrt[n]{a_n}$ konvergerar mot detta samma gränsvärde.

36. **Satser om stigande och fallande talräckor**. — I de hittills behandlade speciella exemplen hafva vi, med stöd af de elementära funktionernas egenskaper, direkt kunnat angifva de betraktade räckornas gränsvärden. Vi skola nu anföra några viktiga satser, med hvilkas hjälp man i flere allmänna fall kan bevisa existensen af ett gränsvärde.

En talräcka $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ kallas *stigande* om

$$u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \leqq \ldots \leqq u_n \leqq \ldots..,$$

fallande om

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots \geqq u_n \geqq \ldots...$$

Om dylika räckor, hvilka med ett gemensamt namn kallas *monotona* talräckor, gäller följande viktiga sats:

Om i en stigande räcka samtliga tal äro mindre än en ändlig kvantitet M, konvergerar räckan mot ett bestämdt gränsvärde som är $\leqq M$.

Likaså har en fallande talräcka, hvars samtliga tal äro större än en ändlig kvantitet m, ett bestämdt gränsvärde som är $\geqq m$.

Vi skola något närmare klargöra innebörden af satsens förra del. Om i den gifna stigande räckan alla tal äro lika, från och med ett visst tal u_{n_0}, så att $u_{n_0} = u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \cdots$, utgör u_{n_0} tillika gränsvärde för räckan och satsen är således självklar. Lemna vi detta speciella fall å sido, anträffas efter

hvarje gifvet tal i räckan, om vi gå tillräckligt långt fram i densamma, tal som äro större. Vår sats utsäger att räckan äfven i detta fall konvergerar mot ett gränsvärde, d. v. s. att det finnes ett ändligt bestämdt tal U sådant att skillnaden $u_n - U$ närmar sig 0 då n växer mot ∞. Beviset för existensen af ett dylikt tal grundar sig väsentligen på det reella talområdets definition, hvarför vi måste lemna detsamma till det åttonde kapitlet. Antaga vi emellertid att gränsvärdet U existerar, inses omedelbart att $U \leqq M$, då samtliga tal i räckan äro $< M$ (jmf. s. 196). Å andra sidan är U större än hvarje tal i räckan; ty funnes det ett tal $u_{n_0} > U$, skulle skillnaden $u_n - U$ för $n > n_0$ vara lika med eller större än den positiva kvantiteten $u_{n_0} - U$, hvilket är omöjligt då $\lim u_n = U$; det kan icke heller finnas något tal i räckan som är lika med U, ty då funnes det längre fram i räckan tal större än U.

Vi anföra ännu ett korollarium af ofvanstående sats som ofta kommer till användning:

Vi antaga att vi hafva en stigande talräcka

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_n \leqq \ldots$$

och en fallande talräcka

$$v_1 \geqq v_2 \geqq \ldots \geqq v_n \geqq \ldots$$

hvilka uppfylla följande villkor:

1° $v_n > u_n$ *för hvarje index n;*

2° $\lim\limits_{n=\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Under dessa förutsättningar konvergera de två räckorna mot ett gemensamt gränsvärde.

Ur våra antaganden följer att hvarje tal u_n är mindre än en ändlig kvantitet, t. ex. mindre än v_1. Enligt ofvanstående sats konvergerar således den stigande talräckan mot ett ändligt gränsvärde, och ur villkoret 2° sluta vi härefter omedelbart att den fallande talräckan konvergerar mot detta samma gränsvärde (jmf. satsen s. 199—200).

Det ofvanstående korollariet erhåller en synnerligen åskådlig form om vi betrakta intervallerna

$$(11) \qquad (u_1, v_1), \ (u_2, v_2), \ldots, \ (u_n, v_n), \ldots\ldots$$

Hvarje intervall i denna följd utgör en del af den föregående intervallen eller sammanfaller med denna; ty enligt våra antaganden är för hvarje index n

$$u_n \leqq u_{n+1} < v_{n+1} \leqq v_n,$$

hvilka olikheter utsäga att hvarje värde som tillhör intervallen (u_{n+1}, v_{n+1}) jämväl tillhör intervallen (u_n, v_n).

De gifna talräckornas gemensamma gränsvärde, hvilket vi beteckna med γ, tillhör enhvar af intervallerna (11). Ty enligt hvad vi just sagt tillhöra talen $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ och $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots$ samtligen intervallen (u_n, v_n), och detsamma gäller således äfven om deras gränsvärde (jmf. s. 196).

Det kan slutligen icke finnas något från γ skildt tal som skulle tillhöra alla intervallerna (11). Ty vore γ' ett sådant tal, skulle man för hvarje n hafva $v_n - u_n \geqq |\gamma - \gamma'|$, men detta strider mot antagandet 2°.

Ofvanstående korollarium kan sålunda iklädas följande form, som ter sig särskildt åskådlig vid geometrisk tolkning:

Om man har en oändlig följd af intervaller, af hvilka enhvar utgör en del af den föregående intervallen eller sammanfaller med denna, och hvilkas längder obegränsadt närma sig 0, *finnes det ett och endast ett tal som är gemensamt för alla dessa intervaller.*

Såsom en första tillämpning af det ofvan sagda påminna vi om de resultat vi i tredje kapitlet erhöllo beträffande oändliga kedjebråk. Vi funno i n° 32 att konvergenterna med jämn index bilda en stigande talräcka, konvergenterna med udda index en fallande talräcka, samt att dessa talräckor uppfylla de i satsen s. 207 angifna villkoren. Enligt denna sats kunna vi således sluta att ifrågavarande konvergenträckor hafva ett gemensamt gränsvärde, ett resultat som i

n^0 32 härleddes med stöd af en tidigare anförd sats af allmännare natur.

En annan intressant tillämpning af satsen s. 208 ger oss följande förfarande. Vi utgå från två positiva tal, a och b ($> a$), och inskjuta mellan dessa tal deras geometriska medeltal, $a_1 = \sqrt{ab}$, samt deras aritmetiska medeltal, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Man har $a_1 < b_1$ (jmf. s. 147) och således $a < a_1 < b_1 < b$. Intervallen (a_1, b_1) utgör följaktligen en del af intervallen (a, b), och vidare är

$$b_1 - a_1 < b_1 - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}.$$

Vi inskjuta nu mellan a_1 och b_1 dessa tals geometriska medeltal a_2 samt deras aritmetiska medeltal b_2. Såsom ofvan finner man att intervallen (a_2, b_2) utgör en del af (a_1, b_1) samt att

$$b_2 - a_2 < \frac{b_1 - a_1}{2} < \frac{b-a}{2^2}.$$

Genom att fortgå på detta sätt erhålla vi en obegränsad följd af intervaller

$$(a, b), \ (a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n), \ldots,$$

af hvilka enhvar utgör en del af den föregående och hvilkas längder aftaga mot 0, såsom framgår ur olikheten

$$b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n},$$

som gäller för hvarje index n. Enligt satsen s. 208 finnes det således ett och endast ett tal som är gemensamt för alla dessa intervaller. Detta tal utgör det gemensamma gränsvärdet för de successiva aritmetiska och geometriska medeltalen, hvilket enligt Gauss benämnes *det aritmetiskt-geometriska medeltalet* af de gifna talen a och b. För dess beräkning kan man med fördel använda formeln (19) s. 147.

Vi betrakta slutligen den talräcka som erhålles ur ett gifvet positivt tal a då man successivt sätter:

$$x_1 = \sqrt[p]{a},$$

$$x_2 = \sqrt[p]{a + x_1} = \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a}},$$

$$x_3 = \sqrt[p]{a + x_2} = \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a}}},$$

och allmänt, för hvarje index n,

$$(12) \qquad x_n = \sqrt[p]{a + x_{n-1}}.$$

Här betecknar p ett positivt helt tal, och för hvarje radikal väljes dess reella positiva värde.

Enär $x_1 > 0$, följer ur de två första af de ofvanstående likheterna att $x_1 < x_2$; härefter sluter man ur den andra och den tredje likheten att $x_2 < x_3$, o. s. v. Medels fullständig induktion visar man att $x_n < x_{n+1}$ för hvarje index n, och således är

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots\cdot\cdot$$

Vi skola visa att talen x_n alla ligga under en ändlig gräns.

Olikheten $x_n < x_{n+1}$ kan skrifvas

$$x_n < \sqrt[p]{a + x_n},$$

hvaraf $x_n^p < a + x_n$ eller

$$(13) \qquad x_n^p - x_n - a < 0 \quad \text{för hvarje index } n.$$

Låtom oss närmare betrakta polynomet

$$\varphi(x) = x^p - x - a = x(x^{p-1} - 1) - a.$$

Det senare uttrycket visar oss att $\varphi(x)$ har negativa värden för $0 \leq x \leq 1$ och ständigt ökas då x växer från 1 till ∞. Då $\varphi(x)$ är en kontinuerlig funktion och antar positiva vär-

den så snart x öfverskrider en viss gräns, sluta vi härur att ekvationen

(14) $$x^p - x - a = 0$$

har en och endast en positiv rot. Vi beteckna denna rot med x_0. Ur det sagda följer vidare att $\varphi(x) < 0$ för $0 < x < x_0$, medan däremot $\varphi(x) > 0$ för $x > x_0$.

Vi sluta häraf, enligt olikheten (13), att $x_n < x_0$ för hvarje n, hvarmed det ofvan gjorda påståendet är bevisadt. Satsen om stigande talräckor lär oss följaktligen att x_n med växande n konvergerar mot ett ändligt bestämdt gränsvärde x', samt att $x' \leq x_0$. Vi skola visa att $x' = x_0$.

Detta följer omedelbart ur likheten (12) då vi där låta index n obegränsadt växa. Venstra membrum närmar sig härvid gränsvärdet x', och man har således äfven

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p]{a + x_{n-1}} = x'.$$

Då $\lim x_{n-1} = x'$ och $\sqrt[p]{a+x}$ är en kontinuerlig funktion af x, är å andra sidan (jmf. s. 199)

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p]{a + x_{n-1}} = \sqrt[p]{a + x'}.$$

Alltså erhålla vi $x' = \sqrt[p]{a + x'}$, eller $x'^p = a + x'$, eller slutligen

$$x'^p - x' - a = 0;$$

x' utgör följaktligen rot till likheten (14), och då denna icke har någon annan positiv rot än x_0, är ovillkorligen $x' = x_0$.

Härmed är bevisadt att *talräckan* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *konvergerar mot den positiva roten till ekvationen (14).*

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna det aritmetiskt-geometriska medeltalet af talen 1 och 2 med fyra decimaler.

2) Angif gränsvärdet för talräckan

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\ldots$$

3) Vi beteckna med a ett positivt tal och med q ett närmevärde för $\sqrt{a}$. Om vi sätta $a = q^2 + r$, följer ur formeln (16) s. 142 att uttrycket

$$q + \frac{r}{2q} = q + \frac{a - q^2}{2q} = \frac{1}{2}\left(q + \frac{a}{q}\right)$$

utgör ett öfre närmevärde för $\sqrt{a}$, hvilket för öfrigt omedelbart verificeras.

Bevisa att den talräcka som bildas enligt följande lag:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(q + \frac{a}{q}\right), \; x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right), \ldots, x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \ldots$$

konvergerar mot $\sqrt{a}$, samt att man för hvarje värde n har

$$\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{q - \sqrt{a}}{q + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Beräkna på detta sätt närmevärden för $\sqrt{2}$, utgående från värdet $q = 1$.

4) Vi betrakta tvenne funktioner, $\varphi(x)$ och $\psi(x)$, hvilka för $x \geq x_0$ äro kontinuerliga och ständigt växa med x. Vi antaga vidare att

$$\varphi(x_0) < \psi(x_0).$$

Utgående från värdet x_0 bilda vi en räcka af tal, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, hvilka successivt bestämmas genom följande villkor:

$$\varphi(x_1) = \psi(x_0), \; \varphi(x_2) = \psi(x_1), \ldots, \; \varphi(x_n) = \psi(x_{n-1}), \ldots$$

Bevisa att denna talräcka konvergerar mot den minsta rot till ekvationen

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

som är större än x_0, om en sådan rot existerar, men i annat fall mot ∞.

37. Definition och beräkning af det Neperska talet e. — Vi betrakta följande uttryck och undersöka huru detsamma förhåller sig då n obegränsadt växer genom positiva heltalsvärden:

$$(15) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Binomialteoremet ger oss

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n},$$

hvilken likhet efter en enkel förändring antar formen

$$(16)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Samtliga termer i högra membrum äro positiva. Då n växer, ökas enhvar af dessa termer, från och med den tredje, ty faktorerna $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \ldots$ växa samtidigt med n, och dessutom tillkomma nya positiva termer. Vi se således att *uttrycket (15) växer samtidigt med n.*

Men detta uttryck förblir ständigt under en ändlig gräns. Ty ur (16) följer, då faktorerna $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \ldots$ alla äro mindre än 1, olikheten

$$(17)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

som gäller för hvarje helt tal $n > 1$. Vidare är

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{4!} < \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

och högra membrum i (17) är således mindre än

$$1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

hvilket uttryck i sin tur är mindre än 3. *Alltså är $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ för hvarje positivt helt tal n.*

Enligt satsen om stigande talräckor sluta vi härur att uttrycket (15) med växande n konvergerar mot ett ändligt bestämdt gränsvärde. Detta gränsvärde utgör det s. k. *Neperska talet e*, basen för det naturliga logaritmsystemet och ett af grundtalen i den högre Analysen (jmf. s. 101). Vi uppställa således följande *definition för talet e:*

$$(18)\quad e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Vi uppmana läsaren att beräkna värdet af uttrycket (15) för en följd af växande värden n.

Denna metod är emellertid icke egnad för en noggrannare beräkning af e, och vi skola därför härleda ett annat enklare och snabbare konvergerande uttryck för detta tal.

Vi betrakta närmare högra membrum i olikheten (17)

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot \tag{19}$$

Denna summa växer samtidigt med n men förblir ständigt mindre än 3, såsom ofvan visats. Den konvergerar således äfven mot ett ändligt gränsvärde, hvilket vi beteckna med S:

$$S=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\cdot$$

Vi skola visa att *detta gränsvärde S är identiskt med det Neperska talet e.*

Då värdet af uttrycket (19) för hvarje n är mindre än dess gränsvärde S, kunna vi ur (17) sluta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<S \quad \text{för hvarje } n. \tag{20}$$

Men venstra membrum i denna olikhet är i sin tur större än $S-\varepsilon$ så snart n öfverskrider en viss gräns, huru litet det positiva talet ε än väljes.

För att visa detta, välja vi först ν så stort att

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}>S-\frac{\varepsilon}{2}, \tag{21}$$

hvilket är möjligt då uttrycket (19) har S till gränsvärde. För $n>\nu$ ger oss likheten (16)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\cdot$$

Om vi låta n växa, medan ν förblir konstant, närmar sig enhvar af faktorerna $1-\frac{1}{n},\ldots,1-\frac{\nu-1}{n}$ gränsvärdet 1 och högra membrum således gränsvärdet $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}\cdot$

Häraf följer att vi kunna välja ett så stort helt tal $n_0 (> \nu)$ att värdet af detta samma membrum är större än

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}-\frac{\varepsilon}{2}$$

och således äfven

$$(22) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}\right)-\frac{\varepsilon}{2}$$

för $n > n_0$. Ur (21) och (22) följer det sökta resultatet:

$$(23) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > S-\varepsilon \text{ för } n > n_0.$$

Enligt (20) och (23) är således

$$0 < S-\left(1+\frac{1}{n}\right) < \varepsilon \quad \text{för } n > n_0,$$

huru litet ε än väljes, blott n_0 för hvarje gång bestämmes såsom ofvan är sagdt. Men detta innebär att

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S,$$

hvilken likhet, sammanställd med (18), ger oss $S=e$, h. s. b.

Vi hafva således bevisat att summan (19) med växande n konvergerar mot talet e:

$$(24) \qquad e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

För den praktiska beräkningen af e är det ännu nödvändigt att finna en öfre gräns för skillnaden

$$(25) \qquad e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

För detta ändamål utgå vi från identiteten

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!},$$

hvars venstra membrum konvergerar mot nämnda skillnad

om vi låta p obegränsadt växa, medan n förblir konstant. Uttrycket i högra membrum kan skrifvas

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+p)}\right).$$

Här är summan inom parentes mindre än

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^{p-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{1-\frac{1}{n+1}}<\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}},$$

alltså mindre än $\frac{n+1}{n}$, och vi erhålla således

$$\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n(n!)}.$$

Då sålunda venstra membrum i ofvanstående identitet för hvarje värde p är $<\frac{1}{n(n!)}$, är dess gränsvärde för $p=\infty$, d. v. s. skillnaden (25), enligt hvad s. 196 visats, mindre än eller lika med $\frac{1}{n(n!)}$, och faktiskt mindre än $\frac{1}{n(n!)}$, ty denna gräns hade vid en noggrannare uppskattning kunnat nedtryckas. Vi erhålla således till resultat olikheten

$$0<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{1}{n(n!)}, \tag{26}$$

ur hvilken framgår huru stort vi böra välja n i uttrycket (19) för att säkert erhålla värdet af e med en föreskrifven grad af noggrannhet.

Ur (26) framgår vidare att *e är ett irrationellt tal.* Ty i annat fall hade man $e=\frac{p}{q}$, där p och q äro positiva hela tal, och ur (26) skulle då, för $n=q$, följa

$$0<\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q(q!)},$$

eller, om vi multiplicera med $q!$,

$$0<[p(q-1)!-(1+q+q(q-1)+\cdots+q!)]<\frac{1}{q},$$

hvilket innebär en omöjlighet, då uttrycket inom klammer är ett helt tal och således icke kan ligga mellan 0 och talet $\frac{1}{q}$, som ju är $\leqq 1$.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna värdet af talet e med åtta decimaler.

2) Bevisa att uttrycket (15) konvergerar mot gränsvärdet e äfven om det hela talet n är negativt och aftar mot $-\infty$.

38. **Om seriers konvergens. Geometriska serier.** — Med en *oändlig serie* menas en summa af ett obegränsadt antal termer:

$$(27) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots\cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu,$$

hvilka äro gifna enligt en viss lag, som entydigt bestämmer den mot hvarje föreskrifven index n svarande termen u_n.

Vi införa beteckningarna

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots\ldots$$

och allmänt, för hvarje n,

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu,$$

samt uppställa följande

Definition. — *Om talräckan $s_1, s_2, s_3, \ldots.$ har ett ändligt gränsvärde S, eller, annorlunda uttryckt, om summan af de n första termerna i serien (27) närmar sig gränsvärdet S då n växer mot ∞:*

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = S,$$

säga vi att serien konvergerar eller är konvergent, och att S är seriens summa.

Vi skrifva i detta fall

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Hvarje serie som icke är konvergent kallas *divergent*.

Exempelvis utsäger likheten (24) att serien

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

är konvergent och att dess summa är e. Vi kunna således skrifva

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdot+\frac{1}{n!}+\cdots\cdot$$

Om serien (27) är konvergent och har summan S, är det enligt ofvanstående definition alltid möjligt, sedan man fixerat ett godtyckligt litet positivt tal ε, att finna ett sådant helt tal, n_0, att s_n faller mellan gränserna $S-\varepsilon$ och $S+\varepsilon$ så snart $n \geq n_0$.

Om n_0 fixeras på detta sätt och n väljes $> n_0$, faller såväl s_n som s_{n+1} mellan gränserna $S-\varepsilon$ och $S+\varepsilon$, hvaraf vi sluta att $|s_{n+1}-s_n|=|u_{n+1}|$ är mindre än skillnaden mellan dessa gränser, d. v. s. mindre än 2ε:

$$|u_{n+1}|<2\varepsilon \text{ för } n \geq n_0.$$

I en konvergerande serie närma sig således termerna gränsvärdet 0.

Men det bör genast framhållas att denna sats icke låter omvända sig, eller, med andra ord, *däraf att termerna i en serie hafva* 0 *till gränsvärde följer ännu icke att serien konvergerar*. Det enklaste exemplet härpå utgör den s. k. *harmoniska serien*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdot\cdot$$

Termerna aftaga här mot 0, men serien är icke dess mindre divergent, hvilket man enklast ser om man sammanfattar termerna i grupper på följande sätt:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

Summan af termerna inom den första parentesen är större än $2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, summan af termerna inom den andra parentesen

större än $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, och på samma sätt ser man att termerna inom enhvar af de följande parenteserna gifva en summa större än $\frac{1}{2}$. Summan af de n första termerna i den betraktade serien öfverskrider således hvarje föreskrifven gräns då n växer, eller, med andra ord, *den harmoniska serien är divergent*, h. s. b.

Vi tillämpa det ofvan sagda på *den geometriska serien*

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots, \qquad (a \neq 0). \tag{28}$$

Enligt vår allmänna beteckning är här

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}.$$

Om vi multiplicera denna likhet med q och subtrahera den sålunda erhållna likheten

$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$$

från den föregående, erhålles $(1 - q)\, s_n = a - aq^n$, hvaraf

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} q^n. \tag{29}$$

Om $|q| < 1$, närmar sig q^n med växande n gränsvärdet 0, så att vi erhålla

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Serien (28) är således i detta fall konvergent och dess summa lika med $\frac{a}{1-q}$.

Om $|q| > 1$, växer $|q^n|$ öfver hvarje gräns då n ökas. Ur (29) framgår att s_n i detta fall icke närmar sig något ändligt gränsvärde och att serien (28) således är divergent. Detta inses jämväl däraf att seriens termer i förevarande fall icke hafva 0 till gränsvärde, utan tvärtom till sitt numeriska värde växa öfver hvarje gräns.

För $q = 1$ hafva seriens samtliga termer värdet a, hvaraf

omedelbart framgår att serien är divergent, såframt a är skildt från 0, hvilket vi förutsatt.

Om slutligen $q = -1$, hafva seriens termer vexelvis värdet a och värdet $-a$; s_n är lika med 0 om n är ett jämnt tal, lika med a om n är udda, och konvergerar sålunda icke mot något gränsvärde. Serien är således äfven i detta fall divergent. Alltså:

Om rationstalet q ligger mellan -1 och 1, är den geometriska serien (28) konvergent och dess summa lika med $\frac{a}{1-q}$. För hvarje annat reellt värde af q är denna serie divergent.

Vi göra ännu några allmänna anmärkningar beträffande den ofvan uppställda definitionen för seriers konvergens.

Det är brukligt att med R_n beteckna den *restterm* man bör addera till summan af seriens n första termer för att erhålla seriens summa S. Vi skrifva således

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n,$$

hvaraf omvändt följer

$$R_n = S - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = S - s_n.$$

Härur framgår att $\lim_{n=\infty} R_n = 0$.

Resttermen R_n utgör tillika summan af de termer i serien som följa efter u_n. Ty om man i den identiska likheten

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = s_{n+p} - s_n$$

låter p obegränsadt växa medan n förblir konstant, närmar sig högra membrum gränsvärdet $S - s_n = R_n$, hvaraf följer

$$\lim_{p=\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) = R_n.$$

Serien $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ är således konvergent och dess summa lika med R_n, så att vi kunna skrifva

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots\cdot\cdot$$

Om vi hafva en oändlig talräcka

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\ldots$$

som konvergerar mot ett ändligt gränsvärde U:

$$\lim_{n=\infty} u_n = U,$$

kunna vi alltid uttrycka detta gränsvärde såsom summan af en konvergerande serie. Ty man har identiskt

$$u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1}).$$

Då n obegränsadt växer, närmar sig enligt vårt antagande u_n, och således äfven uttrycket i högra membrum, gränsvärdet U. Men detta innebär att den oändliga serien

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots\cdot\cdot$$

är konvergent och har summan U, så att vi kunna skrifva:

$$U = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) + \cdots\cdot\cdot$$

Då talräckan $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ har 1 till gränsvärde, är sålunda

$$1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots\cdot\cdot$$

Om ω är ett irrationellt tal och $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ dess successiva konvergenter, kunna vi likaså skrifva

$$\omega = \frac{P_0}{Q_0} + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0}\right) + \cdots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) + \cdots\cdot\cdot,$$

eller under enklare form, om vi använda likheten (15) s. 166 och observera att $\frac{P_0}{Q_0} = q$,

$$\omega = q + \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} + \cdots$$

Öfningsuppgifter:

1) Huru många termer bör man medtaga af serien (28) för att erhålla värdet af seriens summa med ett fel mindre än en föreskrifven kvantitet ε?

2) För hvilka värden x konvergerar serien

$$1+\left(\frac{x}{x-1}\right)+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{x-1}\right)^n+\cdots$$

och hvad är dess summa?

3) Mellan talen a_1 och a_2 inskjutes deras aritmetiska medeltal a_3, mellan a_2 och a_3 inskjutes likaledes dessa tals aritmetiska medeltal a_4, mellan a_3 och a_4 åter deras medeltal a_5, o. s. v. in infinitum. Beräkna den erhållna talräckans gränsvärde.

4) Bevisa enligt teorin för geometriska serier de kända reglerna för periodiska decimalbråks reduktion till vanliga bråk.

5) Utveckla $\frac{1}{x+a}$ i serie efter stigande potenser af $(x-x_0)$, samt efter stigande potenser af $\frac{1}{x-x_0}$.

6) Undersök konvergensen af serien

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots.$$

och bestäm dess summa i de fall då den konvergerar.

7) Bevisa följande allmänna satser om konvergerande serier:

a) Om man i en konvergerande serie tillfogar eller bortlemnar eller förändrar ett ändligt antal termer, erhålles åter en konvergent serie.

b) Om i en konvergerande serie termerna sammanfattas i grupper, utan att deras ordning förändras, och termerna inom hvarje enskild grupp adderas, är den sålunda erhållna serien konvergent och har samma summa som den gifna serien.

c) Om serien

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

konvergerar och har summan U, och om C är en godtycklig konstant, är jämväl serien

$$Cu_1+Cu_2+\cdots+Cu_n+\cdots$$

konvergent och dess summa lika med CU.

d) Hafva vi vidare en annan konvergent serie

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

hvars summa är V, konvergerar jämväl serien

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots$$

och har till summa $U+V$. Två konvergerande serier få således adderas term för term.

39. **Serier med positiva termer.** — Den s. 206 anförda satsen om stigande talräckor leder oss direkt till följande viktiga resultat:

Om i en serie med positiva termer

(30) $$r_1 + r_2 + \cdots + r_n + \cdots$$

summan af de n första termerna, huru stort n än väljes, är mindre än en ändlig kvantitet M, är serien konvergent och dess summa $\leqq M$.

Ty då termerna i serien alla äro positiva, har man

$$s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_n < \cdots\cdots,$$

och då hvarje tal i denna räcka enligt antagandet är $< M$, har s_n, enligt satsen om stigande talräckor, ett ändligt gränsvärde S som är $\leqq M$, hvarmed vår sats är bevisad. För serier med negativa termer gäller en analog sats, hvilken läsaren uppmanas att själf formulera.

Vi betrakta såsom exempel serien

(31) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots\cdots,$$

hvilken spelar en viktig roll i den högre Analysen.

För $s = 1$ reducerar sig denna serie till den harmoniska serien och är således divergent. Då s minskas, växa seriens termer, från och med den andra. Häraf följer omebelbart att, om $s < 1$, summan af seriens n första termer obegränsadt växer med n och serien således är divergent.

Vi skola nu visa att *serien (31) är konvergent så snart* $s > 1$. För detta ändamål sammanfatta vi dess termer i grupper på följande sätt:

$$1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \left(\frac{1}{8^s} + \cdots + \frac{1}{15^s}\right) + \cdots$$

Den första parentesen innehåller således 2 termer, den andra $4 = 2^2$ termer; den tredje $8 = 2^3$ termer, o. s. v. Då inom hvarje parentes den första termen är störst, erhålla vi

$$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}<2\cdot\frac{1}{2^s}=\frac{1}{2^{s-1}},$$

$$\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{7^s}<4\cdot\frac{1}{4^s}=\frac{1}{4^{s-1}}=\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8^s}+\cdots+\frac{1}{15^s}<8\cdot\frac{1}{8^s}=\frac{1}{8^{s-1}}=\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3,$$

o. s. v. Om vi från början af serien (31) medtaga till och med de termer som ingå i den n^{te} parentesen, är deras summa således mindre än

$$(32) \qquad 1+\frac{1}{2^{s-1}}+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n.$$

Men detta uttryck är en ändlig geometrisk serie med rationstalet $\frac{1}{2^{s-1}}$. Då enligt vårt antagande $s>1$, är detta rationstal mindre än 1, och den oändliga serie af hvilken den ofvanstående utgör en del är således konvergent och dess summa lika med

$$(33) \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}=\frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1}.$$

Uttrycket (32) är för hvarje värde n mindre än denna kvantitet, och vi se således att, huru många termer man än medtager från början af serien (31), dessas summa alltid är mindre än den ändliga kvantiteten (33), hvarmed vårt påstående är bevisadt.

Man kan i flere fall uppvisa konvergensen af en serie genom att jämföra den med en geometrisk serie eller med serien (31). Härvid har man att stödja sig på följande enkla princip:

Om (30) är en konvergent serie med positiva termer, och

$$(34) \qquad u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

en annan serie hvars termer, från och med en viss af dem, äro positiva och uppfylla villkoret

$$u_n < Mr_n,$$

där M är en ändlig konstant, är äfven serien (34) konvergent.

Om satsens förutsättningar äga rum för $n > n_0$, hafva vi

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p} < M(r_{n_0+1} + r_{n_0+2} + \cdots + r_{n_0+p}).$$

Men högra membrum är, huru stort p än väljes, mindre än MS, då vi med S beteckna summan af serien (30). Alltså är

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p} < MS \text{ för hvarje } p.$$

Enligt föregående sats är således serien $u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots$ konvergent och följaktligen konvergerar äfven serien (34), h. s. b.

Om vi såsom jämförelseserie (30) använda en geometrisk serie, erhålla vi följande tvenne *konvergenskriterier*, hvilka först uppställdes af CAUCHY.

I. *En serie (34) med positiva termer är konvergent om man, från och med ett visst värde n, har*

$$\sqrt[n]{u_n} < k, \tag{35}$$

där k är en positiv konstant hvars värde är < 1.

Ofvanstående villkor kan skrifvas $u_n < k^n$. Den gifna seriens termer äro således, från och med en viss af dem, mindre än motsvarande termer i den konvergerande geometriska serien $1 + k + k^2 + \cdots + k^n + \cdots$, hvarur dess konvergens omedelbart följer.

II. *En serie (34) med positiva termer är konvergent om från och med ett visst värde n,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \tag{36}$$

där k är en positiv konstant hvars värde är < 1.

Om vi antaga att ofvanstående olikhet äger rum för $n \geqq n_0$, hafva vi

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} < k, \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} < k, \ldots, \frac{u_{n_0+p}}{u_{n_0+p-1}} < k,$$

och genom multiplikation af dessa olikheter erhålles

$$\frac{u_{n_0+p}}{u_{n_0}} < k^p \quad \text{eller} \quad u_{n_0+p} < k^p u_{n_0},$$

eller ännu, om vi sätta $M = \frac{u_{n_0}}{k^{n_0}}$,

$$(37) \qquad u_{n_0+p} < M k^{n_0+p} \quad \text{för} \quad p = 1, 2, \ldots$$

Den gifna seriens termer äro således, från och med u_{n_0+1}, mindre än motsvarande termer i den konvergerande geometriska serien Σk^n, multiplicerade med M, hvaraf dess konvergens följer.

Det bör anmärkas att det senare kriteriet utgör ett speciellt fall af det förra. Ty ur olikheten (37) följer

$$\sqrt[n]{u_n} < k \sqrt[n]{M} \quad \text{för} \quad n > n_0.$$

Då n obegränsadt växer, närmar sig $\sqrt[n]{M}$ gränsvärdet 1 och $k\sqrt[n]{M}$ närmar sig således gränsvärdet k. Om vi välja ett tal k' mellan k och 1, kunna vi då finna ett helt tal $n_0' (> n_0)$ sådant att $k\sqrt[n]{M} < k'$ och således

$$\sqrt[n]{u_n} < k' \quad \text{för} \quad n > n_0'.$$

Det första kriteriet är följaktligen tillämpligt i alla de fall då det andra kriteriet är det.

Öfningsuppgifter:

1) Huru förhåller det sig med följande seriers konvergens:

$$\sum \frac{1}{n^2+q}, \sum \frac{n-1}{n^2+1}, \sum \frac{1}{1+q^n}, \sum \frac{q^n}{1+q^n}?$$

2) Bevisa att serien

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

konvergerar för hvarje positivt värde x, och angif en öfre gräns för seriens restterm.

3) För hvilka positiva värden x konvergerar serien

$$\sum n^p x^n \,?$$

4) Vi antaga tvenne konvergerande serier med positiva termer:

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots.$$

Bevisa att serien

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \cdots$$
$$+ (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \cdots + u_n v_1) + \cdots$$

är konvergent och dess summa $= UV$.

(Denna regel för seriers multiplikation gäller faktiskt under mycket allmännare förutsättningar).

5) Utveckla $\frac{1}{(1-x)^2}$ samt e^2 i serie, enligt ofvanstående regel för seriers multiplikation.

6) Bevisa att, om i en konvergerande serie $\sum u_n$ med positiva termer hvarje term är mindre än den föregående, man har

$$\lim_{n=\infty} n u_n = 0.$$

40. Serier med vexelvis positiva och negativa termer. — Vi betrakta ännu ett speciellt slag af serier på hvilka våra tidigare satser om gränsvärden äga tillämpning, nämligen s. k. *alternerande* serier, hvilkas termer äro vexelvis positiva och negativa, och bevisa om dem följande sats:

En serie med vexelvis positiva och negativa termer

(38) $$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + \cdots$$

är säkert konvergent om termernas numeriska värden ständigt minskas och hafva 0 *till gränsvärde:*

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots > 0\,; \quad \lim_{n=\infty} u_n = 0\,.$$

Om vi sammanfatta seriens termer två om två:

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + \cdots,$$

äro summorna inom parentes alla positiva, hvaraf vi sluta

(39) $$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \cdots$$

Sammanfatta vi åter termerna på följande sätt:

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots,$$

hvarvid summorna inom parentes igen äro positiva, finna vi

(40) $$s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2n-1} > \cdots.$$

Ur likheten $s_{2n} - s_{2n-1} = -u_{2n}$ följer vidare att $s_{2n} < s_{2n-1}$ för hvarje n, samt slutligen, då $\lim u_n = 0$, att

$$\lim_{n=\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = 0.$$

Talräckorna (39) och (40) uppfylla således samtliga förutsättningar i den s. 207 anförda satsen, och vi kunna följaktligen sluta att dessa talräckor konvergera mot ett gemensamt gränsvärde S, hvilket är större än hvarje tal i räckan (39) och mindre än hvarje tal i räckan (40). Sålunda är

$$\lim_{n=\infty} s_n = S,$$

hvilket innebär att serien (38) är konvergent och dess summa lika med S.

Den ofvan formulerade satsen är härmed bevisad. Densamma kan kompletteras som följer:

Om serien (38) afbrytes efter en viss term, är resttermen numeriskt mindre än den följande termen i serien och har samma tecken som denna.

Vi antaga att serien afbrytes efter en negativ term, t. ex. $-u_{2n}$. Resttermen R_{2n}, hvilken är lika med summan af den återstående delen af serien (jmf. s. 220), kan skrifvas

$$R_{2n} = (u_{2n+1} - u_{2n+2}) + (u_{2n+3} - u_{2n+4}) + \cdots$$

eller ock

$$R_{2n} = u_{2n+1} - (u_{2n+2} - u_{2n+3}) - (u_{2n+4} - u_{2n+5}) - \cdots$$

Det förra uttrycket visar att resten R_{2n} är positiv, d. v. s. har samma tecken som den följande termen u_{2n+1}, ur det senare uttrycket sluta vi åter att $R_{2n} < u_{2n+1}$. Vårt påstående är således riktigt i det betraktade fallet, och läsaren uppmanas att på samma sätt öfvertyga sig om dess riktighet i det fall då serien afbrytes efter en positiv term.

Ur ofvanstående sats följer t. ex. att serierna

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdot$$

och

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdot$$

äro konvergenta. I differentialkalkylen visas att den förra seriens summa är lika med den Neperska logaritmen för talet 2 och den senare seriens summa lika med $\frac{\pi}{4}$.

Det må ännu anmärkas att det för konvergensen af serien (38) är tillräckligt om de i satsen angifna villkoren äro uppfyllda *från och med en viss term*, ty de föregående termerna influera icke på seriens konvergens.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att serierna

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

och

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

konvergera för hvarje värde x. I differentialkalkylen bevisas att den förra seriens summa är lika med $\sin x$, den senare seriens lika med $\cos x$.

2) För hvilka värden x konvergerar serien

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdot ?$$

I differentialkalkylen visas att summan af denna serie, då den konvergerar, är lika med den Neperska logaritmen för $1 + x$.

3) För hvilka värden s konvergerar serien

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots\cdot ?$$

Bevisa att summan af denna serie, om $s > 1$, är lika med summan af serien (31) multiplicerad med

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right).$$

41. **Absolut konvergerande serier.** — Det ligger icke inom planen för denna lärobok att gifva en allmän eller fullständig teori för seriers konvergens. Vi anse oss likväl, såsom en afslutning på detta kapitel, ännu böra framhålla några viktiga egenskaper hos s. k. absolut konvergenta serier.

Vi hafva främst att bevisa följande förberedande sats:

En serie

(41) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

är säkert konvergent om den serie,

(41)′ $$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots,$$

som bildas af termernas absoluta belopp, konvergerar.

Vi antaga således att serien (41)′ är konvergent och beteckna med R_n dess restterm:

$$R_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots.$$

R_n aftager beständigt då n ökas och närmar sig gränsvärdet 0 (jmf. s. 220). Vi beteckna vidare med s_n summan af de n första termerna i serien (41):

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n .$$

Ur identiteten

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$$

följer

$$|s_{n+p} - s_n| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|.$$

Men högra membrum är mindre än R_n, huru stort p än väljes, och vi hafva således $|s_{n+p} - s_n| < R_n$ eller

$$s_n - R_n < s_{n+p} < s_n + R_n$$

för hvarje positivt helt tal p. Annorlunda uttryckt: *talen* $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ *ligga samtligen inom intervallen* $(s_n - R_n, s_n + R_n)$, *hvars längd är* $2R_n$.

Vi betrakta nu följande obegränsade räcka af intervaller:

$$\begin{aligned}&(s_1 - R_1, s_1 + R_1),\\&(s_2 - R_2, s_2 + R_2),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&(s_n - R_n, s_n + R_n),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dessa intervallers längder, $2R_1, 2R_2, \ldots, 2R_n, \ldots$, aftaga beständigt och hafva 0 till gränsvärde. Vidare inses lätt att, för hvarje index n, *intervallen* $(s_{n+1} - R_{n+1}, s_{n+1} + R_{n+1})$ *utgör en del af* $(s_n - R_n, s_n + R_n)$. Ty ur likheterna

$$s_{n+1} = s_n + u_{n+1}, \quad R_{n+1} = R_n - |u_{n+1}|,$$

följer

$$s_{n+1} + R_{n+1} = s_n + R_n + u_{n+1} - |u_{n+1}|,$$

$$s_{n+1} - R_{n+1} = s_n - R_n + u_{n+1} + |u_{n+1}|,$$

hvarur framgår att, om termen u_{n+1} är positiv, $s_{n+1} + R_{n+1} = s_n + R_n$, medan, om u_{n+1} är negativ, $s_{n+1} - R_{n+1} = s_n - R_n$. I förra fallet sammanfalla således slutpunkterna, i senare fallet begynnelsepunkterna af intervallerna $(s_n - R_n, s_n + R_n)$ och $(s_{n+1} - R_{n+1}, s_{n+1} + R_{n+1})$, och då den senare intervallen är kortare än den förra, är riktigheten af vårt påstående evident.

Enligt satsen s. 208 finnes det således ett och endast ett tal som samtidigt tillhör alla de ofvan betraktade intervallerna. Detta tal, hvilket vi beteckna med S, utgör det gemensamma gränsvärdet för intervallernas begynnelse- och slutpunkter, och vi hafva således t. ex.

$$\lim_{n=\infty} (s_n - R_n) = S,$$

hvaraf, då $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, följer $\lim\limits_{n=\infty} s_n = S$. Serien (41) är följaktligen konvergent och dess summa $= S$, hvarmed vår sats är bevisad.

Ur denna sats kunna vi t. ex. omedelbart sluta att serien

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

hvilken tidigare bevisades vara konvergent för $x \geqq 0$ (jmf. uppgiften (2) s. 226), konvergerar jämväl för alla negativa värden x. I differentialkalkylen visas att denna series summa är $= e^x$ för hvarje värde x (jmf. n⁰ 43, uppgift (3)).

En serie, som icke upphör att konvergera om samtliga termer ersättas med deras absoluta belopp, säges vara *absolut konvergent*. Ofvanstående serie och de i uppgiften (1) s. 229 anförda serierna äro sålunda absolut konvergenta för hvarje värde x. Däremot är serien

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

icke absolut konvergent, ty vi ha tidigare visat att serien $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$, d. v. s. den harmoniska serien, är divergent. Den i uppgiften (3) s. 229 behandlade allmännare serien är absolut konvergent för $s>1$, hvaremot densamma, om $0<s \leqq 1$, visserligen konvergerar, men icke absolut.

Vi veta att värdet af en summa bestående af ett ändligt antal termer är oberoende af termernas ordningsföljd. Huru förhåller sig en oändlig, konvergerande serie, om termernas ordningsföljd förändras?

Svaret på denna fråga framgår ur följande viktiga sats, som tillika visar hvilken grundväsentlig skillnad i berörda afseende äger rum mellan absolut konvergenta och icke absolut konvergenta serier.

En absolut konvergent serie förblir konvergent och dess summa oförändrad i hvilken ordning dess termer än uppskrifvas.

Om en serie konvergerar men icke absolut, är det däremot möjligt att uppskrifva dess termer i en sådan ordningsföljd att den nya serien blir divergent, eller att dess summa får ett godtyckligt föreskrifvet värde.

Vi betrakta först en konvergerande serie med positiva termer

(42) $$S = r_1 + r_2 + \cdots + r_n + \cdots\cdot$$

och visa att dess summa S är oberoende af termernas ordning.

Vi uppskrifva seriens termer i en ny ordningsföljd

(42)′ $$r_{\nu_1} + r_{\nu_2} + \cdots + r_{\nu_n} + \cdots,$$

hvarvid således indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ utgöras af samtliga positiva hela tal, $1, 2, 3, \ldots$, tagna i någon viss ordning.

Om ε är ett gifvet, godtyckligt litet positivt tal, kunna vi välja ett helt tal n_0 så att

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n_0} > S - \varepsilon .$$

Vidare välja vi n_1 så stort att indices $1, 2, \ldots, n_0$ samtligen ingå bland indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n_1}$. Då är äfven

$$r_{\nu_1} + r_{\nu_2} + \cdots + r_{\nu_n} > S - \varepsilon \text{ så snart } n > n_1 .$$

Å andra sidan är venstra membrum i denna olikhet för hvarje värde n mindre än S, ty $r_{\nu_1}, r_{\nu_2}, \ldots, r_{\nu_n}$ utgöra ju termer i serien (42), och då dennas samtliga termer äro positiva är summan af ett godtyckligt antal af dem mindre än seriens summa S. Alltså är

$$0 < S - (r_{\nu_1} + r_{\nu_2} + \cdots + r_{\nu_n}) < \varepsilon \text{ för } n > n_1 ,$$

hvilket innebär att serien (42)′ är konvergent och dess summa $= S$. Den förra delen af ofvanstående sats gäller således för serier med positiva termer, och man sluter häraf omedelbart att den äfven gäller för serier hvilkas samtliga termer äro negativa.

Vi betrakta nu en godtycklig, absolut konvergerande serie

(43) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

där vi således icke göra några förutsättningar om termernas tecken. Vi utvälja ur serien å ena sidan dess positiva termer,

hvilka vi, i den ordning hvilken de intaga i serien, beteckna med $a_1, a_2, a_3, \ldots$, å andra sidan de negativa termerna, hvilka vi beteckna med $-b_1, -b_2, -b_3, \ldots$

Serierna

$$(44) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

och

$$(45) \qquad -b_1 - b_2 - b_3 - \cdots - b_n - \cdots$$

äro båda konvergenta. Ty enligt antagandet konvergerar serien

$$(43)' \qquad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots.$$

Beteckna vi dennas summa med M, är således summan af de n första termerna i serien (44), huru stort n än väljes, mindre än M, och summan af de n första termerna i serien (45) större än $-M$, hvarur riktigheten af påståendet följer (jmf. satsen s. 223).

Om vi med U beteckna summan af serien (43), med A och $-B$ summorna af serierna (44) och (45), inses vidare att

$$U = A - B.$$

Ty, om ε är gifvet, kunna vi å ena sidan välja n_1 så stort att

$$A - \varepsilon < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < A \quad \text{för} \quad n \geqq n_1,$$

å andra sidan kunna vi välja n_2 så att

$$-B < -b_1 - b_2 - \cdots - b_n < -B + \varepsilon \quad \text{för} \quad n \geqq n_2.$$

Om vi då välja n_0 så stort att termerna $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ och $-b_1, -b_2, \ldots, -b_{n_2}$ samtligen ingå bland $u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}$, följer ur ofvanstående olikheter omedelbart

$$A - B - \varepsilon < u_1 + u_2 + \cdots + u_n < A - B + \varepsilon \quad \text{för} \quad n > n_0,$$

eller

$$|(A - B) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)| < \varepsilon \quad \text{för} \quad n > n_0.$$

Men detta innebär att $\lim (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = A - B$ eller att $U = A - B$, såsom vi påstått.

Vi inse nu att serien (43) förblir konvergent och dess summa oförändrad huru dess termer än ordnas. Ty om vi från den omordnade serien uttaga endast de positiva termerna eller endast de negativa termerna, erhålla vi serier som skilja sig från (44) och (45) blott genom termernas ordningsföljd, och som således, enligt hvad tidigare visats, äro konvergenta och hafva summorna A och $-B$. Såsom på föregående sida sluter man häraf att den omordnade serien är konvergent och dess summa $= A - B$.

Den förra delen af satsen s. 232 är härmed fullständigt bevisad.

Vi antaga nu att serien (43) konvergerar men att den icke är absolut konvergent, d. v. s. att serien (43)′ är divergent.

I detta fall divergerar såväl serien (44) som serien (45). Ty vore dessa serier båda konvergenta, skulle man, om deras summor igen betecknas med A och $-B$, för hvarje index n hafva

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| < A + B,$$

och serien (43)′ vore således konvergent, hvilket strider mot vårt antagande. Vore åter den ena af serierna (44) och (45) konvergent och den andra divergent, skulle däraf följa att serien (43) vore divergent, tvärtemot antagandet. Ty om t. ex. serien (44) konvergerar men serien (45) divergerar, ligger summan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ under en ändlig gräns M, huru stort n än väljes, medan summan af de n första termerna i serien (45) med växande n aftar mot $-\infty$, hvaraf följer att $\lim (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = -\infty$.

Vi inse nu omedelbart att, om serien (43) konvergerar men icke absolut, man kan ordna dess termer på sådant sätt att den nya seriens summa antar ett godtyckligt föreskrifvet värde γ. För detta ändamål kunna vi t. ex. förfara på följande sätt (vi antaga $\gamma > 0$):

Då serien (44) i förevarande fall är divergent, kunna vi från början af densamma afskilja så många termer att summan blir $> \gamma$. De afskilda termerna må vara

$$(\alpha) \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}.$$

Om vi antaga att för n_1 valts det minsta tal för hvilket denna summa är $>\gamma$, är dess värde $\leqq \gamma + a_{n_1}$.

Härefter afskilja vi från början af serien (45) precis så många termer

$$(\beta) \qquad -b_1 - b_2 - \cdots - b_{n'_1}$$

som erfordras för att summan af dessa termer och termerna (α) skall blifva mindre än γ (detta är säkert möjligt då jämväl serien (45) i förevarande fall divergerar). Nämnda summas värde är då $\geqq \gamma - b_{n'_1}$.

Nästa steg blir att, af de termer i serien (44) som följa efter a_{n_1}, afskilja så många

$$(\gamma) \qquad a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}$$

som erfordras för att den sammanlagda summan af termerna (α), (β) och (γ) skall blifva $>\gamma$. Denna summas värde är då $\leqq \gamma + a_{n_2}$.

Genom att fortgå på detta sätt, erhålla vi samtliga termer i serierna (44) och (45), och således samtliga termer i den gifna serien (43), ordnade i en fullt bestämd följd, i det vi nämligen efter hvarandra uppskrifva termerna (α), (β), (γ), o. s. v.

Den sålunda erhållna serien är konvergent och dess summa är $=\gamma$. Ty, om vi allmänt med S_n beteckna summan af denna series n första termer, är, enligt hvad ofvan visats,

$$\gamma < S_{n_1} \leqq \gamma + a_{n_1}, \quad \gamma - b_{n'_1} \leqq S_{n_1+n'_1} < \gamma, \quad \gamma < S_{n_1+n'_1+n_2} \leqq \gamma + a_{n_2},$$

o. s. v., och häraf kunna vi allmännare sluta, då vi gifva akt på termernas tecken i de skilda grupperna,

$$-b_{n'_1} \leqq S_n - \gamma \leqq a_{n_1} \text{ för } n_1 \leqq n \leqq n_1 + n'_1,$$

$$-b_{n'_1} \leqq S_n - \gamma \leqq a_{n_2} \text{ för } n_1 + n'_1 \leqq n \leqq n_1 + n'_1 + n_2,$$

$$-b_{n'_2} \leqq S_n - \gamma \leqq a_{n_2} \text{ för } n_1 + n'_1 + n_2 \leqq n \leqq n_1 + n'_1 + n_2 + n'_2,$$

o. s. v. Då nu serien (43) enligt antagandet är konvergent, hafva dess termer 0 till gränsvärde, och följaktligen konvergera äfven talräckorna $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ och $b_{n'_1}, b_{n'_2}, b_{n'_3}, \ldots$

mot gränsvärdet 0. Enligt ofvanstående olikheter är således $\lim(S_n - \gamma) = 0$ eller $\lim S_n = \gamma$, d. v. s. den serie vi erhållit genom omordning af termerna i serien (43) är konvergent och dess summa $= \gamma$, h. s. b.

Det återstår för oss nu endast att visa att det äfven är möjligt att uppskrifva termerna i den gifna serien (43) i en sådan ordning att den erhållna serien blir divergent. Detta resultat kan ernås t. ex. på följande sätt. Vi sammanfatta termerna i serien (44) i grupper, i det vi till hvarje grupp föra precis så många termer som erfordras för att deras summa skall blifva större än ett gifvet positivt tal, t. ex. 1. Då nämnda serie är divergent, erhålles en oändlig mängd dylika grupper. Vi uppskrifva därpå främst termerna i den första af dessa grupper, därefter den första termen i serien (45), sedan termerna i den andra af nyssnämnda grupper, så den andra termen i serien (45), o. s. v. in infinitum. Då man beaktar att termerna i serien (45) hafva 0 till gränsvärde, finner man omedelbart att summan af de n första termerna i den serie, som framgår ur den verkställda omordningen, med växande n öfverskrider hvarje föreskrifven gräns, och att serien i fråga således är divergent. Den s. 232 formulerade satsen är härmed fullständigt bevisad.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att summan af serien

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

förändras om dess termer uppskrifvas i följande ordning:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots\cdots$$

Angif vidare ett sådant sätt att ordna den gifna seriens termer att den nya serien blir divergent.

2) Bevisa följande viktiga sats af Abel:

Om en potensserie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

konvergerar för ett visst värde x_0, är den absolut konvergent för hvarje värde x som är numeriskt mindre än x_0.

Femte kapitlet.

Om funktioners derivator.

42. **Derivatans definition.** — Differentialkalkylen har till uppgift att undersöka huru en funktions värde förändras då dess argument varierar, samt att uppställa uttryck egnade för beräkning af funktioners värden. Dess grundbegrepp är begreppet *derivata*, hvilket vi således främst böra förklara.

Vi anknyta vid betraktelserna s. 35. Vi antaga således att funktionen $f(x)$ är entydigt definierad och ändlig inom en viss intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$, och låta argumentet variera från x_0 till ett annat värde $x_0 + \Delta x$ inom denna intervall, hvarvid funktionen erhåller tillväxten

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Enligt definitionen s. 35 är $f(x)$ *kontinuerlig* för $x = x_0$ om Δf närmar sig gränsvärdet 0 samtidigt med Δx. Om detta villkor antages uppfylldt, kunna vi emellertid föresätta oss att närmare studera beroendet mellan nämnda kvantiteter, och hafva då främst att undersöka den s. k. *differenskvoten*

$$(1) \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

alltså *förhållandet mellan funktionens och variabelns tillväxter*.

Värdet af detta förhållande, hvilket, enligt vårt antagande, är entydigt definieradt och ändligt om Δx är *skildt från* 0 och numeriskt mindre än h, utgör ett mått för huru snabbt $f(x)$ förändras då x varierar från början till slutet af intervallen $(x_0, x_0 + \Delta x)$, och kunde, med en från meka-

niken lånad term, betecknas såsom *medelhastigheten för funktionens förändring inom nämnda intervall* (jmf. n⁰ 57).

Vilja vi studera funktionens förhållande inom en allt mindre omgifning af värdet x_0, hafva vi att undersöka huru uttrycket (1) förhåller sig då Δx närmar sig 0, och om det härvid närmar sig ett gränsvärde. Om ett sådant existerar, kunde detsamma, enligt mekanikens terminologi, betecknas såsom *hastigheten af funktionens förändring för* $x = x_0$ (jmf. n⁰ 57).

Ifrågavarande gränsvärde utgör just *derivatan af* $f(x)$ *för* $x = x_0$, för hvilket begrepp således gäller följande

Definition. — *Med derivatan af funktionen* $f(x)$ *för argumentvärdet* $x = x_0$ *förstås det gränsvärde (om ett sådant existerar) hvilket förhållandet (1) mellan funktionens och variabelns tillväxter närmar sig, då variabelns tillväxt* Δx *närmar sig* 0.

Af hvad tidigare sagts om gränsvärden (jmf. s. 192) följer att derivatan är entydigt bestämd, om den öfverhufvud existerar.

Om $f(x)$ har en derivata för hvarje värde x som tillhör en viss intervall, utgör denna derivata själf en funktion af x som är definierad inom ifrågavarande intervall. För densamma användes enligt Lagrange beteckningen $f'_x(x)$, enligt Cauchy beteckningen $D_x f(x)$, hvilka beteckningar, om ingen oklarhet därigenom uppstår, kunna förenklas till $f'(x)$ och $D f(x)$. För Leibniz' beteckning af derivatan såsom en *differentialkvot* redogöra vi längre fram.

Med användande af dessa beteckningar kan derivatans definition uttryckas genom formeln

$$(2) \qquad f'(x) = D f(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

hvilken, om vi skrifva $x + \Delta x = x'$ och således $\Delta x = x' - x$, antar utseendet

$$(2)' \qquad f'(x) = D f(x) = \lim_{x' = x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Derivatan af $f(x)$ för ett speciellt argumentvärde $x = x_0$ erhåller enligt Lagrange helt naturligt beteckningen $f'(x_0)$, och betecknas enligt Cauchy $[D f(x)]_{x = x_0}$.

Att bilda en funktions derivata kallas att *derivera* funktionen. Synonymt med detta uttryck användes ofta uttrycket *differentiera*, som egentligen betecknar bildandet af funktionens *differential*, ett begrepp hvilket vi längre fram förklara.

För att förtydliga det ofvan sagda medels ett alldeles enkelt exempel, skola vi undersöka om funktionen x^2 har en derivata för $x=\frac{1}{2}$. För detta argumentvärde antar x^2 värdet $\frac{1}{4}$, för $x=\frac{1}{2}+\Delta x$ är dess värde $\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)^2=\frac{1}{4}+\Delta x+(\Delta x)^2$. Mot tillväxten Δx af argumentet svarar således tillväxten $\Delta x+(\Delta x)^2$ af funktionen. Differenskvoten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

kan, om $\Delta x \neq 0$, skrifvas under formen $1+\Delta x$, hvaraf framgår att den konvergerar mot gränsvärdet 1 då Δx närmar sig 0. Alltså har x^2 en derivata för $x=\frac{1}{2}$ och dennas värde är 1:

$$[D(x^2)]_{x=\frac{1}{2}}=1\,.$$

Funktionen x^2 har för öfrigt en derivata för hvarje gifvet värde x. Ty om argumentet, utgående från detta värde x, får tillväxten Δx, erhåller funktionen tillväxten

$$(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

och dennas förhållande till variabelns tillväxt

$$\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

närmar sig gränsvärdet $2x$ då Δx försvinner. Alltså är

$$D(x^2)=2x\,.$$

För $x=\frac{1}{2}$ återfinna vi det tidigare resultatet.

Vi göra några allmänna anmärkningar beträffande den ofvan uppställda definitionen.

Man låter denna definition gälla äfven i de fall då kvoten (1) konvergerar mot $+\infty$ eller $-\infty$ när Δx närmar sig 0 (jmf. s. 194), och säger således att derivatan af $f(x)$ för $x=x_0$ i förra fallet är $=+\infty$, i senare fallet $=-\infty$.

Exempelvis är derivatan af $\sqrt[3]{x}$ för $x=0$ lika med $+\infty$. Ty då argumentet varierar från 0 till x, erhåller funktionen tillväxten $\sqrt[3]{x}$, och förhållandet $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$ växer mot ∞ då x närmar sig 0.

Det kan vidare inträffa att kvoten (1) närmar sig ett bestämdt värde blott om x *från en viss sida* närmar sig x_0 (jmf. s. 195). Om gränsvärdet

$$\lim_{\Delta x=+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

existerar, säga vi att detta gränsvärde utgör funktionens *högerderivata* för $x=x_0$; existerar åter gränsvärdet

$$\lim_{\Delta x=-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

benämnes detsamma funktionens *vensterderivata* för $x=x_0$.

Funktionen $\sqrt{x^3}$, hvilken, så länge vi röra oss inom det reella talområdet, är definierad endast för $x\geqq 0$, har sålunda för $x=0$ endast en högerderivata, och dennas värde är 0.

Om ofvanstående tvenne gränsvärden samtidigt existera och äro lika, vill detta säga att funktionen $f(x)$ för $x=x_0$ har en derivata i egentlig mening, eller, såsom vi i det följande ofta uttrycka oss, en *bestämd* derivata.

Det kan emellertid äfven inträffa att höger- och vensterderivatorna båda förefinnas men hafva olika värden. Det enklaste exemplet härpå ger oss funktionen $f(x)=|x|$. För att afgöra om denna har en derivata för $x=0$, hafva vi att undersöka huru kvoten

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x|}{x}$$

förhåller sig då x närmar sig 0. Nu har denna kvot värdet 1 för $x > 0$, värdet -1 för $x < 0$ (ty i sistnämnda fall är $|x| = -x$), och densamma har sålunda äfven till gränsvärde $+1$ om x närmar sig 0 genom positiva värden, -1 om x närmar sig 0 genom negativa värden. Funktionen $|x|$ har följaktligen för $x = 0$ icke en derivata i egentlig mening, men väl en högerderivata, hvars värde är $+1$, och en vensterderivata, hvars värde är -1.

Ur derivatans definition sluta vi till följande viktiga sats, som anger betydelsen af derivatans tecken för funktionens förhållande i omgifningen af det betraktade argumentvärdet:

Om $f'(x_0)$ har ett positivt värde, finnes det ett positivt tal δ sådant att $f(x)$ är större än $f(x_0)$ för $x_0 < x < x_0 + \delta$, mindre än $f(x_0)$ för $x_0 - \delta < x < x_0$.

Om $f'(x_0) < 0$, är däremot, för ett tillräckligt litet δ, $f(x)$ mindre än $f(x_0)$ för $x_0 < x < x_0 + \delta$, större än $f(x_0)$ för $x_0 - \delta < x < x_0$.

Att derivatan af $f(x)$ för $x = x_0$ är lika med $f'(x_0)$ vill nämligen säga, om vi först antaga att $f'(x_0)$ har ett ändligt värde, att man till ett gifvet ε alltid kan finna ett δ, sådant att värdet af differenskvoten (1) faller mellan gränserna $f'(x_0) - \varepsilon$ och $f'(x_0) + \varepsilon$ så snart $|\Delta x| < \delta$.

Om $f'(x_0) > 0$ och om ε valts mindre än $f'(x_0)$, så att $f'(x_0) - \varepsilon > 0$, är således kvoten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ positiv och Δf har samma tecken som Δx för $|\Delta x| < \delta$. Om däremot $f'(x_0) < 0$ och ε valts mindre än $|f'(x_0)|$, så att $f'(x_0) + \varepsilon < 0$, är kvoten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ negativ och Δf således af motsatt tecken mot Δx för $|\Delta x| < \delta$. Satsen är följaktligen riktig om $f'(x_0)$ har ett ändligt värde.

Man kommer till samma resultat om $f'(x_0)$ har ett oändligt värde. Ty om $f'(x_0) = \infty$, växer kvoten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ öfver hvarje föreskrifven gräns då Δx närmar sig 0 och är således positiv för $|\Delta x| < \delta$, om δ väljes tillräckligt litet. Är åter $f'(x_0)$

$= -\infty$, kan man välja δ så litet att kvoten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ är negativ för $|\Delta x| < \delta$.

Den ofvan formulerade satsen är härmed fullständigt bevisad.

Exempelvis är derivatan af funktionen x^2 positiv om $x > 0$, negativ om $x < 0$, och i öfverensstämmelse med ofvanstående sats växer funktionens värde i förra fallet, aftar i senare fallet, om argumentet tilldelas en liten positiv tillväxt.

Öfningsuppgifter:

1) Hvilken är derivatan af funktionen $f(x) = x$?

2) Bilda derivatan af x^3 för $x = 0$, för $x = -1$, samt för ett allmänt värde x.

3) Bestäm för funktionen $f(x) = x^3$ ett sådant tal δ, att differenskvoten (1) skiljer sig från derivatan $f'(x_0)$ med mindre än $\frac{1}{100}$ så snart $|\Delta x| < \delta$. Härvid gifves åt x_0 efterhand värdena $0, 1, 2$.

4) Bilda derivatan af polynomet $2x^2 - 3x + 1$.

5) Undersök om funktionerna

$$\sin x,\quad \sqrt{x},\quad x \sin\frac{1}{x},\quad x^2 \sin\frac{1}{x}$$

hafva derivator för $x = 0$.

43. **Härledning af de elementära grundfunktionernas derivator.** — Vi skola genomgå reglerna för de elementära funktionernas derivering, och göra härvid början med de enklaste af dem.

1°. Om funktionen $f(x)$ är *konstant* inom en viss intervall (a, b), d. v. s. om den antar samma värde i hvarje punkt af denna intervall, är dess derivata 0 för hvarje värde x mellan a och b. Ty differenskvoten

$$\text{(3)} \qquad \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

är lika med 0 för $0 < |\Delta x| < \delta$, där δ betecknar det mindre af talen $|x - a|$ och $|x - b|$, och den har således äfven 0 såsom gränsvärde för $\Delta x = 0$.

2⁰. Vi betrakta en potens, x^n, hvars exponent n är ett positivt helt tal. Differenskvoten

(4) $$\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

kan, om $\Delta x \neq 0$, enligt binomialsatsen bringas under formen

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Då Δx närmar sig 0 försvinna samtliga termer, utom den första som är oberoende af Δx. Summan närmar sig således gränsvärdet nx^{n-1} (jmf. s. 202), och vi erhålla den viktiga formeln

(5) $$D(x^n) = nx^{n-1}.$$

För $n = 1, 2, 3$ ger oss denna formel

$$D(x) = 1, \quad D(x^2) = 2x, \quad D(x^3) = 3x^2.$$

Den bibehåller sin giltighet äfven för $n = 0$, ty dess högra membrum reducerar sig då till 0, och å andra sidan har man identiskt $x^0 = 1$ och således $D(x^0) = 0$.

Likheten (5) kan äfven härledas utan hjälp af binomialsatsen. Om man för korthetens skull skrifver $x + \Delta x = x'$ och använder identiteten (20) s. 46, kan nämligen kvoten (4) skrifvas

$$\frac{x'^n - x^n}{x' - x} = x'^{n-1} + x'^{n-2} x + \cdots + x^{n-1}.$$

Då Δx närmar sig 0 och x' således x, närmar sig hvarje term i högra membrum gränsvärdet x^{n-1}, och summans gränsvärde är således nx^{n-1}.

3⁰. Vi gå till funktionerna $\sin x$ och $\cos x$. För den förra antar kvoten (3) formen

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}.$$

Enligt hvad s. 192 bevisats, är

$$\lim_{\Delta x \doteq 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 , \quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0 ,$$

och hela uttrycket närmar sig således gränsvärdet $\cos x$ då Δx försvinner (jmf. s. 202).

Detta resultat erhålles ännu enklare om vi använda den kända formeln

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} ,$$

hvilken ger oss

$$\frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} .$$

I högra membrum närmar sig, då Δx försvinner, den förra faktorn gränsvärdet $\cos x$, den senare faktorn gränsvärdet 1, och produktens gränsvärde är således $\cos x$.

På analogt sätt härledes derivatan af funktionen $\cos x$. Man finner att kvoten

$$\frac{\cos (x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

kan skrifvas under formen

$$- \sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \cos x \cdot \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}$$

eller ock under formen

$$- \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} ,$$

och erhåller på hvartdera sättet gränsvärdet $- \sin x$.

Vi hafva sålunda bevisat de viktiga formlerna

(6) $$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = - \sin x .$$

4°. Med användande af additionsteoremet för funktionen $\operatorname{tang} x$, erhålles

$$(7) \qquad D \tang x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

hvilka formler läsaren uppmanas att själf härleda.

5⁰. Deriveringen af exponentialfunktionen a^x erfordrar en något längre öfverläggning. Med stöd af funktionens additionsteorem (jmf. s. 78) bringa vi först differenskvoten (3) under formen

$$(8) \qquad \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h},$$

i det vi för enkelhetens skull skrifva h i stället för Δx. I högra membrum beror endast faktorn

$$(9) \qquad \frac{a^h - 1}{h}$$

af h, och vi hafva således att söka dess gränsvärde för $h = 0$.

Om vi sätta

$$a^h - 1 = \frac{1}{m},$$

hvaraf följer $a^h = 1 + \frac{1}{m}$, $h = \log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right)$, erhålla vi

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

eller

$$(10) \qquad \frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{\log_a \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]}.$$

Då h försvinner, närmar sig äfven täljaren $a^h - 1$ noll, och dess reciproka värde m växer således till sitt absoluta belopp öfver hvarje gräns. Vi böra alltså undersöka huru uttrycket

$$(11) \qquad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

härvid förhåller sig.

Vi visade i n⁰ 37 att detta uttryck, då m växer mot ∞ *genom positiva heltalsvärden*, konvergerar mot ett ändligt gränsvärde, hvilket just utgjorde vår definition för det Neperska talet e. Vi skola nu bevisa att man alltid erhåller samma gränsvärde huru än $|m|$ växer mot ∞, eller, precisare uttryckt, att man till ett gifvet, godtyckligt litet positivt tal ε alltid kan finna ett annat positivt tal M, sådant att

$$\left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - e\right| < \varepsilon \text{ så snart } |m| > M.$$

Vi beteckna med n det största hela tal hvars värde är $\leq m$, så att följaktligen

(12) $$n \leq m < n+1.$$

Om $m > 0$, finner man successivt

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

och å andra sidan

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

eller således

(13) $$\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Då nu m växer mot ∞, ökas jämväl det genom olikheterna (12) bestämda hela talet n obegränsadt. Faktorerna

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \quad \text{och} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

närma sig härvid båda gränsvärdet 1, medan potenserna

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{och} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

konvergera mot gränsvärdet e. De gränser, (13), mellan

hvilka det gifna uttrycket (11) inneslutits, närma sig således bägge gränsvärdet e, och detta uttryck har följaktligen äfven e till gränsvärde för $m = \infty$.

Om m har ett negativt värde och vi sätta $m = -m'$, kan (11) skrifvas:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{m'}\right)^{-m'} = \left(\frac{m'}{m'-1}\right)^{m'} = \left(1 + \frac{1}{m'-1}\right)^{m'},$$

eller slutligen

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m'-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1}.$$

Då m aftar mot $-\infty$, växer m' mot $+\infty$. Den första faktorn i högra membrum närmar sig härvid gränsvärdet 1, den andra faktorn, enligt hvad just visats, gränsvärdet e, och hela uttrycket konvergerar således äfven i detta fall mot gränsvärdet e.

Härmed är vårt påstående fullständigt bevisadt, och vi kunna skrifva

$$(14) \qquad \lim_{|m| = \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Då funktionen $\log_a x$ är kontinuerlig för $x > 0$, följer häraf

$$\lim_{|m| = \infty} \log_a \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right] = \log_a e = \frac{1}{\log_e a},$$

och således, enligt (10),

$$\lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{|m| = \infty} \frac{1}{\log_a \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]} = \log_e a.$$

Vi gå nu tillbaka till likheten (8) och erhålla slutligen, om vi öfverenskomma att för den Neperska logaritmen [1]) härefter använda den förenklade beteckningen log,

$$\lim_{h=0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \log a.$$

[1]) Jämte beteckningen log användes för den Neperska eller naturliga logaritmen, särskildt i tyska arbeten, beteckningen ln, som utgör en förkortning af logarithmus naturalis.

Härmed är bevisadt att funktionen a^x för hvarje reellt argumentvärde har en derivata, hvars värde erhålles ur formeln

(15) $$D(a^x) = a^x \log a.$$

Detta resultat gäller för hvarje positiv bas a. Sättes speciellt $a = e$, blir $\log a = \log e = 1$, och vi erhålla

(15)' $$D(e^x) = e^x.$$

Derivatan af funktionen e^x är således identisk med funktionen själf.

6⁰. Vi söka slutligen derivatan af funktionen $\log_a x$. Enligt logaritmens kända egenskaper erhålles

$$\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Om vi sätta $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m}$, hvaraf $\frac{1}{\Delta x} = \frac{m}{x}$, antar detta uttryck formen

$$\frac{m}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right].$$

Då Δx närmar sig 0, växer $|m| = \frac{x}{|\Delta x|}$ öfver hvarje gräns, och enligt (14) närmar sig vårt uttryck härvid gränsvärdet $\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \log a}$. Alltså är

(16) $$D\log_a x = \frac{1}{x\log a} = \frac{M}{x},$$

där M betecknar moduln för logaritmsystemet med basen a i förhållande till det Neperska systemet (jmf. s. 100—101). Om $a = e$, antar detta resultat den enklare formen

(16)' $$D\log x = \frac{1}{x}.$$

Öfningsuppgifter:

1) Härled formlerna (7).

2) Sök följande funktioners derivator ($n =$ ett positivt helt tal):

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^n}, \quad \sqrt{x}, \quad \text{arc tang}\, x.$$

* 3) Bevisa med stöd af (14) att man för hvarje reellt värde x har

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

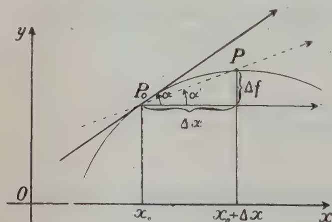
samt vidare, på grund af detta resultat, att likheten

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

gäller för hvarje reellt värde x (jmf. beviset i n° 37).

44. **Derivatans geometriska betydelse. Bestämning af en kurvas tangent och normal.** — Förrän vi gå vidare i läran om funktioners derivering, återvända vi till derivatans begrepp för att förklara dess geometriska innebörd. Vi göra härvid samma förutsättningar och använda samma beteckning som s. 238.

Vi betrakta den kurva som geometriskt representerar den gifna funktionen $f(x)$ (se nedanstående figur). Mot argumentvärdet x_0 svarar en punkt P_0 af denna kurva hvars koordinater äro $x = x_0$, $y = f(x_0)$, mot argumentvärdet $x_0 + \Delta x$ en annan punkt P med koordinaterna $x = x_0 + \Delta x$, $y = f(x_0 + \Delta x)$.



Vinkelkoefficienten för den genom dessa två punkter dragna sekanten är lika med differenskvoten

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

såsom äfven ur figuren framgår. Om vi med α' beteckna den vinkel som sekantens positiva riktning (d. v. s. den riktning i hvilken x växer) bildar med x-axelns positiva riktning, är således

$$\text{(17)} \qquad \text{tang}\, \alpha' = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Vinkeln α' ligger mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ och kan således betecknas (jmf. s. 97)

$$(17)' \qquad \alpha' = \overline{\text{arc tang}}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right).$$

Vi antaga nu att funktionen $f(x)$ för $x = x_0$ har en bestämd derivata $f'(x_0)$, d. v. s. att kvoten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ närmar sig gränsvärdet $f'(x_0)$ då Δx försvinner. Emedan $\overline{\text{arc tang}}$ är en kontinuerlig funktion, kunna vi då, om $f'(x_0)$ har ett ändligt värde, ur (17)' sluta (jmf. s. 193)

$$\lim_{\Delta x = 0} \alpha' = \overline{\text{arc tang}}\ f'(x_0) = \alpha,$$

där α således betecknar den mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ liggande vinkel som bestämmes genom likheten

$$(18) \qquad \text{tang}\ \alpha = f'(x_0).$$

Är $f'(x_0) = \infty$, d. y. s. växer $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ öfver hvarje föreskrifven positiv gräns då Δx försvinner, närmar sig vinkeln α' gränsvärdet $\frac{\pi}{2}$, om åter $f'(x_0) = -\infty$, är dess gränsvärde $-\frac{\pi}{2}$. I hvarje fall närmar sig således den genom punkterna P_0 och P gående sekanten, då man låter punkten P längs kurvan rycka mot P_0 och slutligen sammanfalla med denna punkt, ett bestämdt gränsläge, nämligen den genom punkten P_0 gående räta linie hvars riktningsvinkel α bestämmes genom likheten (18). Denna räta linie utgör således *tangent* till kurvan i punkten P_0, och vi hafva härmed erhållit följande resultat:

Om funktionen $f(x)$ för $x = x_0$ har en derivata, $f'(x_0)$, har kurvan $y = f(x)$ i motsvarande punkt en tangent, och dennas vinkelkoefficient är $= f'(x_0)$.

Om speciellt $f'(x_0) = 0$, är kurvans tangent i punkten P_0 parallell med x-axeln. Är åter $f'(x_0) = +\infty$, har man

$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ och den betraktade tangenten är således parallell med y-axeln.

Antaga vi omvändt att kurvan $y = f(x)$ har en tangent i punkten P_0, kunna vi sluta att funktionen $f(x)$ har en derivata för $x = x_0$ och att dennas värde är lika med tangentens vinkelkoefficient. Ty vårt antagande innebär, om med α och α' åter betecknas de vinklar tangenten och sekanten bilda med x-axeln, att α' konvergerar mot α då Δx försvinner, hvaraf följer $\lim \operatorname{tang} \alpha' = \operatorname{tang} \alpha$ och således, enligt (17),

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tang} \alpha,$$

eller slutligen $f'(x_0) = \operatorname{tang} \alpha$.

Den geometriska uppgiften att bestämma tangenten till en kurva är således ekvivalent med den analytiska uppgiften att bestämma derivatan af den funktion som representerar kurvans ordinata.

Om funktionen $f(x)$ för $x = x_0$ har en högerderivata men ingen vensterderivata (jmf. s. 241), närmar sig sekanten P_0P ett gränsläge om punkten P väljes till höger om P_0 och från denna sida närmar sig P_0, däremot icke om P närmar sig P_0 från den venstra sidan. Af de två från punkten P_0 utgående kurvgrenarna har således endast den till höger en tangent i nämnda punkt. Förhållandet är omvändt om $f(x)$ för $x = x_0$ endast har en vensterderivata. Om slutligen $f(x)$ för $x = x_0$ har såväl en höger- som en vensterderivata men dessas värden äro olika, har hvardera af de från P_0 utgående kurvgrenarna en tangent i denna punkt, men dessa tangenter sammanfalla icke. Exempelvis representeras den s. 241 betraktade funktionen $f(x) = |x|$ geometriskt af en bruten linie, sammansatt af de från origo utgående strålar hvilka halfvera de två första axelvinklarna och med hvarandra bilda en rät vinkel.

Vi antaga åter att $f(x)$ har en bestämd derivata för $x = x_0$, och sätta för korthetens skull $f(x_0) = y_0$. Då blir *ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten x_0, y_0:*

(19) $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Den räta linie som står vinkelrätt mot tangenten i tangeringspunkten kallas kurvans *normal* i denna punkt. Man erhåller såsom *ekvation för normalen till kurvan* $y=f(x)$ *i punkten* x_0, y_0:

$$(20) \qquad y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Vi skola ännu beräkna längderna af de stycken af tangenten och normalen som falla mellan tangeringspunkten och x-axeln, samt dessa styckens projektioner på x-axeln, hvilka benämnas *subtangenten* och *subnormalen*. Enligt närstående figur, där TP_0 och NP_0 utgöra kurvans tangent och normal i punkten P_0, erhållas nämnda sträckors längder omedelbart ur trianglarna ATP_0 och AP_0N, då man observerar att i den förra triangeln vinkeln vid T, i den senare vinkeln vid P_0 är lika med tangentens riktningsvinkel α. Enligt (18) är

$$\operatorname{tang}\alpha=f'(x_0),\quad \sin\alpha=\frac{f'(x_0)}{\sqrt{1+(f'(x_0))^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x_0))^2}},$$

och man finner sålunda:

$$\text{tangenten } TP_0=\left|\frac{y_0}{\sin\alpha}\right|=\left|\frac{y_0\sqrt{1+(f'(x_0))^2}}{f'(x_0)}\right|,$$

$$\text{normalen } NP_0=\left|\frac{y_0}{\cos\alpha}\right|=\left|y_0\sqrt{1+(f'(x_0))^2}\right|,$$

$$\text{subtangenten } TA=\left|\frac{y_0}{\operatorname{tang}\alpha}\right|=\left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|,$$

$$\text{subnormalen } NA=|y_0\operatorname{tang}\alpha|=|y_0f'(x_0)|.$$

Öfningsuppgifter:

1) Undersök kurvorna $y=\sin x$ och $y=\operatorname{tang}x$ med afseende å tangentens riktning.

2) Sök ekvationerna för tangenten och normalen till parabeln $y=x^2$ i punkten $x=2, y=4$, och beräkna längderna af de ofvan betraktade sträckorna.

Bestäm härefter ett sådant tal δ att nämnda tangent, med sekanten genom tangeringspunkten och en godtycklig punkt af kurvan hvars abskissa faller inom intervallen $(2-\delta, 2+\delta)$, bildar en vinkel som är mindre än 1°.

3) Under hvilken vinkel[1]) skär parabeln $y=x^2$ räta linien $y=4x$?

4) Beräkna storleken af de vinklar under hvilka kurvan $y=e^x$ skär de räta linierna $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$. Sök vidare längden af kurvans subtangent, och angif med stöd häraf huru dess tangent geometriskt kan konstrueras.

45. **Derivatan af en summa, en produkt, en kvot.** — Ur de i n⁰ 43 vunna resultaten kunna samtliga elementära funktioners derivator härledas. Härtill erfordras vissa allmänna *differentiationsregler*, hvilka vi nu gå att uppställa. Vi antaga om de i det följande uppträdande funktionerna en gång för alla att de för det betraktade argumentvärdet äro kontinuerliga och hafva en bestämd, ändlig derivata.

1⁰. *Om faktorn C är en konstant, har man*

$$D(Cu(x)) = C\,Du(x). \tag{21}$$

Differenskvoten

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

antar nämligen för funktionen $Cu(x)$ formen

$$\frac{Cu(x+\Delta x)-Cu(x)}{\Delta x} = C\,\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$

och närmar sig således, enligt satsen $(6)'$ s. 202, gränsvärdet $C\,Du(x)$ då Δx försvinner.

Ofvanstående regel ger oss exempelvis

$$D(-3x^2) = -3\,D(x^2) = -6x.$$

2⁰. *Derivatan af en summa af ett ändligt antal termer är lika med summan af termernas derivator.*

---

[1]) Med „den vinkel under hvilken tvenne linier skära hvarandra“ förstås vinkeln mellan liniernas tangenter i deras skärningspunkt.

Sätta vi $f(x) = u(x) + v(x)$, antar kvoten (3) formen

$$\frac{(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Dess gränsvärde för $\Delta x = 0$ är således $= Du(x) + Dv(x)$, hvaraf följer, om vi förenkla beteckningen,

(22) $$D(u+v) = Du + Dv.$$

Beviset är detsamma för en summa af ett godtyckligt antal termer.

Såsom ett specialfall af denna regel erhålles, om C är konstant,

(22)' $$D(f(x) + C) = Df(x).$$

Två funktioner hvilkas skillnad är konstant hafva således samma derivata. Geometriskt innebär detta att kurvorna $y = f(x)$ och $y = f(x) + C$ i tvenne punkter med samma abskissa hafva parallella tangenter, hvilket äfven öfverensstämmer med åskådningen, då ju den ena kurvan öfvergår i den andra genom en förskjutning parallellt med y-axeln.

Genom kombination af reglerna (21) och (22) erhålla vi *derivatan af en skillnad:*

(23) $$D(u-v) = D(u) + D(-v) = D(u) - D(v).$$

På samma sätt erhålles (jmf. (5)) *derivatan af ett allmänt polynom:*

(24) $$D(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n)$$
$$= n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

3°. *Derivatan af en produkt af två funktioner, $u = u(x)$ och $v = v(x)$, erhålles ur formeln*

(25) $$D(uv) = uD(v) + vD(u),$$

och är således lika med produkten af den första faktorn och den andras derivata, ökad med produkten af den andra faktorn och den förstas derivata.

Differenskvoten

$$\frac{u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x)-u(x)\,v(x)}{\Delta x}$$

antar nämligen, då man från den första termen i täljaren subtraherar och till den andra adderar $u(x+\Delta x)\,v(x)$, formen

$$u(x+\Delta x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+v(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$

hvarur framgår att densamma närmar sig gränsvärdet

$$u(x)\,Dv(x)+v(x)\,Du(x)$$

då Δx försvinner (jmf. satserna s. 202).

Enligt (25) erhålles t. ex.

$$D(x^2\sin x)=x^2 D\sin x+\sin x\, D(x^2)=x^2\cos x+2x\sin x.$$

Om vi antaga att u och v äro olika 0 för det betraktade argumentvärdet och dividera likheten (25) med uv, antar den formen

(26) $$\frac{D(uv)}{uv}=\frac{Du}{u}+\frac{Dv}{v}.$$

Allmännare erhålles, om enhvar af funktionerna u_1, $u_2,\ldots,u_n$ är olika 0 för det gifna argumentvärdet,

(26)′ $$\frac{D(u_1u_2\ldots u_n)}{u_1u_2\ldots u_n}=\frac{Du_1}{u_1}+\frac{Du_2}{u_2}+\cdots+\frac{Du_n}{u_n}.$$

Denna likhet följer ur (26) medels fullständig induktion, och bör läsaren själf utföra beviset.

Genom multiplikation med $u_1u_2\ldots u_n$, ger oss (26)′ formeln

(25)′ $$D(u_1u_2\ldots u_n)=u_2u_3\ldots u_nDu_1+u_1u_3\ldots u_nDu_2 + \cdots\cdots+u_1u_2\ldots u_{n-1}Du_n,$$

hvilken kan utsägas som följer:

Derivatan af en produkt af ett ändligt antal faktorer bil-

das sålunda, att hvarje faktors derivata multipliceras med produkten af de öfriga faktorerna och alla sålunda erhållna uttryck adderas.

Sätta vi speciellt $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u(x)$, erhålla vi ur (25)′:

$$(25)'' \qquad D(u(x)^n) = n(u(x))^{n-1} Du(x).$$

Reglerna (25)′ och (25)″ gifva oss t. ex.

$$D(e^x x \log x) = x \log x \, D e^x + e^x \log x \, D x + e^x x \, D \log x$$

$$= e^x x \log x + e^x \log x + e^x = e^x (x \log x + \log x + 1).$$

$$D(\sin^3 x) = 3 \sin^2 x \, D \sin x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

4°. *Derivatan af en kvot af två funktioner,* $u = u(x)$ *och* $v = v(x)$, *bildas enligt formeln*

$$(27) \qquad D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,Du - u\,Dv}{v^2},$$

och är således lika med produkten af nämnaren och täljarens derivata minskad med produkten af täljaren och nämnarens derivata, det hela divideradt med nämnarens kvadrat.

Härvid förutsättes $v(x) \neq 0$ för det betraktade argumentvärdet.

Differenskvoten (3) antar för $\frac{u(x)}{v(x)}$ formen

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{u(x+\Delta x)\,v(x) - v(x+\Delta x)\,u(x)}{v(x)\,v(x+\Delta x)}.$$

Om i det sista bråkets täljare från den första termen subtraheras och till den andra adderas $u(x)\,v(x)$, öfvergår hela uttrycket i följande:

$$\frac{1}{v(x)\,v(x+\Delta x)}\left\{v(x)\,\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x)\,\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right\},$$

hvarur framgår, enligt satserna s. 202, att differenskvotens gränsvärde för $\Delta x = 0$ är lika med högra membrum af (27).

Om täljaren u har ett konstant värde C, reducerar sig formeln (27) till följande:

$$(27)' \qquad D\left(\frac{C}{v(x)}\right) = -\frac{C\,D\,v(x)}{(v(x))^2}.$$

Genom division med $\frac{u}{v}$ antar (27) åter formen

$$(28) \qquad \frac{D\left(\frac{u}{v}\right)}{\frac{u}{v}} = \frac{D\,u}{u} - \frac{D\,v}{v}.$$

Enligt (27) och (27)′ erhålla vi (jmf. s. 246), då $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$,

$$D \operatorname{tang} x = \frac{\cos x\,D \sin x - \sin x\,D \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$D \cot x = -\frac{D \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang}^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tang}^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Då $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, erhålla vi vidare enligt (27)′, om n är ett positivt helt tal,

$$D(x^{-n}) = -\frac{D(x^n)}{x^{2n}} = -\frac{n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\,x^{-n-1}.$$

Likheten (5) s. 244 är således giltig äfven om n är ett negativt helt tal.

Enligt (24) och (27) kunna vi derivera *hvarje rationell funktion*. Exempelvis erhålles:

$$D\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = \frac{(x^2+1)\,D(x-1) - (x-1)\,D(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Öfningsuppgifter:

1) Bilda följande funktioners derivator ($a, b, c, p, q, \ldots$ äro godtyckliga konstanter och n ett positivt helt tal):

$$ax+b,\ x^3+px+q,\ (a+bx^2)(c+dx)^2, (1-x)^n, (1+3x^2)^5;$$

$$\frac{1}{x},\ \frac{a}{bx+c},\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{2}{3x^2+1},\ \frac{ax^2+2bx+c}{a'x^2+2b'x+c'},\ \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^n;$$

$$\frac{\sin x}{x},\ \sin^2 x\cos^3 x,\ \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ \frac{x}{\log x},\ e^{-x},\ e^{-x}x^n.$$

2) Hvilket uttryck erhålles om funktionen $e^x \cos x$ deriveras och den erhållna derivatan ånyo deriveras?

3) Bestäm de punkter af kurvorna

$$y=x^2+px+q,\quad y=x^4-x^2,\quad y=\frac{x^2+3}{x+1},$$

i hvilka tangenten är parallell med x-axeln.

4) Bilda derivatorna af de s. k. *hyperboliska funktionerna*, sinh = sinus hyperbolicus, cosh = cosinus hyperbolicus, tangh = tangens hyperbolica, coth = cotangens hyperbolica, hvilka representeras af uttrycken:

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \operatorname{tangh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad \coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Undersök tillika de relationer som äga rum mellan dessa funktioner, samt förloppet af motsvarande kurvor.

46. Derivatan af en gifven funktions inversa funktion. — Vi antaga att funktionen $f(x)$ inom en viss intervall (a, b) är kontinuerlig och ständigt varierar i samma riktning, från värdet $f(a)=A$ till värdet $f(b)=B$. Mot hvarje värde y mellan A och B svarar då ett och endast ett värde x inom intervallen (a, b) som satisfierar ekvationen $y=f(x)$. Detta värde x utgör sålunda en funktion af y, $x=\varphi(y)$, som är entydigt definierad inom intervallen (A, B), och hvilken utgör en gren af den *inversa* funktionen till $f(x)$ (jmf n⁰ 14, s. 90).

Vi välja inom intervallen (A, B) tvenne värden, y och $y+\Delta y$, och beteckna med x och $x+\Delta x$ motsvarande värden af funktionen φ:

$$x=\varphi(y),\quad x+\Delta x=\varphi(y+\Delta y).$$

Enligt den inversa funktionens definition är då omvändt

$$y = f(x),\quad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

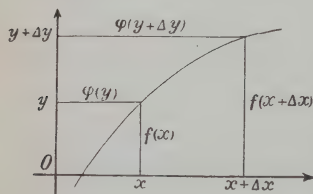
Ur dessa likheter följer

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y),\quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

och förhållandet mellan den inversa funktionens tillväxt och argumentets tillväxt kan således skrifvas under formen:

$$\frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Vi låta nu Δy närma sig 0. På grund af den inversa funktionens kontinuitet (jmf. s. 91) försvinner då äfven Δx, och det sista af de ofvanstående uttrycken närmar sig således gränsvärdet $\frac{1}{f'(x)}$, om vi nämligen förutsätta att funktionen $f(x)$ för det betraktade argumentvärdet x har en bestämd, från 0 skild derivata. Under denna förutsättning är således



$$\lim_{\Delta y = 0} \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x)},$$

alltså

(29) $$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

eller, med annan beteckning,

(29)′ $$D_y x = \frac{1}{D_x y}.$$

Den inversa funktionens derivata är således lika med det inversa värdet af den gifna funktionens derivata.

För att erhålla $\varphi'(y)$ uttryckt i variabeln y, har man ännu att i högra membrum af (29) substituera $x = \varphi(y)$.

Den erhållna regeln ger oss derivatorna af flere nya funktioner. Vi betrakta först potensen

$$y = x^{\frac{1}{n}},$$

där n är ett positivt helt tal. Denna har (s. 92) definierats såsom invers funktion till $x = y^n$. Sistnämnda funktions derivata är

$$D_y x = n y^{n-1},$$

och enligt (29)′ är således

$$D_x y = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n}$$

eller slutligen

$$(30) \qquad D\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Speciellt erhålles för $n = 2$ och $n = 3$:

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Enligt (30) och (25)″ kunna vi nu äfven bilda derivatan af potensen $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, där m och n beteckna godtyckliga positiva hela tal; vi erhålla

$$D\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot D\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = m x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

eller

$$D\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Härur erhålles åter, enligt (27)′, för derivatan af potensen $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ uttrycket

$$D\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{D\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1-\frac{2m}{n}} = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1}.$$

Alltså hafva vi visat att *formeln*

$$D(x^{\mu}) = \mu x^{\mu - 1}$$

gäller för hvarje rationellt värde af exponenten μ.

Vi gå till de cyclometriska funktionerna, och betrakta först funktionen $y = \text{arc tang}\, x$, hvilken utgör invers funktion till $x = \text{tang}\, y$. Då dess olika grenar skilja sig från hvarandra med mångfalder af π (jmf. s. 97), hafva de alla samma derivata, och vi kunna inskränka oss till att betrakta t. ex. hufvudgrenen.

Enligt hvad tidigare visats, är

$$D_y x = D\, \text{tang}\, y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tang}^2 y = 1 + x^2.$$

$D_x y$ utgör det reciproka värdet af detta uttryck, och vi erhålla således (jmf. uppgiften (2) s. 250):

(31) $$D\, \text{arc tang}\, x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ur likheten $\cot x = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ följer att hufvudgrenarna af funktionerna $\text{arc tang}\, x$ och $\text{arc cot}\, x$ äro bundna genom relationen (jmf. s. 96—97)

$$\text{arc cot}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, x.$$

Alltså erhålles

(32) $$D\, \text{arc cot}\, x = -\frac{1}{1 + x^2},$$

hvilken formel är giltig för alla grenar af $\text{arc cot}\, x$, då dessa skilja sig från hvarandra endast med multipler af π.

Vi betrakta nu funktionen $\text{arc sin}\, x$ och först dess hufvudgren, $y = \overline{\text{arc sin}\, x}$, hvars värde tillhör intervallen $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (jmf. s. 93—95). Dess inversa funktion är $x = \sin y$ och dennas derivata är

$$D_y x = D \sin y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

där man har att taga det positiva värdet af kvadratroten emedan $\cos y > 0$ för $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Enligt (29)' är således[1])

$$(33) \qquad D\,\overline{\operatorname{arc}\sin x} = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De olika grenarna af $\operatorname{arc}\sin x$ sönderfalla i följande tvenne serier (jmf. s. 95):

$$\begin{aligned} &\overline{\operatorname{arc}\sin x} + n.2\pi, \\ & \qquad\qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ \pi - &\overline{\operatorname{arc}\sin x} + n.2\pi. \end{aligned}$$

Enligt (33) är derivatan af hvarje gren i den förra serien lika med $+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, derivatan af hvarje gren i den senare serien lika med $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (jmf. figuren s. 94).

På grund af likheten $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ äro hufvudgrenarna af funktionerna $\operatorname{arc}\sin x$ och $\operatorname{arc}\cos x$ bundna genom relationen

$$\overline{\operatorname{arc}\cos x} = \frac{\pi}{2} - \overline{\operatorname{arc}\sin x}.$$

Enligt (33) erhålles således

$$(34) \qquad D\,\overline{\operatorname{arc}\cos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De olika grenarna af $\operatorname{arc}\cos x$ fördela sig på serierna

$$\begin{aligned} &\overline{\operatorname{arc}\cos x} + n.2\pi, \\ & \qquad\qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ - &\overline{\operatorname{arc}\cos x} + n.2\pi. \end{aligned}$$

Derivatan af hvarje gren i den förra serien är $= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, derivatan af hvarje gren i den senare serien $= +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

[1]) Att derivatan af $\overline{\operatorname{arc}\sin x}$ bör få ett positivt värde inses jämväl däraf att denna funktion ökas samtidigt med x (jmf. satsen s. 242).

Öfningsuppgifter:

1) Härled derivatan af $\log_a x$ enligt regeln för den inversa funktionens derivering.

2) Undersök de hyperboliska funktionernas inversa funktioner och bilda dessas derivator (jmf. uppgiften (4) s. 259).

47. **Derivatan af en sammansatt funktion.** — Vi betrakta en funktion u af en variabel y, hvilken i sin tur är funktion af variabeln x:

$$u = f(y), \quad y = \varphi(x);$$

u är då en *sammansatt funktion* af x (jmf. s. 54—56):

$$u = f(\varphi(x)).$$

Vi antaga att funktionen $\varphi(x)$ är kontinuerlig och har en derivata för det betraktade argumentvärdet x, samt att funktionen $f(y)$ för det mot x svarande värdet $y = \varphi(x)$ likaledes är kontinuerlig och har en derivata.

Vi gifva åt argumentet tillväxten Δx, beteckna det mot $x + \Delta x$ svarande värdet af funktionen φ med $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x), \quad \Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x),$$

samt det häremot svarande värdet af funktionen f med $u + \Delta u$:

$$u + \Delta u = f(y + \Delta y), \quad \Delta u = f(y + \Delta y) - f(y).$$

Mot tillväxten Δx af argumentet svarar då tillväxten Δu af den sammansatta funktionen, och förhållandet mellan Δu och Δx kan skrifvas under formen

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Då Δx närmar sig 0 försvinner jämväl Δy, emedan funktionen φ antogs kontinuerlig. Högra membrum i ofvanstående likhet närmar sig härvid gränsvärdet $f'(y) . \varphi'(x)$ (jmf. satsen (9)′ s. 202), och vi erhålla således

$$(35) \qquad D f(\varphi(x)) = f'(y)\, \varphi'(x),$$

eller, med annan beteckning,

$$(35)' \qquad D_x u = D_y u \,.\, D_x y \,.$$

För att erhålla derivatan uttryckt i variabeln x, har man ännu att i det funna uttrycket substituera $y = \varphi(x)$.

Vårt resultat kan formuleras som följer:

Om u är en sammansatt funktion af x, sålunda att u beror af en variabel y som i sin tur är funktion af x, är derivatan af u med afseende å x lika med produkten af derivatan af u med afseende å y och derivatan af y med afseende å x.

Vi tillämpa denna regel på funktionen $\sin ax$, där a är en konstant. Sätta vi $ax = y$, antar densamma formen $\sin y$, och vi erhålla således

$$D_x \sin ax = D_y \sin y \,.\, D_x y = \cos y \,.\, D(ax) = a \cos y \,,$$

eller slutligen, då vi åter insätta $y = ax$,

$$D_x \sin ax = a \cos ax \,.$$

Vi betrakta vidare funktionen $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Om vi sätta $1 - x^2 = y$, antar den formen $\frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$, hvaraf enligt vår regel följer:

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = D_y\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) D_x y = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x y^{-\frac{3}{2}},$$

eller slutligen

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Låtom oss ännu söka derivatan af uttrycket $e^{f(x)}$, då funktionen $f(x)$ själf antages hafva en derivata. Vi sätta $f(x) = y$, och erhålla då:

$$D\left(e^{f(x)}\right) = D_y\left(e^y\right) . D_x y = e^y f'(x) \,,$$

eller

$$(36) \qquad D\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} f'(x) \,,$$

en formel som ofta kommer till användning. Densamma ger oss omedelbart derivatan af potensen x^{μ}, exponenten må vara hvilket reellt tal som helst (jmf. s. 100). Man har nämligen $x = e^{\log x}$, hvaraf

$$x^{\mu} = (e^{\log x})^{\mu} = e^{\mu \log x},$$

och erhåller således enligt (36)

$$D(x^{\mu}) = e^{\mu \log x} D(\mu \log x) = x^{\mu} \cdot \frac{\mu}{x}$$

eller

$$D(x^{\mu}) = \mu x^{\mu - 1}.$$

Denna formel är således giltig för hvarje reellt värde μ.

Vi söka slutligen *den logaritmiska derivatan* af funktionen $f(x)$, d. v. s. derivatan $D_x \log f(x)$. Om vi åter sätta $f(x) = y$, följer ur ofvanstående regel

$$D \log f(x) = D_y \log y \,.\, D_x y = \frac{1}{y} \cdot f'(x)$$

eller

(37) $$D \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Denna formel ger oss t. ex.

$$D \log (\log x) = \frac{D \log x}{\log x} = \frac{1}{x \log x}.$$

Vi sammanställa här några af de i detta kapitel erhållna resultaten:

$$D(x^{\mu}) = \mu x^{\mu - 1}, \text{ (för hvarje reellt värde } \mu),$$

$$D \sin x = \cos x,$$

$$D \cos x = - \sin x,$$

$$D \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$D \cot x = - \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$D \operatorname{arc} \sin x = + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$D \operatorname{arc} \cos x = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$D \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$D \operatorname{arc} \cot x = - \frac{1}{1+x^2},$$

$$D(a^x) = a^x \log a,$$

$$D(e^x) = e^x,$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x \log a},$$

$$D \log x = \frac{1}{x},$$

$$D(e^{f(x)}) = e^{f(x)} f'(x),$$

$$D \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Öfningsuppgifter:

1) Bilda följande funktioners derivator (a, k, n äro konstanter):

a) $x\sqrt[3]{2x}$, $\sqrt{1-2ax+x^2}$, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt[n]{\frac{x-a}{x+a}}$, $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

b) e^{-kx^2}, $\log(ax+b)$, $\log(x+\sqrt{1+x^2})$, $\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$;

c) $\sin(x^2)$, $\cos(n \log x)$, $\log \sin nx$, $e^{-kx} \sin nx$;

d) $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}$, $\operatorname{arc} \cos \frac{x+1}{3}$, $\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{2x+1}{5}$, $\operatorname{arc} \cot \frac{a}{x}$;

e) x^x, $e^{e^{x^2}}$, $\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\log \frac{e^x}{1+e^x}$, $\log(\log(\log x))$.

2) Bilda derivatorna af funktionerna

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \quad \log\left(\frac{1}{x}\right), \quad \operatorname{arc} \sin(\cos x),$$

a) enligt regeln för sammansatta funktioners derivering, *b*) genom att först förenkla funktionernas uttryck.

3) Bilda den logaritmiska derivatan af en kvot af två funktioner samt af en produkt af ett ändligt antal funktioner.

4) Bilda derivatorna af funktionerna $x \sin \frac{1}{x}$ och $x^2 \sin \frac{1}{x}$, samt undersök huru de förhålla sig då x närmar sig 0 (jmf. uppgiften (5) s. 243).

5) Undersök formen af *kedjelinien*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

bestäm dess tangent och normal, samt beräkna längderna af de s. 253 betraktade sträckorna.

6) Bevisa att parablerna

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \text{ och } y^2 = 2q\left(\frac{q}{2} - x\right)$$

skära hvarandra under en rät vinkel, p och q må hafva hvilka positiva värden som helst.

48. **Implicita funktioners derivering.** — Om två variabla kvantiteter x och y äro bundna genom en relation

(38) $$f(x, y) = 0,$$

utgör den ena af dem i allmänhet en funktion af den andra. En på detta sätt definierad funktion benämnes en outvecklad eller *implicit* funktion. För att erhålla dess *explicita* uttryck, har man att upplösa relationen (38) med afseende å den betraktade variabeln, förutsatt att en sådan upplösning öfverhufvud är möjlig.

Vi kunna här icke ingå på den allmänna teorin för implicita funktioner, utan vilja direkt *antaga* att det existerar en funktion y af x:

$$y = y(x),$$

som inom en viss intervall är entydig och kontinuerlig och satisfierar ekvationen (38), så att man för hvarje värde x inom denna intervall har

(39) $$f(x, y(x)) = 0.$$

Vidare antaga vi att funktionen $y(x)$ inom ifrågavarande intervall har en derivata $D_x y$.

För att bilda denna derivata kunna vi förfara på följande sätt. Vi derivera uttrycket $f(x, y)$, i hvilket vi för y tänka oss insatt funktionen $y(x)$. Den erhållna derivatan har, på grund af (39), värdet 0 för hvarje argumentvärde x inom den betraktade intervallen. Detta ger oss en likhet, ur hvilken den implicita funktionens derivata erhålles uttryckt genom x och y:

$$D_x y = \varphi(x, y), \tag{40}$$

och man kan sålunda beräkna $D_x y$ för ett gifvet värde x, sedan man först bestämt motsvarande värde y af den implicita funktionen. För att erhålla ifrågavarande derivatas explicita uttryck i variabeln x, har man att i högra membrum af (40) substituera $y = y(x)$.

Detta förfaringssätt är i regel enklare än att bilda det explicita uttrycket för funktionen y och derivera detta.

Såsom exempel betrakta vi den genom relationen

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{41}$$

definierade funktionen y af variabeln x. I detta fall kunna vi omedelbart angifva funktionens explicita uttryck:

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2},$$

och derivera detta uttryck, hvarvid erhålles

$$D_x y = \mp \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Men vi kunna äfven, enligt den ofvan angifna metoden, förfara på följande sätt. Om i uttrycket $x^2 + y^2$ för y insättes en bestämd gren af den implicita funktionen, reducerar sig detta uttryck till konstanten R^2. Dess derivata är således identiskt 0:

$$D(x^2 + y^2) = 2x + 2y\, D_x y = 0,$$

och härur erhålles för den implicita funktionens derivata uttrycket

$$(42) \qquad D_x y = -\frac{x}{y}.$$

Substituera vi för y dess explicita uttryck $\pm\sqrt{R^2 - x^2}$, återfinna vi det tidigare erhållna resultatet.

Om x_0, y_0 äro koordinaterna för en punkt P_0 af den genom ekvationen (41) definierade cirkeln, så att y_0 utgör det mot x_0 svarande värdet af en viss gren af den implicita funktionen, har enligt (42) denna grens derivata för $x = x_0$ värdet $-\frac{x_0}{y_0}$, och ekvationen för cirkelns tangent i punkten P_0 blir således

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

hvilken ekvation kan skrifvas $x x_0 + y y_0 = x_0^2 + y_0^2$, eller ännu, då enligt (41) $x_0^2 + y_0^2 = R^2$,

$$x x_0 + y y_0 = R^2.$$

Öfningsuppgifter:

1) Bestäm medels ofvan angifna förfarande ekvationen för tangenten till enhvar af följande kurvor i en gifven punkt x_0, y_0 af kurvan, och bringa denna ekvation under så enkel form som möjligt:

a) parabeln $y^2 = 2px$;

b) ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

c) hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

d) en allmän konisk sektion

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

e) den s. k. *astroiden* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, hvars form tillika bör undersökas.

2) Bestäm tangenterna till kurvan $y^3 - 3y + x = 0$ i de punkter där den skär y-axeln.

49. **Ekvationen för en kurva i parameterform.** — Vid behandling af kurvor hafva vi i det föregående antagit de-

ras ekvationer gifna under formen $y = f(x)$ eller under formen $f(x, y) = 0$. Undersökningen af en kurva ställer sig emellertid i flere fall enklare om man uttrycker koordinaterna x, y för en punkt af densamma såsom funktioner af en lämpligt vald hjälpvariabel eller *parameter:*

(43) $$x = x(t),\ y = y(t).$$

Man säger då att kurvans ekvation är gifven *i parameterform.*

För cirkeln (41) kunna vi välja till parameter exempelvis den polära vinkeln φ, d. v. s. vinkeln mellan radiusvektor och den positiva x-axeln. Koordinaterna för den mot parametervärdet φ svarande punkten af cirkeln äro

(44) $$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi.$$

Då φ växer från 0 till 2π, beskrifver denna punkt cirkellinien ett hvarf i positiv riktning, började från punkten $x = R, y = 0$.

Om man i stället för φ väljer till parameter kvantiteten $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, erhålles

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

och cirkelns ekvation framträder således under formen

(44)′ $$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}R,\ y = \frac{2Rt}{1+t^2}.$$

Då parametern t växer från $-\infty$ till $+\infty$, hvarvid vinkeln $\frac{\varphi}{2} = \operatorname{arc\,tang} t$ växer från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$ och vinkeln φ således från $-\pi$ till $+\pi$, beskrifver punkten x, y cirkelns periferi ett hvarf i positiv riktning, började från punkten $x = -R$, $y = 0$.

Vi betrakta nu allmänt en kurva hvars ekvation är gifven i formen (43), välja på densamma tvenne punkter, P_0 och P, samt draga genom dessa en sekant. Betecknas de mot nämnda punkter svarande värdena af parametern med t_0 och t, äro punkternas koordinater $x(t_0)$, $y(t_0)$ resp. $x(t)$, $y(t)$, och vinkelkoefficienten för sekanten är lika med

$$\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} = \frac{\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}{\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}}.$$

Vi antaga att funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ båda äro kontinuerliga och hafva en bestämd ändlig derivata för $t=t_0$. Om vi låta t närma sig t_0, hvarvid punkten P längs kurvan rycker mot punkten P_0, närmar sig då, i det senare uttrycket för sekantens vinkelkoefficient, täljaren gränsvärdet $y'(t_0)$ och nämnaren gränsvärdet $x'(t_0)$. Om $x'(t_0) \neq 0$, närmar sig således kvoten det ändliga gränsvärdet $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$, är $x'(t_0)=0$ men $y'(t_0) \neq 0$ växer kvotens numeriska värde mot ∞, hvaremot, om samtidigt $x'(t_0)=0$ och $y'(t_0)=0$, ingen allmän slutsats kan dragas beträffande kvotens gränsvärde. Alltså:

Om $x'(t_0)$ och $y'(t_0)$ icke samtidigt äro noll, har kurvan (43) i punkten P_0 en bestämd tangent, och dennas vinkelkoefficient är lika med $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

Samma resultat erhålles om vi tänka oss parametern t *eliminerad* mellan likheterna (43) och kurvans ekvation framställd under formen $y=f(x)$.

Denna elimination är möjlig (åtminstone teoretiskt) om funktionen $x(t)$ varierar i samma riktning inom en viss intervall kring värdet t_0. Ty likheten $x=x(t)$ definierar då omvändt t såsom en funktion af x:

$$t=t(x),$$

och om vi tänka oss denna funktion $t(x)$ insatt i stället för t i funktionen $y(t)$, öfvergår denna i en funktion af x hvilken

representerar kurvans ordinata i en viss omgifning af punkten P_0.

Enligt n⁰ 46 har nu derivatan af funktionen $t(x)$ för $x=x_0$ värdet $\frac{1}{x'(t_0)}$, och regeln för derivering af en sammansatt funktion ger oss således

$$[D_x y]_{x=x_0} = [D_t y \,.\, D_x t]_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)},$$

hvilket öfverensstämmer med det tidigare erhållna resultatet.

Exempelvis erhåller vinkelkoefficienten för tangenten till cirkeln $x^2+y^2=R^2$ i en gifven punkt x, y enligt (44) uttrycket

$$\frac{D_\varphi y}{D_\varphi x} = \frac{R\cos\varphi}{-R\sin\varphi} = -\cot\varphi,$$

och enligt (44)′ uttrycket

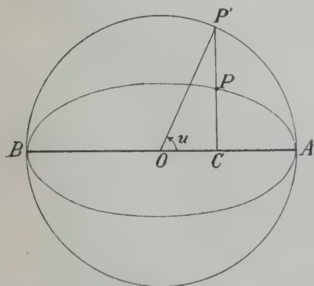
$$\frac{D_t y}{D_t x} = \frac{2R(1-t^2)}{(1+t^2)^2} : -\frac{4Rt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1-t^2}{2t}.$$

Man konstaterar omedelbart att båda uttrycken äro $= -\frac{x}{y}$.

Vi betrakta ännu ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

och införa såsom parameter den s. k. *excentriska anomalin*, hvilken erhålles genom följande konstruktion. Vi upprita en cirkel med ellipsens större axel AB såsom diameter, draga i denna cirkel en radie OP', och fälla från P' en perpendikel mot AB. Vinkeln $u = AOP'$ utgör då den excentriska anomalin för den punkt P i hvilken denna perpendikel råkar ellipsen. Då u växer från 0 till 2π, beskrifver punkten P, utgående från A, ellipsens periferi ett hvarf i positiv riktning.



Om koordinaterna för punkten P betecknas med x, y, erhålles ur figuren omedelbart $x = OC = OP' \cos u = a \cos u$, samt vidare, med stöd af en känd egenskap hos ellipsen, $y = CP = \frac{b}{a} CP' = b \sin u$. Ellipsens ekvation antar således, då vi välja u till parameter, följande enkla form:

(45) $$x = a \cos u, \; y = b \sin u,$$

och härur erhålles såsom vinkelkoefficient för ellipsens tangent i punkten P:

$$\frac{D_u y}{D_u x} = \frac{b \cos u}{-a \sin u} = -\frac{b}{a} \cot u,$$

hvilket uttryck öfverensstämmer med $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

Öfningsuppgifter:

1) Undersök tangenten och normalen till cycloiden[1]), hvars ekvation i parameterform är

$$x = a(\omega - \sin \omega), \; y = a(1 - \cos \omega).$$

2) Hvilken form antar ekvationen för hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a) om kurvan skäres medels en parallell till dess ena asymptot och till parameter väljes ordinatan för skärningspunkten mellan denna parallell och y-axeln;

b) om kurvan skäres medels en från punkten $x = -a$, $y = 0$ utgående stråle och dennas vinkelkoefficient väljes till parameter?

Härled i hvartdera fallet uttrycket för tangentens vinkelkoefficient.

3) Ekvationen för en kurva är gifven i polära koordinater:

$$r = r(\varphi).$$

Bestäm tangentens vinkelkoefficient, genom att uttrycka de rätvinkliga koordinaterna för en punkt på kurvan såsom funktioner af parametern φ. Beräkna härefter tang Θ, där Θ betecknar vinkeln mellan tangenten och förlängningen af radius-vector utöfver tangeringspunkten.

---

[1]) Jmf. L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, tionde kapitlet.

50. **Leibniz' beteckningssätt.** — Vi återgå än en gång till derivatans definition för att belysa den från en ny sida.

Om funktionen $f(x)$ för ett gifvet argumentvärde x har en ändlig derivata, $f'(x)$, innebär detta, enligt definitionen s. 239, att skillnaden

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)$$

försvinner samtidigt med Δx, d. v. s. till sitt numeriska värde kan göras mindre än hvilket föreskrifvet positivt tal som helst genom att $|\Delta x|$ göres tillräckligt litet. Om vi allmänt med $[\Delta x]$ beteckna en kvantitet som besitter denna egenskap, kunna vi således skrifva

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=[\Delta x],$$

hvarur för funktionens tillväxt $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ erhålles uttrycket

(46) $$\Delta f=f'(x)\,\Delta x+\Delta x\,[\Delta x].$$

Alltså:

Om derivatan $f'(x)$ existerar och har ett ändligt värde, kan tillväxten af funktionen $f(x)$ sönderdelas i tvenne delar af väsentligen olika karaktär:

Den ena delen, $f'(x)\,\Delta x$, är proportionell mot variabelns tillväxt Δx, d. v. s. lika med denna tillväxt multiplicerad med en af densamma oberoende koefficient, hvilken just utgöres af derivatan $f'(x)$.

Den andra delens, $\Delta x\,[\Delta x]$, förhållande till variabelns tillväxt Δx närmar sig däremot 0 samtidigt med Δx.

Den förra delen, $f'(x)\,\Delta x$, benämnes enligt Leibniz [1])

[1]) Såsom differentialkalkylens grundläggare anses Newton (1642—1727) och Leibniz (1646—1716). Newton's upptäckter inom detta område härröra från tiden 1765—1770, men offentliggjordes först långt senare, i särskilda arbeten bland hvilka främst böra nämnas *Treatises of the species and magnitude of curvilinear figures* (1704) samt *Method of fluxions and infinite series* (1736). Leibniz' första arbete öfver differentialkalkylen bär titeln *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (1684).

Emellertid voro flere af differentialkalkylens begrepp och metoder

funktionens *differentialtillväxt* eller *differential*, och betecknas $df(x)$. Alltså:

Differentialtillväxten eller differentialen af en funktion är lika med produkten af argumentets tillväxt och funktionens derivata, tagen för det betraktade argumentvärdet.

Derivatan har på grund häraf äfven erhållit namnet *differentialkoefficient*. Till åtskillnad från differentialtillväxten benämnes Δf ofta funktionens *fullständiga* tillväxt.

Likheten (46) tillåter en enkel geometrisk tolkning. Vi draga tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt P hvars abskissa är x. Denna tangents ekvation är

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

och dess ordinata för $X = x + \Delta x$ har således värdet $Y = f(x) + f'(x)\Delta x$, hvarur följer $f'(x)\Delta x = Y - f(x)$. Funktionens differentialtillväxt är således identisk med *tillväxten af tangentens ordinata från punkten x till punkten $x + \Delta x$* (i figuren stycket AB). Den andra delen, $\Delta x[\Delta x]$, af funktionens fullständiga tillväxt Δf kan åter sättas under formen

$$\Delta f - f'(x)\Delta x = (f(x + \Delta x) - f(x)) - (Y - f(x))$$
$$= f(x + \Delta x) - Y,$$

och är således lika med *skillnaden mellan kurvans ordinata och tangentens ordinata i punkten $x + \Delta x$* (i figuren stycket BP').

---

redan tidigare kända, och hade användts af särskilda matematiker i undersökningar öfver tangentproblemet samt öfver maxima och minima, ehuru deras idéer ännu icke antagit en precis form och beteckningssättet ännu icke systematiserats. Bland dessa matematiker böra främst nämnas DESCARTES eller CARTESIUS (1596—1650), FERMAT (1601—1665), PASCAL (1623—1662) och HUYGHENS (1629—1695).

Bland matematiker efter NEWTON och LEIBNIZ som bidragit till infinitesimalkalkylens vidare utveckling förtjena att i främsta rummet nämnas EULER (1707—1783), LAGRANGE (1736—1813) och CAUCHY (1789—1857).

Ofvanstående sats om sönderdelningen af en funktions tillväxt låter omvända sig som följer:

Om den tillväxt, Δf, som funktionen $f(x)$ erhåller då argumentet förändras från värdet x till värdet $x + \Delta x$, kan sättas under formen

$$(46)' \qquad \Delta f = k \Delta x + \Delta x [\Delta x],$$

där k är en ändlig, af Δx oberoende koefficient, och $[\Delta x]$ en kvantitet som försvinner samtidigt med Δx, har funktionen $f(x)$ en derivata för det betraktade argumentvärdet x, och denna derivatas värde är $= k$.

Ty likheten (46)' kan skrifvas

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = k + [\Delta x],$$

och härur följer

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = k,$$

hvilken likhet just innebär vårt påstående.

Vi återvända till differentialbeteckningen. Om den betraktade funktionen är identisk med variabeln x, erhålles för dess differential uttrycket $dx = Dx \,.\, \Delta x = \Delta x$, då ju $Dx = 1$. Man kan följaktligen, utan att någon oklarhet därigenom uppstår, beteckna den oberoende variabelns tillväxt med dx i stället för Δx, och erhåller då för differentialen af en funktion $f(x)$ den enhetligare beteckningen

$$(47) \qquad d f(x) = f'(x)\, dx,$$

hvarur följer

$$(47)' \qquad f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}.$$

I enlighet härmed benämnes derivatan äfven *differentialkvot*. Om funktionen kort betecknas med y, erhåller dess derivata beteckningen $\frac{dy}{dx}$.

Med användande af differentialbeteckningen har man t. ex.

$$d(x^n) = n x^{n-1}\, dx,$$

och de öfriga reglerna för funktioners derivering kunna på samma sätt skrifvas såsom differentialformler. Exempelvis erhåller man ur likheterna (25) s. 255 och (27) s. 257, då man multiplicerar dem med dx och använder beteckningen (47), följande formler:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Användningen af differentialer i stället för derivator erbjuder vissa formella fördelar hvilka här böra framhållas.

Om vi beteckna den oberoende variabeln med x, dess tillväxt med dx, den gifna funktionen med y, dess derivata med $D_x y$ och dess differential med dy, är enligt (47)

(48) $$dy = D_x y \,.\, dx.$$

Vi göra nu x till en funktion af en ny variabel t, hvarvid äfven y öfvergår i en funktion af t. *Likheten (48) bibehåller härvid fortfarande sin giltighet, förutsatt att dx och dy tolkas såsom differentialerna af x och y, uppfattade såsom funktioner af t:*

(49) $$dx = D_t x \,.\, dt, \quad dy = D_t y \,.\, dt.$$

Ty enligt regeln för en sammansatt funktions derivering erhålles, då y är funktion af x och x i sin tur beror af t,

$$D_t y = D_x y \,.\, D_t x,$$

eller, om vi multiplicera med dt,

$$D_t y\, dt = D_x y \,.\, (D_t x\, dt),$$

hvilken likhet på grund af (49) kan skrifvas under formen (48).

Speciellt kan man i likheten (48) uppfatta y såsom obe-

roende variabel och x såsom funktion, hvarvid således dy betecknar tillväxten af y och dx differentialen af x:

$$dx = D_y x \,.\, dy\,.$$

Regeln för inversa funktioners derivering ger oss nämligen $D_y x \,.\, D_x y = 1$, hvarur genom multiplikation med dy följer $dy = D_x y \,.\, (D_y x \,.\, dy) = D_x y \,.\, dx$.

Om x och y äro bundna t. ex. genom likheten

$$x = \frac{2y}{1 - y^2},$$

erhålles genom differentiering:

$$dx = \frac{2(1 + y^2)}{(1 - y^2)^2} dy\,.$$

Vi tänka oss härvid först x såsom funktion af y, men resultatet gäller, såsom ofvan visats, äfven om vi uppfatta x såsom oberoende variabel och y såsom funktion, eller om x och y båda uttryckas såsom funktioner af en parameter.

Låtom oss ännu antaga att mellan x och y råder ekvationen

(50) $$x^2 - xy + 2y^2 = 1\,.$$

Denna är af andra graden med afseende å x och y och definierar således hvardera variabeln såsom en tvåtydig funktion af den andra. Tänka vi oss t. ex. y såsom funktion af x, erhålles (jmf. n⁰ 48)

$$D(x^2 - xy + 2y^2) = 2x - y - x\,D_x y + 4y\,D_x y = 0\,,$$

eller, om vi multiplicera med dx och skrifva $D_x y \,.\, dx = dy$,

$$2x\,dx - y\,dx - x\,dy + 4y\,dy = 0\,,$$

eller ännu

$$(2x - y)\,dx - (x - 4y)\,dy = 0\,.$$

Denna likhet, hvilken direkt erhålles då vi differentiera ekvationen (50), bibehåller sin giltighet hvilken kvantitet än väljes till oberoende variabel, blott man alltid tolkar dx och dy såsom differentialerna af x och y, uppfattade såsom funktioner af denna variabel.

Öfningsuppgifter:

1) Sönderdela den fullständiga tillväxten af enhvar af funktionerna

$$x^2 - x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{x+1}{x-1}, \quad \sqrt{x}$$

enligt likheten (46)', och bestäm på denna väg dessa funktioners derivator.

2) Bilda följande funktioners differentialer:

$$(u(x))^{\mu}, \quad e^{u(x)}, \quad \log u(x), \quad f(u(x)).$$

3) Hvilket uttryck erhålles för differentialen af en produkt af ett ändligt antal faktorer?

51. **Det differentialgeometriska betraktelsesättet.** — Vi hafva definierat differentialen af en funktion såsom den del af funktionens tillväxt hvilken är proportionell mot argumentets tillväxt. Under en tidigare period gjorde sig emellertid ett annat betraktelsesätt gällande beträffande differentialerna, i det de af flere matematiker uppfattades såsom *oändligt små kvantiteter*. Man resonerade ungefär på följande sätt:

I högra membrum af likheten (46) blir den senare termen allt mindre i förhållande till den förra då Δx närmar sig 0. Ger man åt Δx *ett oändligt litet värde*, dx, kan den senare termen *negligeras* i jämförelse med den förra. Funktionens tillväxt erhåller härvid själf *ett oändligt litet värde*, och om detta betecknas med df, är således

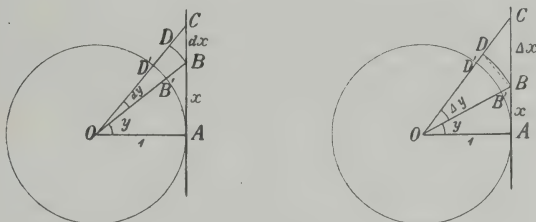
$$df = f'(x)\,dx \quad \text{och} \quad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Detta resonemang rör sig emellertid med begrepp hvilka icke hafva något innehåll. Hvarje gifvet, från 0 skildt värde Δx (här är fråga endast om reella tal) är jämförligt med hvarje annat gifvet värde M, ty man kan alltid finna ett sådant positivt helt tal n att $n\,|\Delta x| > |M|$. Det finnes sålunda intet tal, utom 0, om hvilket kan sägas att det *är oändligt litet* och på denna grund *kan negligeras* i jämförelse med ett annat tal.

Behandlingen af differentialerna såsom oändligt små kvantiteter fortlefver icke dess mindre i Analysen, särskildt

i dess användningar på geometrin och fysiken, och har sin betydelse såsom ett medel att härleda resultaten på en kortare och åskådligare väg, samt att framställa bevisen under en koncentrerad form. Vi skola belysa detta genom några enkla exempel, och tillika visa huru man bör modifiera resonemanget för att ernå full stränghet.

Vi härleda först derivatan af funktionen $y = \operatorname{arc\,tang} x$ genom s. k. *differentialgeometrisk* betraktelse.



Mot argumentvärdet $x = AB$ (se figuren till venster) svarar funktionsvärdet $y = \operatorname{arc} AB'$. Då argumentet får tillväxten $dx = BC$ får funktionen tillväxten $dy = \operatorname{arc} B'D'$. Vi draga cirkelbågen BD med O såsom medelpunkt och OB såsom radie. För ett *oändligt litet* värde dx kan figuren BCD betraktas såsom en rätlinig triangel i hvilken vinkeln vid D är rät och vinkeln vid C lika med vinkeln $OBA = \frac{\pi}{2} - y$. Man erhåller då

$$BD = dx \sin BCD = \cos y \, dx.$$

Å andra sidan erhålles ur figuren

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA}{OB} = \cos y,$$

hvaraf $B'D' = dy = BD \cos y$. Alltså blir

$$dy = \cos^2 y \, . \, dx = \frac{dx}{1 + \operatorname{tang}^2 y} = \frac{dx}{1 + x^2},$$

eller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

För att göra detta resonemang strängt, behöfva vi endast skrifva (se figuren till höger)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arcus } B'D'}{BC} = \frac{\text{arcus } B'D'}{\text{arcus } BD} \cdot \frac{\text{arcus } BD}{\text{kordan } BD} \cdot \frac{\text{kordan } BD}{BC}.$$

Här är, såsom ofvan visats,

$$\frac{\text{arcus } B'D'}{\text{arcus } BD} = \cos y.$$

Vidare närmar sig förhållandet

$$\frac{\text{arcus } BD}{\text{kordan } BD} = \frac{OB \,.\, \Delta y}{2\, OB \,.\, \sin \frac{\Delta y}{2}} = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin \frac{\Delta y}{2}}$$

gränsvärdet 1 då Δx och således äfven Δy närmar sig 0. Slutligen erhålles, om vi draga kordan BD, ur den rätliniga triangeln BCD

$$\frac{\text{kordan } BD}{BC} = \frac{\sin BCD}{\sin BDC}.$$

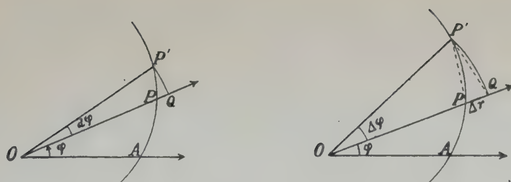
Då Δx närmar sig 0 närmar sig vinkeln $BCD = \frac{\pi}{2} - y - \Delta y$ gränsvärdet $\frac{\pi}{2} - y$ och vinkeln $BDC = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta y}{2}$ närmar sig $\frac{\pi}{2}$. Det sista förhållandet har således till gränsvärde $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin \frac{\pi}{2}}$ $= \cos y$, hvaraf vi sluta

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Såsom andra exempel betrakta vi en kurva hvars ekvation är gifven i polära koordinater

$$r = r(\varphi),$$

och söka den vinkel Θ som kurvans tangent, utdragen i den riktning i hvilken φ växer, bildar med förlängningen af radius-vector (jmf. uppgiften (3) s. 274).



Mot vinkeln $AOP = \varphi$ svarar (se den första af ofvanstående figurer) radien $OP = r$, mot vinkeln $AOP' = \varphi + d\varphi$ radien $OP' = r + dr$; $P'Q$ är en cirkelbåge uppritad med O såsom medelpunkt och radien OP'. I figuren PQP' är således $PQ = dr$ och $P'Q = (r + dr)\,d\varphi$, hvaraf

$$\frac{P'Q}{PQ} = \frac{(r + dr)\,d\varphi}{dr} = \frac{r + dr}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Nu kan denna figur, för *oändligt små* värden af $d\varphi$ och dr, uppfattas såsom en rätlinig triangel i hvilken vinkeln vid Q är rät och vinkeln vid P lika med Θ, och vi erhålla följaktligen, då dr *kan negligeras* i jämförelse med r,

$$(51) \qquad \operatorname{tang} \Theta = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{r'(\varphi)}.$$

Denna åskådliga härledning kan ersättas med följande stränga resonemang (se figuren till höger):

Vi beteckna vinkeln mellan sekanten PP' och förlängningen PQ af radius-vector med Θ'; man har $0 < \Theta' < \pi$, om $\Delta\varphi$ antages positivt. I triangeln PQP' är då vinkeln vid P lika med Θ', vinkeln vid Q lika med $\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}$ och vinkeln vid P' således lika med $\frac{\pi}{2} - \Theta' + \frac{\Delta\varphi}{2}$. För förhållandet mellan den första och den tredje vinkelns siner erhålles uttrycket:

$$\frac{\sin \Theta'}{\cos\left(\Theta' - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = \frac{\text{kordan } P'Q}{\Delta r} = \frac{\text{kordan } P'Q}{\text{arcus } P'Q} \cdot \frac{\text{arcus } P'Q}{\Delta r},$$

eller slutligen, då arcus $P'Q = (r + \Delta r)\,\Delta\varphi$,

$$(52)\qquad \frac{\sin \Theta'}{\cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)} = \frac{r + \Delta r}{\frac{\Delta r}{\Delta \varphi}} \cdot \frac{\text{kordan } P'Q}{\text{arcus } P'Q}.$$

Vi antaga att funktionen $r(\varphi)$ är kontinuerlig och har en bestämd derivata $r'(\varphi)$ för det gifna värdet φ, och betrakta först det fall då värdet af $r'(\varphi)$ är ändligt och olika 0. I högra membrum af (52) har då det första förhållandet för $\Delta\varphi = 0$ det ändliga gränsvärdet $\frac{r}{r'(\varphi)}$, det andra förhållandet gränsvärdet 1, så att vi erhålla

$$(53)\qquad \lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{\sin \Theta'}{\cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)} = \frac{r}{r'(\varphi)}.$$

Häraf följer att vinkeln Θ', då $\Delta\varphi$ försvinner, närmar sig den mellan 0 och π liggande vinkel Θ som bestämmes genom likheten (51). Ty ur (51) och (53) följer att skillnaden

$$\frac{\sin \Theta'}{\cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)} - \operatorname{tang} \Theta = \frac{\sin \Theta' \cos \Theta - \sin \Theta \cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)}{\cos \Theta \cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)}$$

har 0 till gränsvärde för $\Delta\varphi = 0$, och att täljaren i högra membrum således närmar sig 0 samtidigt med $\Delta\varphi$. Denna täljare kan sättas under formen

$$\sin(\Theta' - \Theta) + \sin \Theta \left(\cos \Theta' - \cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)\right)$$

$$= \sin(\Theta' - \Theta) - 2 \sin \Theta \,.\, \sin \frac{\Delta \varphi}{4} \,.\, \sin\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{4}\right).$$

I det sista uttrycket närmar sig den andra termen skildt för sig gränsvärdet 0, och vi erhålla således $\lim \sin(\Theta' - \Theta) = 0$ eller slutligen $\lim \Theta' = \Theta$, h. s. b.

Om $r'(\varphi) = 0$, d. v. s. $\lim \frac{\Delta r}{\Delta \varphi} = 0$, växer det numeriska värdet af förhållandet (52) öfver hvarje gräns då $\Delta\varphi$ försvinner. Nämnaren $\cos\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right)$ närmar sig således 0, hvaraf vi sluta att $\lim\left(\Theta' - \frac{\Delta \varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ och således äfven $\lim \Theta' = \frac{\pi}{2}$.

Om $r'(\varphi) = +\infty$, växer $\frac{\Delta r}{\Delta \varphi}$ mot ∞ då $\Delta \varphi$ försvinner och förhållandet (52) närmar sig således 0 genom positiva värden. Då, såsom ofvan påpekades, $0 < \Theta' < \pi$, sluta vi häraf att $\lim \Theta' = 0$.

Är slutligen $r'(\varphi) = -\infty$, närmar sig förhållandet (52), då $\Delta \varphi$ försvinner, noll genom negativa värden, hvaraf vi sluta att $\lim \Theta' = \pi$.

Härmed är strängt bevisadt att, om derivatan $r'(\varphi)$ existerar, vinkeln Θ' mellan sekanten PP' och förlängningen PQ af radius-vector, då $\Delta \varphi$ närmar sig 0 och punkten P' således längs kurvan rycker mot P, närmar sig en bestämd gränsvinkel Θ, hvilken satisfierar likheten (51).

Öfningsuppgifter:

1) Härled derivatorna af funktionerna $\sin x$, $\arccos x$ och $\sec x$ genom differentialgeometrisk betraktelse, och visa huru resonemanget i hvarje fall bör modifieras för att blifva strängt.

2) Undersök tangenten till spiralerna

$$r = a\varphi \quad \text{och} \quad r = Ce^{k\varphi}$$

äfvensom till lemniskatan[1])

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2),$$

hvars ekvation först bör uttryckas i polära koordinater.

52. **Derivator af högre ordning. Partiella derivator.** — Om funktionen $f(x)$ för hvarje argumentvärde inom en viss intervall har en ändlig derivata, $f'(x)$, utgör denna en inom samma intervall entydigt definierad funktion af x, och man kan fråga sig om denna funktion i sin tur kan deriveras, d. v. s. om gränsvärdet

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

existerar. Om så är fallet, säges detta gränsvärde utgöra *derivatan af andra ordningen* eller *den andra derivatan* af funktionen $f(x)$ för det betraktade argumentvärdet x, och beteck-

---

[1]) Jmf. L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, tionde kapitlet.

nas, enligt de olika, af LEIBNIZ, LAGRANGE och CAUCHY använda beteckningssätten,

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ f''(x),\ D^{(2)} f(x).$$

Kan den andra derivatan af funktionen $f(x)$ åter deriveras, benämnes resultatet *derivatan af tredje ordningen* eller *den tredje derivatan* af $f(x)$, och betecknas

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3},\ f'''(x),\ D^{(3)} f(x).$$

Allmänt benämnes det resultat som erhålles då den $(n-1)^{\text{sta}}$ derivatan af funktionen $f(x)$ deriveras, förutsatt att detta är möjligt, funktionens n^{te} *derivata* eller *derivata af* n^{te} *ordningen*, och betecknas

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n},\ f^{(n)}(x),\ D^{(n)} f(x).$$

För de tre första derivatorna af polynomet

$$f(x) = x^3 + px + q$$

finner man t. ex. uttrycken

$$f'(x) = 3x^2 + p,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,$$

medan de följande derivatorna alla identiskt försvinna. Allmänt är den n^{te} derivatan af ett polynom af n^{te} graden en från 0 skild konstant och alla följande derivator identiskt 0.

Vi anteckna ännu följande resultat, som läsaren själf bör verificera:

$D^{(n)}(x^n) = n!$, om n är ett positivt helt tal;

$D^{(n)}(x^\mu) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\,x^{\mu-n}$, för hvarje reellt μ;

$D^{(n)}(e^x) = e^x$;

$D^{(n)}(a^x) = a^x (\log a)^n$;

$D^{(n)} \log x = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$;

$$D^{(2n)} \sin x = (-1)^n \sin x ;$$

$$D^{(2n+1)} \sin x = (-1)^n \cos x .$$

De två sista formlerna kunna sammanfattas i följande:

$$D^{(n)} \sin x = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2}\right).$$

För fullständighetens skull vilja vi här ännu nämna några ord om derivator af funktioner som bero af flere argument, ehuru dessas studium egentligen faller utom planen för vår lärobok.

Vi betrakta en funktion $f(x, y)$ af de två oberoende variablerna x och y. Låta vi af dessa endast en i sender variera medan den andra bibehåller sitt värde, ledas vi till att betrakta gränsvärdena

(54) $$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

(55) $$\lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Det förra gränsvärdet (om det existerar) benämnes *den partiella derivatan af* $f(x, y)$ *med afseende å* x, och betecknas

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f'_x(x, y), \quad D_x f(x, y).$$

Gränsvärdet (55) åter kallas *den partiella derivatan af* $f(x, y)$ *med afseende å* y, och betecknas

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad f'_y(x, y), \quad D_y f(x, y).$$

Dessa derivator erhållas enligt vanliga differentiationsregler, i det man vid bildandet af $f'_x(x, y)$ har att betrakta argumentet y, vid bildandet af $f'_y(x, y)$ argumentet x såsom konstant.

Exempelvis har funktionen

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

de partiella derivatorna

$$f'_x(x, y) = 2(Ax + By + D),$$

$$f'_y(x, y) = 2(Bx + Cy + E).$$

På enahanda sätt definieras och bildas de partiella derivatorna af funktioner af tre eller flere argument. Vi ingå här icke på partiella derivator af högre ordning.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna följande derivator:

$$D^{(2)}(\sqrt{x^2+1}), \quad D^{(2)}\left(x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right), \quad D^{(3)}(x^3 \log x).$$

2) Undersök derivatorna af funktionerna $x^{\frac{7}{3}}$ och $x^2 \sin\frac{1}{x}$ för $x = 0$.

3) Bilda det allmänna uttrycket för den n^{te} derivatan af enhvar af funktionerna

$$\cos ax, \quad \frac{1}{a+bx}, \quad \sin^2 x, \quad e^x x.$$

4) Härled medels fullständig induktion ett allmänt uttryck för den n^{te} derivatan af produkten $u(x)\,v(x)$.

5) Bilda följande funktioners partiella derivator:

$$\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \quad x^y, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

53. **Rolle's sats.** — Enligt den s. 242 bevisade satsen, kunna vi af derivatans tecken för ett gifvet argumentvärde x sluta till i hvilken riktning funktionen varierar då argumentet förändras från värdet x till ett värde i en viss liten omgifning af x. För att ernå allmännare resultat beträffande funktioners variation, måste vi först bevisa följande enkla sats, hvilken utgör grundvalen för differentialkalkylens vidare utveckling.

Rolle's sats. — *Vi betrakta en funktion $f(x)$ som uppfyller följande tre villkor:*

1⁰ *$f(x)$ är entydig och kontinuerlig för hvarje värde x som tillhör intervallen (a, b), värdena a och b medräknade;*

2⁰ *f*(x) *har värdet* 0 *för* $x=a$ *och för* $x=b$;

3⁰ *f*(x) *har en bestämd derivata* $f'(x)$ *för hvarje värde* x *mellan* a *och* b.

Under dessa förutsättningar finnes det mellan a *och* b *åtminstone ett värde för hvilket derivatan* $f'(x)$ *är lika med* 0.

Om $f(x)$ är konstant inom intervallen (a,b), är $f'(x)$ noll för hvarje värde x mellan a och b och satsen således riktig.

Är funktionen $f(x)$ icke konstant inom (a,b), sluta vi främst af villkoret 1^0, enligt den senare af de s. 38 anförda satserna om kontinuerliga funktioner, att bland de värden funktionen antar för de betraktade argumentvärdena finnes ett största värde M och ett minsta värde m.

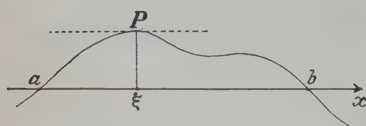
Vi antaga först att $f(x)$ i någon punkt af (a,b) har ett positivt värde. Funktionens största värde M inom (a,b) är då äfven positivt, och den eller de punkter där detta värde uppnås måste således, enligt villkoret 2^0, ligga *mellan* a och b. Det finnes följaktligen åtminstone ett värde ξ mellan a och b för hvilket $f(\xi)=M$.

Enligt villkoret 3^0 har $f(x)$ för $x=\xi$ en bestämd derivata $f'(\xi)$. *Dennas värde är* $=0$. Ty vore $f'(\xi)>0$ eller $f'(\xi)<0$, skulle man, enligt den s. 242 bevisade satsen, kunna finna ett sådant positivt tal δ att olikheten $f(x)>f(\xi)$ vore uppfylld, i förra fallet för $\xi<x<\xi+\delta$, i senare fallet för $\xi-\delta<x<\xi$. I båda fallen stöter man således på en motsägelse, ty $f(\xi)=M$ är enligt vår förutsättning det största värde $f(x)$ öfverhufvud antar inom intervallen (a,b). Således är $f'(\xi)=0$ och satsen följaktligen riktig.

Om slutligen $f(x)$ icke i någon punkt af (a,b) har ett positivt värde, måste det inom intervallen finnas någon punkt i hvilken funktionen är negativ, eftersom vi antaga att den icke är konstant. Funktionens minsta värde m inom (a,b) är då äfven negativt, och hvarje argumentvärde för hvilket detsamma uppnås ligger således *mellan* a och b. Det finnes således i detta fall åtminstone ett sådant värde ξ mellan a och b att $f(\xi)=m$, och man inser på samma sätt som ofvan att $f'(\xi)=0$.

ROLLE's sats är härmed fullständigt bevisad, om vi nämligen antaga satsen s. 38 riktig.

Den geometriska tolkningen af ROLLE's sats är synnerligen enkel. Enligt de antaganden vi gjort representerar ekvationen $y = f(x)$ en kontinuerlig kurva som skär x-axeln i punkterna $x = a$ och $x = b$ och i hvarje mellanliggande punkt har en bestämd tangent. Satsen utsäger att *kurvans tangent är parallell med x-axeln i åtminstone en punkt P mellan a och b.*



Om funktionen $f(x)$ och dess derivator äro kontinuerliga inom en viss intervall (a, b), kunna vi af ROLLE's sats sluta att *mellan två rötter till ekvationen $f(x) = 0$, som falla inom (a, b), ligger åtminstone en rot till ekvationen $f'(x) = 0$, mellan två rötter till denna åtminstone en rot till ekvationen $f''(x) = 0$,* o. s. v.

Man kan använda denna sats för att bestämma en öfre gräns för antalet reella rötter till en ekvation som falla inom en gifven intervall. Exempelvis kunna vi af densamma sluta att ekvationen $x^3 + px + q = 0$ icke kan hafva mer än en reell rot om $p > 0$. Ty annars skulle den genom derivering erhållna ekvationen $3x^2 + p = 0$ hafva åtminstone en reell rot, hvilket emellertid icke är fallet om p har ett positivt värde.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att ekvationen $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ icke kan hafva flere än två reella rötter om $p > 0$.

2) Hvad kan med stöd af ROLLE's sats sägas om antalet reella rötter till den trinomiska ekvationen

$$x^n + px + q = 0 ?$$

Tolka resultatet geometriskt (jmf. n° 4).

3) Bevisa att ekvationen

$$e^x = P(x),$$

där $P(x)$ är ett polynom af n^{te} graden, icke kan hafva flere än $n + 1$ reella rötter.

54. **Medelvärdssatsen.** — Om man bortlemnar den andra af de i ROLLE's sats gjorda förutsättningarna men bibehåller de öfriga oförändrade, kommer man till en viktig generalisering af denna sats, som vanligen benämnes

MEDELVÄRDSSATSEN. — *Vi antaga att funktionen $f(x)$ uppfyller följande tvenne villkor:*

1° *$f(x)$ är entydig och kontinuerlig för hvarje värde x som tillhör intervallen (a, b), värdena a och b medräknade;*

2° *$f(x)$ har en bestämd derivata $f'(x)$ för hvarje värde x mellan a och b.*

Det finnes då mellan a och b åtminstone ett värde ξ för hvilket

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{56}$$

Vi tolka genast satsen geometriskt. Vi upprita kurvan $y = f(x)$ och utmärka på densamma de punkter, A och B, hvilkas abskissor hafva värdena a och b. Enligt våra antaganden förlöper denna kurva kontinuerligt från A till B och har i hvarje mellanliggande punkt en bestämd tangent. Högra membrum af (56) utgör vinkelkoefficient för sekanten genom punkterna A och B, venstra membrum åter vinkelkoefficient för kurvans tangent i den punkt P som har abskissan ξ. Satsen utsäger således geometriskt att *det finnes på kurvan åtminstone en punkt P mellan A och B i hvilken tangenten är parallell med sekanten AB.*

Denna geometriska tolkning visar äfven huru ofvanstående sats kan återföras till ROLLE's sats. Vi behöfva endast tillämpa denna på skillnaden mellan kurvans ordinata och ordinatan för sekanten AB, alltså på funktionen

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Denna funktion $\varphi(x)$ uppfyller alla de erforderliga villkoren: den är kontinuerlig inom intervallen (a, b) och i dess ändpunkter, eftersom $f(x)$ enligt antagandet är det; vidare

är, såsom man omedelbart verificerar, $\varphi(a)=0$ och $\varphi(b)=0$; slutligen har $\varphi(x)$, på grund af det senare antagandet beträffande $f(x)$, för hvarje värde x mellan a och b en bestämd derivata:

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Vi kunna således verkligen tillämpa ROLLE's sats på funktionen $\varphi(x)$, och sluta af densamma att det mellan a och b finnes åtminstone ett värde ξ för hvilket $\varphi'(\xi)=0$ eller

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Men denna likhet är identisk med (56), och medelvärdssatsen är härmed bevisad.

Likheten (56) kommer vanligen till användning under formen

$$(56)' \qquad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Här utgör venstra membrum den tillväxt funktionen $f(x)$ erhåller då argumentet x varierar från a till b, högra membrum åter är lika med argumentets egen tillväxt, $b-a$, multiplicerad med derivatan $f'(\xi)$. Medelvärdssatsen kan således kort sammanfattas som följer:

Funktionens tillväxt är lika med produkten af argumentets tillväxt och funktionens derivata, tagen för ett värde som ligger mellan argumentets begynnelsevärde och dess slutvärde.

Denna sats spelar en synnerligen viktig roll i Analysen. Vi använda densamma här för att från en ny sida belysa den tidigare behandlade frågan om uppskattningen af resultatets noggrannhet vid numerisk kalkyl.

Vi antaga att det gäller att beräkna värdet af en funktion $f(x)$ för ett gifvet argumentvärde $x=\bar{a}$, men att härvid i stället för det exakta värdet $\bar{a}$ användes ett approximativt värde a. Dettas korrektion beteckna vi såsom förut med Δa, så att $\bar{a}=a+\Delta a$ och $\Delta a=\bar{a}-a$. I stället för det sökta funktionsvärdet $f(\bar{a})$ erhålles då värdet $f(a)$, hvars korrektion är

$$\Delta f=f(\bar{a})-f(a).$$

Vi förutsätta att $f(x)$ och $f'(x)$ äro kontinuerliga för alla ifrågakommande argumentvärden. Enligt (56)' är då

$$f(\bar{a}) - f(a) = f'(\xi)(\bar{a} - a) = f'(\xi)\,\Delta a,$$

där ξ ligger mellan a och $\bar{a}$, och vi erhålla således

(57) $$\Delta f = f'(\xi)\,\Delta a,$$

hvilken likhet tillåter oss att approximativt uppskatta resultatets korrektion Δf om Δa är bekant.

Om M' betecknar det största och m' det minsta värdet af $f'(x)$ inom intervallen $(a, \bar{a})$, har man enligt (57) olikheterna

(57)' $$m' \leqq \frac{\Delta f}{\Delta a} \leqq M'.$$

Känner man endast en öfre gräns G' för de värden $|f'(x)|$ antar mellan a och $\bar{a}$, så att $|f'(x)| \leqq G'$ inom hela denna intervall, erhålles ur (57) för resultatets fel $|\Delta f|$ den öfre gränsen

(57)'' $$|\Delta f| \leqq G' |\Delta a|.$$

Vi tillämpa det sagda på funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, hvars derivata är $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Om x ligger mellan a och $\bar{a}$ ligger värdet af denna derivata mellan $\frac{1}{2\sqrt{\bar{a}}}$ och $\frac{1}{2\sqrt{a}}$, och enligt (57)' ligger således korrektionen för det närmevärde, $\sqrt{a}$, som erhålles för $\sqrt{\bar{a}}$ då $\bar{a}$ ersättes med det approximativa värdet a, mellan gränserna $\frac{\Delta a}{2\sqrt{\bar{a}}}$ och $\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$ (jmf. s. 141).

Öfningsuppgifter:

1) Huru noggrant värde bör man känna för $\sin x$ eller för $\operatorname{Log}\sin x$ för att vinkeln x skall blifva bestämd på 1' när, då man antar att x ligger a) mellan 5° och 10°, b) mellan 45° och 50°, c) mellan 80° och 85°?

2) Med hvilken noggrannhet bör värdet af $\operatorname{Log} x$ vara gifvet för att x skall kunna beräknas med ett fel mindre än en enhet, om talet x ligger a) mellan 1000 och 2000, b) mellan 5000 och 6000, c) mellan 9000 och 10000?

3) Uppskatta storleken af de fel som begås i värdena af uttrycken

$$\operatorname{Log}\pi, \quad \left(\frac{\pi-1}{\pi+1}\right)^2, \quad e^\pi,$$

om för π användes närmevärdet 3,14.

55. **Integralkalkylens fundamentalsats. Betydelsen af de två första derivatornas tecken för funktionens förlopp.** — Vi hafva sett (s. 255) att, om skillnaden mellan tvenne funktioner är konstant inom en intervall, deras derivator till sitt värde öfverensstämma i hvarje punkt inom densamma. Medelvärdssatsen tillåter oss att omvända detta resultat och bevisa följande sats, hvilken, på grund af den viktiga roll den spelar i integralkalkylen, kan benämnas

INTEGRALKALKYLENS FUNDAMENTALSATS. — *Om funktionerna $f_1(x)$ och $f_2(x)$ äro kontinuerliga och deras derivator $f'_1(x)$ och $f'_2(x)$ till värdet öfverensstämma i hvarje punkt af en intervall, är funktionernas skillnad konstant inom denna intervall.*

På grund af våra förutsättningar är skillnaden $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ kontinuerlig och dess derivata noll i hvarje punkt af den betraktade intervallen. Satsen kan således återföras till följande:

Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig och dess derivata lika med 0 i hvarje punkt af en intervall, är funktionen konstant inom denna intervall[1].

---

[1]) Geometriskt tolkade, innebära de gjorda antagandena att kurvan $y = f(x)$ är kontinuerlig och dess tangent parallell med x-axeln i hvarje punkt af intervallen i fråga. För åskådningen synes häraf med nödvändighet framgå att kurvan inom denna intervall utgöres af en med x-axeln parallell rätlinig sträcka, och att dess ordinata $f(x)$ således har ett konstant värde.

Dylika på den geometriska åskådningen grundade resonemang bör emellertid icke tillmätas någon bindande kraft; i svårare frågor kunna de lätt leda och hafva ofta ledt till oriktiga resultat.

Den geometriska åskådningen har icke dess mindre sin stora betydelse äfven för Analysen, dels såsom hjälpmedel för upptäckandet af nya resultat, dels för att åskådliggöra och därigenom underlätta förståendet af de analytiska bevisen.

Beviset följer omedelbart ur medelvärdssatsen. Ty om vårt påstående icke vore riktigt, funnes det inom intervallen i fråga säkert två punkter, x_1 och x_2, i hvilka $f(x)$ antoge olika värden, $f(x_1)$ och $f(x_2)$. Enligt nyssnämnda sats skulle det då mellan x_1 och x_2, alltså inom intervallen, finnas åtminstone en punkt ξ i hvilken derivatan vore lika med

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

och således skild från 0. Men detta strider mot vårt antagande.

Man säger om en funktion $f(x)$ att den *växer* eller *tilltar inom en intervall* (a, b), om

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ så snart } x_2 > x_1,$$

förutsatt att x_1 och x_2 ligga inom nämnda intervall.

Om däremot, för hvarje värdepar x_1, x_2 inom (a, b),

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ så snart } x_2 > x_1,$$

säger man att $f(x)$ *aftar inom intervallen* (a, b).

Beträffande funktioners till- och aftagande ger oss medelvärdssatsen följande viktiga resultat, som utgör en generalisering af satsen s. 242 och oupphörligt kommer till användning i differentialkalkylen:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig inom intervallen (a, b) och dess derivata $f'(x)$ är positiv inom samma intervall, utom möjligen i enskilda punkter där den antar värdet 0, tilltar $f(x)$ inom (a, b).

Är $f(x)$ kontinuerlig och $f'(x)$ negativ inom (a, b), utom möjligen i enskilda punkter i hvilka $f'(x)=0$, aftar $f(x)$ inom intervallen (a, b).

Det är tillräckligt att bevisa satsens förra del, ty den senare delen återföres till den förra om $f(x)$ ersättes med $-f(x)$.

Vi antaga således att $f'(x)$ inom (a, b) är $\geqq 0$ och $=0$

på sin höjd i enskilda punkter, alltså icke inom någon sammanhängande intervall, och vilja bevisa att $f(x_2) > f(x_1)$ om $x_2 > x_1$ samt x_1 och x_2 ligga inom (a, b).

Man kan icke hafva $f(x_2) < f(x_1)$. Ty enligt medelvärdssatsen finnes det mellan x_1 och x_2, således inom (a, b), åtminstone ett värde ξ för hvilket

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Vore $f(x_2) < f(x_1)$, skulle $f'(\xi)$ hafva ett negativt värde, hvilket strider mot vårt antagande. — Vi äro således säkra om att, inom (a, b), värdet af $f(x)$ icke kan minskas då x växer.

Vi antaga nu för ett ögonblick att funktionen $f(x)$ har samma värde A för $x = x_1$ och $x = x_2 (> x_1)$. Då är äfven $f(x) = A$ i hvarje punkt x' mellan x_1 och x_2; ty vore $f(x') > A$, skulle värdet af $f(x)$ minskas då x växer från x' till x_2, och vore $f(x') < A$, skulle $f(x)$ minskas då x växer från x_1 till x', tvärt emot hvad ofvan visats. Ur antagandet $f(x_1) = f(x_2)$ följer alltså att $f(x)$ vore konstant och således $f'(x) = 0$ inom hela intervallen (x_1, x_2), hvilket strider mot våra förutsättningar.

Då såväl antagandet $f(x_2) < f(x_1)$ som antagandet $f(x_2) = f(x_1)$ leder till en motsägelse, återstår såsom enda möjlighet att $f(x_2) > f(x_1)$, h. s. b.[1])

Vi betrakta såsom exempel funktionen

$$\frac{x + a}{x + b},$$

hvilken är kontinuerlig inom intervallerna $(-\infty, -b)$ och $(-b, \infty)$. Dess derivata

$$D\left(\frac{x + a}{x + b}\right) = \frac{b - a}{(x + b)^2}$$

är ständigt positiv om $b > a$, ständigt negativ om $b < a$.

---

[1]) Om $f'(x)$ icke försvinner i någon punkt inom intervallen (a, b), följer satsens riktighet omedelbart ur likheten

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

I förra fallet tilltar således funktionen, i senare fallet aftar den inom båda de betraktade intervallerna.

Vi gå nu att undersöka betydelsen af den andra derivatans tecken för funktionens förlopp, och tolka härvid genast resultaten geometriskt.

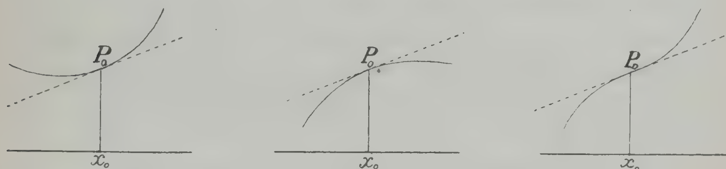
Vi antaga att funktionen $f(x)$ och dess första derivata $f'(x)$ äro kontinuerliga inom en viss intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ kring värdet x_0, samt att $f(x)$ för $x = x_0$ har en bestämd andra derivata $f''(x_0)$.

Vi draga tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt P_0 hvars abskissa är x_0 och betrakta skillnaden $\varphi(x)$ mellan kurvans ordinata och tangentens ordinata, för hvilken erhålles uttrycket

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Medelvärdssatsen ger oss $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, där ξ ligger mellan x_0 och x, och $\varphi(x)$ kan således bringas under formen

$$\varphi(x) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$



Vi hafva att särskilja tre olika fall:

1° $f''(x_0) > 0$. Ur satsen s. 242 följer, då vi tillämpa den på $f'(x)$, att skillnaden $f'(x) - f'(x_0)$ är positiv om $x > x_0$, negativ om $x < x_0$, och således har samma tecken som $x - x_0$, om $|x - x_0|$ är mindre än ett visst tal δ. Nu ligger ξ mellan x_0 och x, hvaraf följer att $\xi - x_0$ har samma tecken som $x - x_0$, samt att $|\xi - x_0| < \delta$ om $|x - x_0| < \delta$. Alltså har, för $0 < |x - x_0| < \delta$, skillnaden $f'(\xi) - f'(x_0)$ samma tecken som $x - x_0$ och funktionen $\varphi(x)$ således ett positivt värde, hvilket geometriskt innebär att kurvans ordinata är större än tangentens ordinata eller att kurvan ligger ofvanom tangenten inom nämnda omgifning af tangeringspunkten. Man

säger i detta fall att kurvan i punkten P_0 är *konvex nedåt* (se den första figuren).

2° $f''(x_0) < 0$. Genom att resonera såsom ofvan finner man att skillnaden $f'(\xi) - f'(x_0)$ har motsatt tecken mot $x - x_0$ och $\varphi(x)$ således ett negativt värde, om $|x - x_0|$ är tillräckligt litet. Kurvan $y = f(x)$ ligger i detta fall, i en viss omgifning af tangeringspunkten P_0, under tangenten och är sålunda i nämnda punkt *konvex uppåt* (se den andra af ofvanstående figurer).

3° $f''(x_0) = 0$. Vi antaga ytterligare att $f''(x)$ existerar äfven i en viss omgifning af x_0 och har motsatta tecken på olika sidor om denna punkt. Vi kunna då ånyo använda medelvärdssatsen och erhålla $f'(\xi) - f'(x_0) = f''(\xi_1)(\xi - x_0)$, hvaraf

$$\varphi(x) = f''(\xi_1)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

där ξ_1 ligger mellan ξ och x_0 och således mellan x och x_0.

Produkten $(\xi - x_0)(x - x_0)$ är positiv, ty dess faktorer hafva samma tecken. Derivatan $f''(\xi_1)$ ändrar däremot, enligt antagandet, tecken samtidigt med $\xi_1 - x_0$, d. v. s. samtidigt med $x - x_0$. Följaktligen har $\varphi(x)$ olika tecken på olika sidor om x_0, hvilket geometriskt innebär att kurvan $y = f(x)$ på olika sidor om tangeringspunkten P_0, i en viss omgifning af densamma, ligger på olika sidor om tangenten (se den tredje figuren). Punkten P_0 säges utgöra en *inflexionspunkt* för kurvan.

Vi sammanfatta kort de erhållna resultaten:

Kurvan $y = f(x)$ är konvex nedåt i hvarje punkt där $f''(x) > 0$, konvex uppåt i hvarje punkt där $f''(x) < 0$. I en punkt där $f''(x) = 0$ har kurvan en inflexion, om $f''(x)$ har motsatta tecken på olika sidor om denna punkt.

Vi betrakta såsom exempel kurvan $y = \sin x$. Den andra derivatan $D^{(2)} \sin x = -\sin x$ är negativ för $0 < x < \pi$, noll för $x = 0$, positiv för $-\pi < x < 0$. Kurvan är således konvex uppåt i hvarje punkt inom intervallen $(0, \pi)$, konvex nedåt i hvarje punkt inom intervallen $(-\pi, 0)$, och har en inflexion i origo.

Öfningsuppgifter:

1) Bestäm de intervaller inom hvilka funktionerna

$$x^3+3x^2-1\,,\quad x^4-x^2\,,\quad \frac{e^x}{x}$$

till- eller aftaga, undersök motsvarande kurvor med afseende å konvexiteten och bestäm deras inflexionspunkter.

2) Undersök huru funktionen

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

varierar då x växer från 0 till ∞ eller aftar från -1 till $-\infty$.

56. **Differentialkalkylens användning för bestämmandet af funktioners maxima och minima.** — Såsom läsaren säkert redan själf observerat, leda de i det föregående erhållna resultaten till en enkel metod för bestämmandet af funktioners maxima och minima (jmf. n° 6). För korthetens skull införa vi benämningen *extremum* eller *extremt värde* för att sammanfatta begreppen *maximum* och *minimum*.

Vi betrakta först ett argumentvärde x_0 för hvilket den gifna funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och har en bestämd derivata $f'(x_0)$. Om $f'(x_0)\neq 0$, följer ur satsen s. 242 att $f(x)$ i en huru liten omgifning som helst af x_0 antar såväl värden större än $f(x_0)$ som värden mindre än $f(x_0)$, och att $f(x_0)$ således icke utgör något extremt värde. Skall ett extremum inträda för $x=x_0$, erfordras således ovillkorligen att $f'(x_0)=0$.

Men en funktion kan äfven hafva ett extremum i en punkt där den antingen är diskontinuerlig eller icke har en bestämd derivata. Ett enkelt exempel på det senare fallet ger oss funktionen $f(x)=|x|$; denna har ett minimum för $x=0$, för hvilket värde derivatan $f'(x)$ icke existerar (jmf. s. 241).

Vi erhålla således följande regel:

De argumentvärden för hvilka en funktion $f(x)$ uppnår sina extrema värden äro att söka, dels bland rötterna till ekvationen $f'(x)=0$, dels bland de värden x för hvilka $f(x)$ är diskontinuerlig eller icke har en bestämd derivata.

Om de sistnämnda värdena kan intet allmänt utsägas, och måste man i hvarje fall särskildt undersöka huru funktionen förhåller sig i deras omgifning. Däremot kan man uppställa ett enkelt kriterium som i allmänhet är tillräckligt för att afgöra om en funktion verkligen har ett extremum i en punkt där dess derivata försvinner.

Vi betrakta således ett värde x_0 för hvilket $f'(x_0)=0$, och antaga 1^0 att $f(x)$ är kontinuerlig och $f'(x)$ existerar i en viss omgifning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ af detta värde, samt 2^0 att derivatan $f'(x)$ bibehåller samma tecken inom intervallen $(x_0-\delta, x_0)$, och likaså inom intervallen $(x_0, x_0+\delta)$. Vi hafva då att särskilja följande tre fall:

1^0 *$f'(x)$ är positiv inom intervallen $(x_0-\delta, x_0)$, negativ inom intervallen $(x_0, x_0+\delta)$.* Satsen s. 295 lär oss att $f(x)$ ständigt tilltar då x växer från $x_0-\delta$ till x_0 och därefter ständigt aftar då x fortfar att växa från x_0 till $x_0+\delta$. Funktionens värde för $x=x_0$ är således större än dess värde i hvarje annan punkt af intervallen $(x_0-\delta, x_0+\delta)$; *$f(x)$ har ett maximum för $x=x_0$.*

2^0 *$f'(x)$ är negativ inom intervallen $(x_0-\delta, x_0)$, positiv inom intervallen $(x_0, x_0+\delta)$.* I detta fall aftar funktionen då x växer från $x_0-\delta$ till x_0, tilltar då x växer från x_0 till $x_0+\delta$; *$f(x)$ har ett minimum för $x=x_0$.*

3^0 *$f'(x)$ har samma tecken inom intervallerna $(x_0-\delta, x_0)$ och $(x_0, x_0+\delta)$.* I detta fall varierar $f(x)$ ständigt i samma riktning då x växer från $x_0-\delta$ till $x_0+\delta$, och antar således inom den ena af nyssnämnda intervaller större, inom den andra mindre värden än för $x=x_0$; *$f(x)$ har hvarken maximum eller minimum för $x=x_0$.*

I detta tredje fall har kurvan $y=f(x)$ en inflexionspunkt för $x=x_0$ (jmf. s. 298), och dess tangent i denna punkt är parallell med x-axeln.

Vi sammanfatta de erhållna resultaten i följande sats[1]):

[1]) Om man inom en viss intervall $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ kring x_0 har $f(x) \geq f(x_0)$, och om det inom en huru liten omgifning som helst af x_0 finnes värden x (olika x_0) för hvilka $f(x)=f(x_0)$, säger man att funktionen har ett *oegentligt minimum* för $x=x_0$. På analogt sätt definieras ett *oegentligt maximum*. I motsats härtill benämnas de i n° 6 definierade maxima och minima *egentliga*.

Exempelvis har den genom uttrycket $\left(x \sin \frac{1}{x}\right)^2$ definierade funk-

Om derivatan $f'(x)$ försvinner för $x = x_0$ och har motsatta tecken på olika sidor om detta värde, har funktionen $f(x)$ ett extremum för $x = x_0$, nämligen ett maximum om derivatan går från positiv till negativ, ett minimum om den går från negativ till positiv då x växer genom värdet x_0.

Om derivatans tecken är detsamma på båda sidor om x_0, har funktionen för detta värde hvarken maximum eller minimum.

Vi betrakta såsom första exempel funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1},$$

hvars extrema värden vi i n^0 6 bestämde med hjälp af den elementära metoden. Denna funktion är kontinuerlig och har en bestämd derivata

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

för hvarje argumentvärde, med undantag af värdet -1 för hvilket funktionen icke är definierad. Enligt regeln s. 299 hafva vi således i förevarande fall att betrakta endast de argumentvärden för hvilka derivatan försvinner, alltså värdena $x = -3$ och $x = 1$.

Ur ofvanstående uttryck framgår att derivatan $f'(x)$ är positiv för $x < -3$, negativ för $-3 < x < 1$, positiv för $x > 1$. Den går således från positiv till negativ då x växer genom värdet -3, från negativ till positiv då x växer genom värdet 1, och enligt ofvan bevisade kriterium sluta vi häraf att funktionen har ett maximum för $x = -3$, ett minimum för $x = 1$ (jmf. figuren s. 34). Dess maximivärde är $f(-3) = -6$, dess minimivärde $f(1) = 2$.

Vi betrakta nu polynomet

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

---

tionen ett oegentligt minimum för $x = 0$ (om vi i denna punkt tilldela funktionen värdet 0, som utgör dess gränsvärde för $x = 0$).

Den regel vi gifvit s. 299 gäller jämväl för oegentliga extrema, medan ofvanstående kriterium är tillämpligt endast på egentliga extrema.

Om $p > 0$, är dess derivata

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

ständigt positiv, och det finnes således intet extremum. Då x växer från $-\infty$ till $+\infty$ växer $f(x)$ beständigt och genomlöper alla värden från $-\infty$ till $+\infty$ (jmf. s. 60—61). Ekvationen

$$(58) \qquad x^3 + px + q = 0$$

har således i detta fall endast en reell rot.

Om $p = 0$, är derivatan $f'(x)$ noll för $x = 0$ men positiv för alla andra värden, och det finnes således icke heller i detta fall något extremum. Kurvan $y = f(x)$ har en inflexion i den punkt där den skär y-axeln. Ekvationen (58) är satisfierad för endast ett reellt värde x.

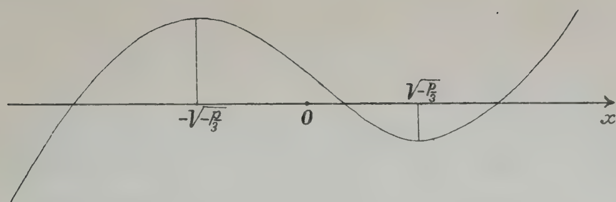
Vi antaga slutligen $p < 0$. Derivatan $f'(x)$ försvinner för värdena $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ och kan sättas under formen

$$f'(x) = 3\left(x + \sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{p}{3}}\right),$$

hvarur framgår att den är positiv inom intervallen $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, negativ inom intervallen $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, positiv inom intervallen $\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}, \infty\right)$. Inom den första af dessa intervaller växer $f(x)$ ständigt, från $-\infty$ till värdet $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, inom den andra aftar $f(x)$ från $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ till $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, inom den tredje växer $f(x)$ åter från värdet $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ till $+\infty$. I förevarande fall är således

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ ett maximivärde,}$$

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q + \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ ett minimivärde.}$$



Af det sagda följer vidare att, om maximi- och minimivärdena hafva samma tecken, ekvationen (58) har endast en reell rot, medan den däremot, om nämnda värden hafva motsatta tecken, har tre reella rötter, inom hvar sin af de tre ofvan betraktade intervallerna (jmf. ofvanstående figur). Af dessa rötter sammanfalla de två första om $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=0$, de två senare om $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=0$.

För produkten af maximi- och minimivärdena erhålles uttrycket

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=4\,K,$$

där

$$K=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Nämnda värden hafva således samma tecken om $K>0$, motsatta tecken om $K<0$, och våra resultat kunna följaktligen utsägas under följande enkla form:

Den kubiska ekvationen (58) har endast en reell rot om $K>0$, *däremot tre reella rötter om* $K<0$. *Är* $K=0$, *sammanfalla tvenne rötter.*

Vi hade antagit $p<0$, men vårt resultat gäller alldeles allmänt. Ty om $K<0$, är villkoret $p<0$ alltid uppfylldt. Är åter $K>0$, kan p äfven vara >0, men ekvationen har, såsom vi ofvan sett, äfven i dessa fall endast en reell rot. Om slutligen $K=0$, är antingen $p<0$ eller $p=0$; i sistnämnda fall är jämväl $q=0$ och ekvationen (58) reducerar sig till $x^3=0$, så att följaktligen alla dess rötter sammanfalla med värdet $x=0$.

Det s. 301 uppställda kriteriet för ett extremum grundar sig uteslutande på den första derivatans förhållande. Med

stöd af hvad i n⁰ 55 visats om betydelsen af den andra derivatans tecken för funktionens förlopp, erhåller man omedelbart följande nya kriterium, som är af speciellare natur än det första:

Vi antaga att $f(x)$ och $f'(x)$ äro kontinuerliga i en viss omgifning af värdet x_0, att $f'(x_0)=0$ samt att derivatan $f''(x_0)$ existerar. Under dessa förutsättningar har funktionen $f(x)$ för argumentvärdet $x=x_0$

ett maximum om $f''(x_0)<0$,

ett minimum om $f''(x_0)>0$,

medan det fall då $f''(x_0)=0$ erfordrar en särskild undersökning.

Läsaren uppmanas att tillämpa detta kriterium på de tidigare behandlade uppgifterna.

Gäller det att bestämma det största eller det minsta värde en funktion antar inom en gifven intervall, har man att taga i betraktande icke blott funktionens extrema värden inom denna intervall utan äfven dess värden i intervallens ändpunkter. Sträcker sig intervallen i någondera riktningen till oändligheten, har man att undersöka huru funktionen förhåller sig då variabeln går mot ∞ i denna riktning.

Öfningsuppgifter:

1) Sök de i uppgiften (1) s. 34 betraktade funktionernas extrema värden.

2) Bestäm det största och det minsta värdet af polynomet x^3+2x^2-1 inom intervallen från $x=-1,7$ till $x=0,7$.

3) För hvilket värde x erhåller uttrycket

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

sitt minsta värde?

4) Sök följande funktioners extrema värden:

$$x^5-5x^4+5x^3+1,\quad ae^{kx}+be^{-kx},\quad x^x.$$

5) Sök det minsta värde funktionen $\dfrac{e^x}{x^n}$ antar för $x>0$, samt visa på denna väg att funktionen närmar sig gränsvärdet ∞ då x växer mot ∞, talet n må vara huru stort som helst.

6) Hvilken bland alla räta cirkelkoner med sidolinien s har den största volymen?

7) Bestäm, bland alla cylindrar som kunna inskrifvas i en sfer med radien r, den cylinder hvars volym är störst, den hvars mantelyta är störst, samt den hvars totala yta är störst.

8) I ett plan äro gifna en rät linie och två punkter på samma sida om denna. Sök den punkt på linien hvars afstånd från de gifna punkterna ha den minsta summan. (Lösningen erhålles enklast medels geometrisk betraktelse).

9) Undersök noggrant maxima och minima af funktionerna

$$\frac{\sin x}{x}, \quad e^{-kx}\sin nx.$$

57. **De två första derivatornas betydelse i mekaniken.** — Vi betrakta en materiell punkt som rör sig utmed en rät linie. Tiden, räknad från ett gifvet begynnelseögonblick, beteckna vi med t, den rörliga punktens afstånd från en fast punkt O af den räta linien med s, hvarvid värdet af s räknas positivt i en viss riktning, negativt i den motsatta. Punktens rörelse är fullständigt bestämd om man känner värdet af s vid hvarje tidpunkt, eller, annorlunda uttryckt, om s är en gifven funktion af t:

O P P'
s Δs

(59) $$s = s(t).$$

Vid tidpunkten t må den materiella punkten befinna sig i P, vid tidpunkten $t + \Delta t$ i punkten P' (se ofvanstående figur), så att

$$OP = s(t), \quad OP' = s(t + \Delta t).$$

Då är

$$PP' = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

den väg punkten rört sig från ögonblicket t till ögonblicket $t + \Delta t$, räknad positiv eller negativ beroende på om rörelsen skett i liniens positiva eller negativa riktning. Förhållandet

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

mellan den tillryggalagda vägen Δs och den tid Δt under hvilken den tillryggalagts, benämnes punktens *medelhastig-*

het under tidsintervallen $(t, t+\Delta t)$. Vidare uppställes definitionen:

Med den rörliga punktens ***hastighet*** *i* ***ögonblicket*** t *förstås det gränsvärde hvilket dess medelhastighet under tidsintervallen* $(t, t+\Delta t)$ *närmar sig då intervallens längd* Δt *aftar mot* 0:

$$\textit{hastigheten} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Men detta gränsvärde utgör tillika definitionen för derivatan af funktionen $s(t)$ för det betraktade värdet af t, hvilken är lika med derivatan af skillnaden $s(t) - s(0)$, som anger den väg punkten tillryggalagt från ögonblicket $t=0$ till det betraktade ögonblicket t (om nämligen hvarje tillryggalagdt vägstycke tilldelas ett bestämdt tecken, beroende på rörelsens riktning). Vårt resultat kan således kort utsägas:

Hastigheten är lika med derivatan af vägen med afseende å tiden.

I enlighet härmed är hastigheten positiv om $s(t)$ växer, d. v. s. om punkten P i det betraktade ögonblicket rör sig i liniens positiva riktning, negativ i det motsatta fallet. Hastigheten anges geometriskt genom en vektor, hvars längd har dess numeriska värde till mätetal och hvars riktning sammanfaller med rörelsens riktning i det betraktade ögonblicket.

Vi betrakta nu hastighetens förändring. Under tidsintervallen $(t, t+\Delta t)$ erhåller hastigheten tillväxten $s'(t+\Delta t) - s'(t)$. Förhållandet mellan denna tillväxt och intervallens längd Δt:

$$\frac{s'(t+\Delta t) - s'(t)}{\Delta t}$$

kallas den rörliga punktens ***medelacceleration*** *under tidsintervallen* $(t, t+\Delta t)$. Härefter införes definitionen:

Med den rörliga punktens ***acceleration*** *i* ***ögonblicket*** t *förstås det gränsvärde hvilket dess medelacceleration under tidsintervallen* $(t, t+\Delta t)$ *närmar sig då intervallens längd* Δt *aftar mot* 0:

$$\textit{accelerationen} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{s'(t+\Delta t) - s'(t)}{\Delta t}.$$

Detta gränsvärde utgör å andra sidan definitionen för derivatan af $s'(t)$ eller den andra derivatan $s''(t)$ af funktionen $s(t)$ för det betraktade värdet t. Alltså:

Accelerationen är lika med derivatan af hastigheten med afseende å tiden, eller lika med den andra derivatan af vägen med afseende å tiden.

Är accelerationen positiv, betyder detta att hastighetens värde ökas, och att den absoluta hastigheten således växer om punkten rör sig i positiv riktning, aftar om punkten rör sig i negativ riktning. Om accelerationen är negativ, är förhållandet omvändt. För att geometriskt angifva accelerationen betjenar man sig jämväl af en vektor, hvars längd har till mätetal accelerationens numeriska värde och hvars riktning sammanfaller med den räta liniens positiva eller negativa riktning, beroende på om accelerationen har positivt eller negativt tecken.

Vi hafva sålunda funnit att rörelselärans båda grundbegrepp, hastighet och acceleration, direkt återföras till begreppet derivata.

Vi tillämpa det sagda på några enkla exempel.

Om i den materiella punktens *rörelseekvation* (59) funktionen $s(t)$ är ett polynom af första graden:

$$s(t) = at + b,$$

har $s'(t)$ det konstanta värdet a och $s''(t) = 0$. I detta fall är således rörelsen *likformig*; hastigheten är lika med koefficienten a, och koefficienten $b = s(0)$ anger punktens läge vid tiden $t = 0$.

Vi antaga nu att $s(t)$ är ett polynom af andra graden:

$$s(t) = at^2 + bt + c.$$

Härur följer

$$s'(t) = 2at + b, \quad s''(t) = 2a.$$

Accelerationen är konstant $= 2a$ och punktens rörelse således

likformigt accelererad. Koefficienterna $c = s(0)$ och $b = s'(0)$ angifva punktens läge och hastighet vid tiden $t = 0$.

Då funktionen $s(t)$ är bekant kan man sålunda alltid bestämma rörelsens hastighet och acceleration.

I mekaniken ställer sig emellertid rörelseproblemet i allmänhet på omvändt sätt: man känner den *kraft* som verkar på den materiella punkten och vill härur bestämma punktens rörelse.

Vi antaga här att kraften F verkar längs den räta linie utmed hvilken punkten rör sig, och betrakta densamma såsom positiv eller negativ, beroende på om dess riktning sammanfaller med liniens positiva eller negativa riktning; F är i allmänhet en funktion såväl af tiden t som af punktens läge, d. v. s. af s.

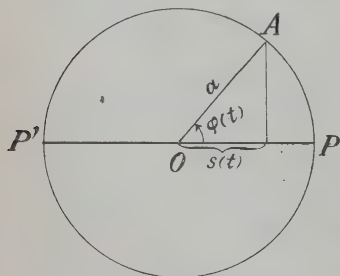
Dynamikens grundlag utsäger i detta fall följande:

Den materiella punkten rör sig sålunda att produkten af dess massa m och dess acceleration i hvarje ögonblick till storlek och tecken öfverensstämmer med den verkande kraften:

$$ms''(t) = F. \tag{60}$$

Denna likhet utgör rörelsens *differentialekvation*, ur hvilken man har att bestämma funktionen $s(t)$ och därmed punktens rörelse, då dess läge och hastighet äro gifna vid en viss tidpunkt.

Vi tillämpa det sagda på rörelsen hos en partikel i ett elastiskt medium. Vi antaga att den betraktade partikeln, hvars jämviktsläge må vara O, aflägsnas till en närbelägen punkt P och därefter lemnas att fritt röra sig under inverkan af den elastiska kraften. Partikeln kommer då att oscillera kring sitt jämviktsläge längs den genom O och P gående räta linien. Vi beteckna med $s(t)$ dess afstånd från O vid tiden t, räknadt positivt i riktningen OP, negativt i den motsatta riktningen.



Den elastiska kraft som verkar på den betraktade par-

tikeln är proportionell mot dess massa m, och kan äfven antagas proportionell mot dess afstånd från jämviktsläget, om detta afstånd är tillräckligt litet. Vi kunna således i (60) sätta

$$F = -k^2 m\, s(t),$$

där k^2 är en af mediets elasticitet beroende positiv konstant. Tecknet $-$ härrör däraf att kraften alltid är riktad mot partikelns jämviktsläge och således har motsatt tecken mot $s(t)$. Rörelsens differentialekvation blir sålunda $ms''(t) = -k^2 m\, s(t)$, eller

(61) $$s''(t) = -k^2 s(t).$$

Vi räkna tiden t från det ögonblick då den rörliga partikeln öfverlemnas åt sig själf. Dess begynnelsehastighet antages $= 0$, och vi hafva således, om vi beteckna afståndet OP med a,

(62) $$s(0) = a, \quad s'(0) = 0.$$

Partikelns läge bestämmes vid hvarje tidpunkt t af den funktion $s(t)$ som uppfyller villkoren (61) och (62).

För att finna denna funktion, multiplicera vi (61) med $2\, s'(t)$, hvarvid erhålles

$$2\, s'(t)\, s''(t) = -2k^2 s(t)\, s'(t).$$

Här utgör venstra membrum derivatan af funktionen $s'(t)^2$, högra membrum derivatan af funktionen $-k^2 s(t)^2$. Dessa funktioners derivator öfverensstämma således för hvarje värde t, och enligt satsen s. 294 sluta vi häraf att funktionernas skillnad

$$s'(t)^2 + k^2 s(t)^2$$

bibehåller ett konstant värde under rörelsen. Enligt begynnelsevillkoren (62) är denna skillnad för $t = 0$ lika med $k^2 a^2$. Dess värde är således lika med $k^2 a^2$ för hvarje värde t, hvaraf följer

(63) $$s'(t)^2 = k^2 \left(a^2 - s(t)^2\right).$$

Då venstra membrum i denna likhet utgöres af en kvadrat och således icke kan blifva negativt, sluta vi främst att $s(t)^2 \leq a^2$ eller $|s(t)| \leq a$ för hvarje värde t. Den rörliga partikeln befinner sig således ständigt på sträckan PP', då vi med P' beteckna den punkt som ligger symmetriskt till P med afseende å punkten O (se figuren s. 308).

I början rör sig partikeln i riktning från P till O och dess hastighet $s'(t)$ är alltså negativ. Enligt (63) är således

$$s'(t) = -k\sqrt{a^2 - s(t)^2}.$$

Vi se att hastighetens absoluta värde ständigt ökas ända tills partikeln kommer till punkten O, där $|s'(t)|$ uppnår sitt maximum ka. Härefter aftar $|s'(t)|$ ständigt och blir 0 då partikeln uppnår punkten P', där $s(t) = -a$. Under inverkan af den elastiska kraften börjar partikeln härefter att röra sig tillbaka mot jämviktsläget, alltså i positiv riktning, och hastigheten är nu

$$s'(t) = +k\sqrt{a^2 - s(t)^2}.$$

Den uppnår åter sitt största värde ka i O, aftar därefter och blir 0 då partikeln kommit tillbaka till begynnelsepunkten P. Härefter fortsättes rörelsen såsom i början, och vi se således att *den rörliga partikeln oscillerar periodiskt mellan punkterna P och P'*. Längden $OP = a$ benämnes oscillationens *amplitud*.

För att enklast erhålla uttrycket för funktionen $s(t)$ sätta vi i (63).

(64) $$s(t) = a\cos\varphi(t),$$

hvarvid $\varphi(t)$ betyder den i figuren s. 308 utmärkta vinkeln. Vi få då $s'(t) = -a\sin\varphi(t) \cdot \varphi'(t)$ och nämnda ekvation antar den enkla formen $\varphi'(t)^2 = k^2$. Om vinkeln $\varphi(t)$ väljes såsom i figuren är angifvet, är dess värde 0 för $t = 0$ och växer samtidigt med t. Dess derivata är således positiv, hvaraf följer att

$$\varphi'(t) = k.$$

I denna likhet utgör venstra membrum derivatan af $\varphi(t)$, högra membrum derivatan af kt. Enligt satsen s. 294 är

således skillnaden $\varphi(t)-kt$ konstant, och då den för $t=0$ har värdet 0, är den ständigt lika med 0, hvaraf följer

(65) $$\varphi(t)=kt$$

och således enligt (64)

(66) $$s(t)=a\cos kt.$$

Härmed är problemet fullständigt löst.

Likheten (66) visar att $s(t)$ aftar från a till $-a$ och den betraktade partikeln sålunda rör sig från punkten P till punkten P' då kt växer från 0 till π, eller t från 0 till $\frac{\pi}{k}$. Alltså är $T=\frac{\pi}{k}$ *tiden för en enkel svängning*, och $2T=\frac{2\pi}{k}$ utgör rörelsens *period*. Om vi i likheten (66) införa $k=\frac{\pi}{T}$, antar den formen

(66)′ $$s(t)=a\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right).$$

Enklast framgår rörelsens natur ur likheten (65), som visar att vinkeln $\varphi(t)$ likformigt växer från 0 till 2π då t växer från 0 till $2T$. Om vi tänka oss en punkt A röra sig med konstant hastighet längs periferin af cirkeln med PP' såsom diameter (jmf. figuren s. 308), sålunda att den beskrifver ett hvarf af periferin under tiden $2T=\frac{2\pi}{k}$ och vid tiden $t=0$ befinner sig i punkten P, anger således projektionen af denna punkt A på linien PP' i hvarje ögonblick den rörliga partikelns läge.

Öfningsuppgifter:

1) Undersök med stöd af likheten (66) hastigheten och accelerationen i den ofvan betraktade rörelsen.

2) Bestäm med hjälp af differentialkalkylen rörelsen hos en kropp som kastas lodrätt uppåt med en gifven begynnelsehastighet.

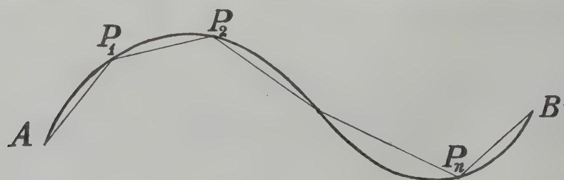
Sjette kapitlet.

Begreppen längd, area, volym.

58. **Definition af en kurvbåges längd.** — I läran om rätliniga sträckors mätning visas att, om en viss sträcka e väljes till *längdenhet*, hvarje gifven sträcka erhåller ett bestämdt *mätetal*, som anger dess storlek eller längd i förhållande till e, samt att omvändt mot hvarje gifvet positivt tal svarar en sträcka hvars mätetal är lika med detta tal. En sträcka som är kommensurabel med e har ett rationellt mätetal, medan mätetalet för en med e inkommensurabel sträcka definieras såsom det irrationella tal som är större än mätetalet för hvarje med e kommensurabel sträcka som utgör en del af den gifna, men mindre än mätetalet för hvarje dylik sträcka hvilken innehåller den gifna såsom en del. — Vi återkomma utförligare till denna fråga i slutet af det åttonde kapitlet.

Vi skola här visa huru man, med stöd af läran om sträckors mätning, utsträcker begreppet längd till kroklinier.

Vi betrakta en båge AB af en kontinuerlig kurva, välja på densamma ett antal punkter, hvilka vi, i den ordning i hvilken de följa på hvarandra då kurvan genomlöpes från



A till B, beteckna med $P_1, P_2, \ldots, P_n$, och sammanbinda punkterna A och P_1, P_1 och $P_2, \ldots, P_n$ och B medels rätliniga sträckor. Vi erhålla sålunda en i kurvbågen AB in-

skrifven bruten linie, $AP_1P_2\ldots P_nB$; dennas längd utgöres af en rätlinig sträcka som är lika med summan af sträckorna $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_nB$.

För hvarje val af punkterna P erhålles sålunda en inskrifven bruten linie, och genom att öka punkternas antal och välja dem på lämpligt sätt kan man, under förutsättning af en viss regularitet hos kurvan, konstruera dylika linier i hvilka hvarje sida är kortare än en på förhand gifven, godtyckligt liten sträcka. Man kan äfven på olika sätt definiera ett förfaringssätt eller en *lag*[1]), hvars tillämpning leder till en fullt bestämd, obegränsad räcka af inskrifna brutna linier, i hvilka sidornas antal växer öfver hvarje gräns och deras längder samtidigt aftaga mot 0.

Vi uppställa nu följande allmänna definition:

Definition. — *Med längden af en båge AB af en kontinuerlig kurva förstås den gräns till hvilken längden af en i denna båge inskrifven bruten linie närmar sig, då antalet af dess sidor obegränsadt ökas, enligt en sådan lag att samtliga sidor slutligen blifva kortare än hvilken uppgifven sträcka som helst.*

Denna definition förutsätter, dels att ifrågavarande gräns verkligen existerar, dels att man alltid erhåller samma gräns hvilken lag än föreskrifves för konstruktionen af de successiva brutna linierna, blott den är sådan att samtliga sidor aftaga mot 0. Man kan visa att dessa förutsättningar äro uppfyllda för kurvor af mycket allmän natur, men vi genomföra undersökningen här endast för det fall då den gifna kurvbågen AB har följande egenskaper:

I. Den har i hvarje punkt en tangent.

II. Riktningen af denna tangent varierar kontinuerligt med tangeringspunktens läge.

III. Bågen AB är *konvex*, d. v. s. om man drar en god-

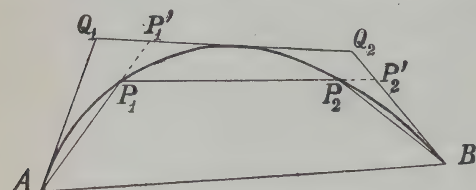
---

[1]) Exempelvis kan man, utgående från en gifven inskrifven linie $AP_1\ldots P_nB$, mellan två på hvarandra följande af dess hörnpunkter inskjuta en ny punkt på kurvan som har samma afstånd från dessa, sålunda att, om de nya punkterna i ordning betecknas med $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n+1}$, man har $AQ_1 = Q_1P_1, P_1Q_2 = Q_2P_2, \ldots, P_nQ_{n+1} = Q_{n+1}B$, samt härefter på den brutna linien $AQ_1P_1Q_2\ldots P_nQ_{n+1}B$ tillämpa samma förfarande, o. s. v. in infinitum.

tycklig tangent till densamma, ligga alla dess punkter, med undantag af tangeringspunkten, på samma sida om denna tangent.

Ur det sista villkoret följer, såsom man lätt inser, att bågen AB icke skäres af någon rät linie i flere än två punkter [1].

Vi betrakta å ena sidan alla möjliga i bågen AB inskrifna brutna linier, å andra sidan de kring densamma omskrifna brutna linierna (hvilka falla på samma sida om kordan AB som den gifna bågen). Enhvar af dessa linier bildar tillsammans med kordan AB perimetern af en konvex polygon; den mot en inskrifven linie svarande polygonens yta utgör en del af den yta som begränsas af en godtycklig omskrifven linie och kordan AB.



För dessa in- och omskrifna brutna linier gälla följande satser:

1°. *Hvarje omskrifven bruten linies längd är större än längden af hvarje inskrifven bruten linie.*

Vi föra beviset för de i ofvanstående figur angifna linierna AQ_1Q_2B och AP_1P_2B. Vi förlänga sidorna AP_1 och P_1P_2 i den inskrifna linien utöfver P_1 och P_2 tills de råka den omskrifna linien, i punkterna P_1' och P_2'. Emedan en rätlinig sträcka är kortare än hvarje bruten linie med samma ändpunkter, erhålles

$$AQ_1 + Q_1P_1' > AP_1'$$

och således

$$\text{längden af } AQ_1Q_2B > \text{längden af } AP_1'Q_2B.$$

På samma grund erhålles vidare

$$P_1P_1' + P_1'Q_2 + Q_2P_2' > P_1P_2',$$

hvaraf följer

$$\text{längden af } AP_1'Q_2B > \text{längden af } AP_1P_2'B.$$

[1]) Vi kunna här och i det följande icke närmare ingå på bevisen för de satser ur elementargeometrin på hvilka vår framställning stöder sig.

Slutligen är

$$P_2P_2' + P_2'B > P_2B,$$

och följaktligen

$$\text{längden af } AP_1P_2'B > \text{längden af } AP_1P_2B.$$

Genom sammanställning af dessa resultat erhålles

$$\text{längden af } AQ_1Q_2B > \text{längden af } AP_1P_2B,$$

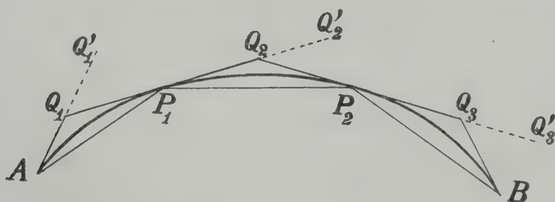
hvilket utgör den sökta olikheten.

2°. *Det är alltid möjligt att konstruera en omskrifven bruten linie som är kortare än en gifven omskrifven linie, och en inskrifven bruten linie som är längre än en gifven dylik linie.*

Man behöfver nämligen endast afskära ett hörn af den gifna omskrifna linien medels en tangent till kurvan, samt till den inskrifna liniens hörnpunkter foga en ny punkt af kurvan.

3°. *Man kan konstruera en omskrifven och en inskrifven bruten linie på sådant sätt att skillnaden mellan deras längder är mindre än en på förhand gifven, godtyckligt liten sträcka* ε.

Vi konstruera en in- och en omskrifven bruten linie sålunda att den förras hörnpunkter utgöra tangeringspunkter för den senares sidor (linierna AP_1P_2B och $AQ_1Q_2Q_3B$ i nedanstående figur). Vi betrakta de trianglar hvilka stå på den inskrifna liniens sidor, och beteckna med σ *den största af basvinklarna i dessa trianglar.* Ur den första triangeln erhålles



$$AP_1 = AQ_1 \cos Q_1AP_1 + Q_1P_1 \cos Q_1P_1A > (AQ_1 + Q_1P_1) \cos\sigma,$$

och de följande trianglarna gifva på samma sätt olikheterna

$$P_1P_2 \geqq (P_1Q_2 + Q_2P_2) \cos\sigma,$$

$$P_2B > (P_2Q_3 + Q_3B) \cos\sigma.$$

Då dessa olikheter adderas, erhålles till resultat

$$p \geqq P \cos \sigma,$$

där p betecknar längden af den inskrifna och P längden af den omskrifna brutna linien.

Tidigare har visats att $P > p$. Vi hafva således

$$P > p \geqq P \cos \sigma,$$

hvarur följer

$$P - p \leqq P - P \cos \sigma = P(1 - \cos \sigma),$$

eller ännu, då $P \leqq \frac{p}{\cos \sigma}$,

$$(1) \qquad P - p \leqq \frac{1 - \cos \sigma}{\cos \sigma} p.$$

Faktorn $\frac{1 - \cos \sigma}{\cos \sigma}$ närmar sig 0 samtidigt med σ, medan p alltid är mindre än en viss ändlig sträcka, t. ex. mindre än längden af en godtyckligt vald omskrifven bruten linie. Häraf följer att, om ε är en gifven, godtyckligt liten sträcka, man kan bestämma en sådan vinkel τ att

$$P - p < \varepsilon \quad \text{om} \quad \sigma < \tau.$$

Då enligt vårt antagande riktningsvinkeln för tangenten till bågen AB varierar kontinuerligt med tangeringspunktens läge, är det möjligt (jmf. satsen s. 39) att bestämma en sådan sträcka δ att, om man på AB väljer två godtyckliga punkter hvilkas afstånd är kortare än δ, vinkeln mellan tangenterna i dessa punkter är mindre än τ. Om den inskrifna brutna linien p konstruerats så att enhvar af dess sidor är kortare än sträckan δ, äro då i figuren vinklarna $Q'_1 Q_1 P_1$, $Q'_2 Q_2 P_2$, o. s. v. samtligen mindre än τ, och detsamma gäller således *a fortiori* om basvinklarna i de trianglar som stå på den inskrifna brutna liniens sidor. Nu betecknade σ den största af dessa basvinklar, och vi kunna således sluta att $\sigma < \tau$ om hvarje sida i den inskrifna brutna linien är kortare än sträckan δ.

Då denna slutsats sammanställes med den föregående, erhålles till resultat att $P-p<\varepsilon$ så snart hvarje sida i den inskrifna linien är kortare än δ, och härmed är påståendet 3° bevisadt.

Vi betrakta nu de två oändliga talmängder af hvilka den ena omfattar mätetalen för alla i bågen AB inskrifna brutna liniers längder i förhållande till den antagna längdenheten e, den andra mätetalen för alla kring AB omskrifna brutna liniers längder. Af hvad ofvan bevisats följer att vi på dessa talmängder kunna tillämpa satsen s. 87, hvilken lär oss att det finnes ett och endast ett tal som *åtskiljer* ifrågavarande mängder, d. v. s. är större än mätetalet för hvarje inskrifven linies längd och mindre än mätetalet för hvarje omskrifven linies längd.

Vi beteckna med L en rätlinig sträcka hvars mätetal är lika med det sålunda definierade talet. Denna sträcka L är, enligt hvad ofvan bevisats, längre än hvarje i AB inskrifven bruten linie och kortare än hvarje kring samma båge omskrifven bruten linie:

$$p<L<P.$$

Skillnaden $L-p$ är alltså mindre än $P-p$, och om sträckan δ väljes såsom ofvan angifvits, är således $L-p<\varepsilon$ så snart hvarje sida i den inskrifna brutna linien är kortare än δ. Om dennas sidotal obegränsadt ökas, enligt en sådan lag att samtliga sidor slutligen blifva kortare än hvilken uppgifven sträcka som helst, närmar sig dess längd p följaktligen gränsen L. Detsamma gäller äfven om längden P af den omskrifna brutna linien.

Enligt definitionen s. 313 utgör således sträckan L den betraktade kurvbågens längd.

Ur (1) följer vidare, då skillnaden $L-p$ är mindre än $P-p$ och p mindre än L, olikheten

$$\frac{L-p}{L}<\frac{1-\cos\sigma}{\cos\sigma},$$

som utsäger att *längden p af en i kurvbågen AB inskrifven bruten linie ger ett närmevärde för bågens längd L hvars relativa*

fel är mindre än $\frac{1-\cos\sigma}{\cos\sigma}$, där vinkeln σ har den ofvan angifna betydelsen. Samma resultat erhålles för en omskrifven bruten linie.

59. **En elementär metod för beräkningen af talet π.** — De tre förutsättningar hvilka s. 313 gjordes om den betraktade kurvan, äro uppfyllda för hvarje cirkelbåge. Vi kunna således af föregående paragraf sluta att en cirkelbåge har en bestämd längd, som är större än längden af hvarje i denna båge inskrifven men mindre än längden af hvarje kring densamma omskrifven bruten linie. Speciellt är således en cirkelbåge längre än dess korda, men kortare än den brutna linie som bildas af tangenterna i dess ändpunkter, om dess gradtal är $< 180^0$ (jmf. s. 191).

Af det ofvan bevisade följer vidare att längden af en inskrifven bruten linie ger ett närmevärde för cirkelbågens längd hvars relativa fel är mindre än $\frac{1-\cos\sigma}{\cos\sigma}$, där σ i förevarande fall betecknar hälften af den största bland de centrivinklar som svara mot den brutna liniens sidor.

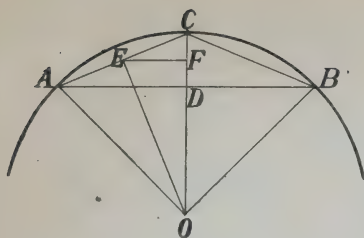
Vi skola här redogöra för en elementär metod att beräkna förhållandet π mellan cirkelperiferins längd och dess diameter, hvilken leder till jämförelsevis enkla räkningar.

Om vi välja cirkelns radie till längdenhet och med p_n och P_n beteckna halfva mätetalen för de in- och omskrifna reguliära n-hörningarnas perimetrar; är enligt hvad ofvan sagts $p_n < \pi < P_n$ för hvarje index n, samt

$$\lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} P_n = \pi .$$

Enligt den metod vi afse har man att, utgående från ett visst värde k, successivt beräkna p_k och P_k, p_{2k} och P_{2k}, p_{4k} och P_{4k}, o. s. v., tills de erhållna tvenne värdena sammanfalla, med den noggrannhet som antagits vid räkningen.

Två på hvarandra följande af nämnda värdepar äro bundna genom vissa enkla relationer hvilka vi främst böra



härleda. I bredvidstående figur må AB vara en sida i den inskrifna reguliära n-hörningen. Draga vi OC vinkelrätt mot AB, är då AC en sida i den inskrifna reguliära $2n$-hörningen. Vi draga vidare OE vinkelrätt mot AC och EF vinkelrätt mot OC. Då är $AE = EC$ och $DF = FC$, hvaraf $OF = \frac{1}{2}(OD + OC)$.

Den inskrifna n-hörningens apotem är OD, den inskrifna $2n$-hörningens apotem OE; de omskrifna månghörningarna hafva åter till apotem cirkelns radie. Då perimetrarna af tvenne reguliära polygoner med samma sidoantal, och således äfven deras halfva perimetrar, förhålla sig såsom apotemen, erhållas likheterna

$$(2) \qquad \frac{p_n}{P_n} = \frac{OD}{OC}, \quad \frac{p_{2n}}{P_{2n}} = \frac{OE}{OC}.$$

Å andra sidan gifva oss de likformiga trianglarna OCE och ACD

$$(3) \qquad \frac{OE}{OC} = \frac{AD}{AC} = \frac{n\,.\,AD}{n\,.\,AC} = \frac{p_n}{p_{2n}},$$

och då denna likhet sammanställes med den senare af likheterna (2), erhålles $p_{2n}^{\;2} = p_n P_{2n}$, eller

$$(4) \qquad \frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_n} \cdot \frac{1}{P_{2n}}}.$$

En annan enkel relation erhålles på följande sätt. Den första af likheterna (2) ger oss

$$(5) \qquad \frac{OC}{\frac{1}{p_n}} = \frac{OD}{\frac{1}{P_n}} = \frac{\frac{1}{2}(OC + OD)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}\right)} = \frac{OF}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}\right)}.$$

Då trianglarna OCE och OEF äro likformiga, erhålles vidare

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OE}{OC} = \frac{p_{2n}}{P_{2n}},$$

hvilken likhet kan skrifvas

$$\frac{OF}{\frac{1}{P_{2n}}} = \frac{OE}{\frac{1}{p_{2n}}}.$$

Men enligt (3) är det sista uttrycket lika med det första af uttrycken (5), och vi få således

$$\frac{OF}{\frac{1}{P_{2n}}} = \frac{OF}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}\right)},$$

hvaraf slutligen följer

$$(6) \qquad \frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}\right).$$

Sedan $\frac{1}{p_k}$ och $\frac{1}{P_k}$ beräknats, erhåller man således $\frac{1}{P_{2k}}$ genom att taga dessa tals aritmetiska medeltal, och härefter erhålles, enligt (4), $\frac{1}{p_{2k}}$ såsom det geometriska medeltalet till $\frac{1}{p_k}$ och $\frac{1}{P_{2k}}$. Ur $\frac{1}{p_{2k}}$ och $\frac{1}{P_{2k}}$ beräknas på enahanda sätt $\frac{1}{P_{4k}}$ och $\frac{1}{p_{4k}}$, o. s. v. Hela kalkylen reducerar sig sålunda till en successiv beräkning af aritmetiska och geometriska medeltal. För att erhålla de senare kan man med fördel använda formeln (19) s. 147.

Vi utgå från de in- och omskrifna reguliära sexhörningarna, och ställa räkningen med sju decimaler. Man har då

$$\frac{1}{P_6} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,2886751,$$

$$\frac{1}{p_6} = \frac{1}{3} = 0,3333333.$$

Enligt (6) och (4) erhålles härur

$$\frac{1}{P_{12}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_6} + \frac{1}{p_6}\right) = 0,3110042,$$

$$\frac{1}{p_{12}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{P_{12}}} = 0{,}3219753\,(-)\,,$$

$$\frac{1}{P_{24}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_{12}} + \frac{1}{p_{12}}\right) = 0{,}3164897\,(+)\,.$$

För att beräkna

$$\frac{1}{p_{24}} = \sqrt{\frac{1}{p_{12}} \cdot \frac{1}{P_{24}}}$$

använda vi formlerna s. 147. Om vi sätta $a = \frac{1}{p_{12}}$, $b = \frac{1}{P_{24}}$, erhållas för kvantiteterna M och $\frac{\delta}{2}$ värdena

$$M = 0{,}31923250\,,\ \frac{\delta}{2} = 0{,}0027428\,,$$

och härur följer enkelt med användande af de förkortade räknesätten, om räkningen utföres med åtta decimaler,

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = 0{,}00000752\,,\quad \frac{1}{2M}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = 0{,}00001178\,.$$

Man öfvertygar sig omedelbart om att den sista termen i formeln (19) endast inverkar på den tionde decimalen och därför icke behöfver uträknas. Vi få således

$$\frac{1}{p_{24}} = M - \frac{1}{2M}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = 0{,}3192207\,.$$

Enligt (6) erhålles härefter

$$\frac{1}{P_{48}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_{24}} + \frac{1}{p_{24}}\right) = 0{,}3178552\,.$$

För beräkningen af

$$\frac{1}{p_{48}} = \sqrt{\frac{1}{p_{24}} \cdot \frac{1}{P_{48}}}$$

gifva oss formlerna s. 147

$$M = 0{,}31853795\,,\ \frac{\delta}{2} = 0{,}000683\,,\ \frac{1}{2M}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = 0{,}0000073\,,$$

hvarur följer, då resultatet afkortas till sju decimaler,

$$\frac{1}{p_{48}} = 0{,}3185372\,.$$

Formeln (6) ger oss härefter

$$\frac{1}{P_{96}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_{48}} + \frac{1}{p_{48}}\right) = 0{,}3181962\,.$$

Det följande uttrycket

$$\frac{1}{p_{96}} = \sqrt{\frac{1}{p_{48}} \cdot \frac{1}{P_{96}}}$$

beräkna vi åter enligt formlerna s. 147, hvilka gifva oss

$$M = 0{,}31836670\,,\ \frac{\delta}{2} = 0{,}00017\,,\ \frac{1}{2M}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{45}{10^9}\,,$$

och således, vid afkortning till sju decimaler,

$$\frac{1}{p_{96}} = 0{,}3183667\,.$$

Såsom häraf synes, kommer vid räkningens fortsättning den andra termen i formeln (19) s. 147 icke vidare att inverka på den sjunde decimalen, så att följaktligen det geometriska medeltalet, med den för räkningen föreskrifna graden af noggrannhet, sammanfaller med det aritmetiska medeltalet. Hela den återstående kalkylen reducerar sig således till beräkningen af successiva aritmetiska medeltal.

Man behöfver emellertid icke utföra dessa operationer, utan kan direkt angifva det slutliga gränsvärdet för de ifrågavarande medeltalen. Ty om vi för korthetens skull sätta

$$\frac{1}{P_{96}} = a\,,\ \frac{1}{p_{96}} = a + \Delta\,,$$

hvarvid a och Δ hafva värdena

$$a = 0{,}3181962\,,\quad \Delta = 0{,}0001705\,,$$

erhålles efterhand

$$\frac{1}{P_{192}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_{96}} + \frac{1}{p_{96}}\right) = a + \Delta - \frac{\Delta}{2},$$

$$\frac{1}{p_{192}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_{96}} + \frac{1}{P_{192}}\right) = a + \Delta - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{4},$$

$$\frac{1}{P_{384}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_{192}} + \frac{1}{p_{192}}\right) = a + \Delta - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{4} - \frac{\Delta}{8},$$

o. s. v. Gränsvärdet för dessa uttryck är

$$a + \left(\Delta - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{4} - \frac{\Delta}{8} + \cdots\right) = a + \frac{\Delta}{1 + \frac{1}{2}} = a + \frac{2}{3}\Delta = 0,3183099\,.$$

Sistnämnda värde utgör således det närmevärde vår beräkning ger för talet $\frac{1}{\pi}$. Då den sista decimalen icke är säker, kan felet i det närmevärde som härur erhålles för talet π uppgå till någon enhet af den sjette decimalen (jmf. s. 133). Vid afkortning till sex decimaler erhålles

$$\pi = 3,141593\,,$$

hvilket värde faktiskt skiljer sig från det riktiga med mindre än en half enhet af den sista decimalen.

Öfningsuppgift. — Bevisa att längden af den båge af den logaritmiska spiralen $r = Ce^{k\varphi}$, $(k > 0)$, som svarar mot vinkeln $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$, är lika med

$$C\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\left(e^{k\varphi_1} - e^{k\varphi_0}\right).$$

För uppgiftens lösning bör observeras att, om nämnda vinkel delas i lika stora delar, längderna af de motsvarande kordorna till den logaritmiska spiralen bilda en geometrisk progression.

Tolka detta resultat geometriskt, och härled detsamma medels differentialgeometrisk betraktelse (jmf. uppgiften (2) s. 285).

60. **Om plana ytors mätning. Arean af en plan polygon.** — Med stöd af geometrins axiom kan man bevisa att hvarje kontinuerlig sluten kurva, som icke skär sig själf, delar planet i tvenne från hvarandra skilda delar, en inre och en yttre. Den inre delen är en ändlig yta, begränsad af den gifna kurvan.

Vi förelägga oss det allmänna problemet att *mäta* dylika ytor [1]), d. v. s. att jämföra dem med en viss gifven yta, den s. k. *ytenheten*, hvartill lämpligen väljes en kvadrat hvars sida är lika med den sträcka e som valts till längdenhet.

Resultatet af mätningen är ett tal som anger den betraktade ytans storlek eller area i förhållande till ytenheten, och hvilket benämnes ytans *mätetal*.

För att mätningens resultat skola stå i öfverensstämmelse med vår på åskådningen grundade föreställning om ytors storlek, måste de mätetal vi sålunda tillordna de plana ytorna uppfylla följande villkor:

(I). *Tvenne kongruenta ytor böra erhålla samma mätetal.*

(II). *Om en yta är delad i två eller flere delar, bör dess mätetal vara lika med summan af delarnas mätetal, och större än mätetalet för hvarje enskild del.*

(III). *Ytenheten tilldelas mätetalet* 1.

Vi skola se att dessa villkor entydigt bestämma mätetalet för hvarje plan yta hvars begränsningslinie uppfyller en viss förutsättning af mycket allmän natur.

Vi göra början med det fall då begränsningslinien är sammansatt af ett ändligt antal rätliniga sträckor och den betraktade ytan således är *en plan polygon*. Bland polygonerna åter betrakta vi först dem som enklast kunna jämföras med ytenheten, nämligen *de rektanglar hvilka hafva längdenheten e till bas*. Vi beteckna allmänt med R en dylik rektangel, med H dess höjd.

Om höjdens mätetal i förhållande till e är ett helt tal m, kan R medels räta linier parallella med basen delas i m kvadrater, kongruenta med ytenheten. Enligt villkoren (I)—(III) bör således rektangeln R i detta fall erhålla mätetalet m.

Innehålles åter H exakt n gånger i e, i hvilket fall dess mätetal är $\frac{1}{n}$, kan ytenheten delas i n delar af hvilka enhvar

---

[1]) Det följande gäller likaväl för ytor som begränsas af flere randkurvor (t. ex. ytan mellan två koncentriska cirklar). Den inskränkning vi här göra afser endast att förenkla uttryckssättet och beteckningen.

är kongruent med R. Enligt (I)—(III) är då mätetalet för R en n^{te} del af ytenhetens mätetal, alltså $=\frac{1}{n}$.

Vi antaga nu allmänt att H är kommensurabel med längdenheten och dess mätetal $=\frac{m}{n}$. Vi kunna då dela R i m sinsemellan kongruenta rektanglar hvilka, såsom just visats, enhvar hafva mätetalet $\frac{1}{n}$. Enligt (II) är således mätetalet för ytan af rektangeln R lika med $\frac{m}{n}$, alltså detsamma som mätetalet för rektangelns höjd i förhållande till längdenheten e.

Låt slutligen höjden H i rektangeln R vara inkommensurabel med längdenheten, i hvilket fall dess mätetal är ett irrationellt tal γ. Vi beteckna med (α) och (β) den undre och den öfre af de klasser af positiva rationella tal hvilka åtskiljas af talet γ (jmf. s. 84). Om vi, med basen i rektangeln R såsom bas, upprita en rektangel hvars höjd har till mätetal ett tal ur klassen (α), och en annan rektangel hvars höjd har till mätetal ett tal β, utgör den förra rektangeln en del af R, medan den senare rektangeln innehåller R såsom en del. Enligt (II) bör således mätetalet för R vara större än den förra rektangelns mätetal, mindre än den senares mätetal, alltså större än α, mindre än β, och detta huru än talen α och β väljas inom sina resp. klasser. Men γ är det enda tal som besitter dessa egenskaper, och rektangeln R bör således tilldelas mätetalet γ.

Enligt villkoren (I)—(III) tillkommer således hvarje gifven rektangel R med längdenheten såsom bas ett fullt bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten, hvilket är lika med mätetalet för rektangelns höjd i förhållande till längdenheten.

Vi gå nu till allmännare polygoner och införa härvid, för att ernå ett kort uttryckssätt, begreppet *ekvivalens*, hvilket definieras som följer:

Tvenne polygoner sägas vara ekvivalenta[1]) *om de antingen äro kongruenta eller medels räta linier kunna delas i ett ändligt antal parvis kongruenta delar.*

[1]) Tyska språket har för detta begrepp den uttrycksfullare termen „zerlegungsgleich“.

Af villkoren (I) och (II) följer att två ekvivalenta polygoner böra erhålla samma mätetal.

Vårt närmaste mål är nu att visa att, *bland alla de rektanglar R hvilka stå på längdenheten såsom bas, finnes en och endast en som är ekvivalent med en gifven polygon.* I sådant afseende hafva vi främst att göra några anmärkningar beträffande ekvivalensbegreppet.

Om polygonen P är sammansatt af delpolygonerna P_1, $P_2, \ldots, P_n$, polygonen P' af delpolygonerna $P_1', P_2', \ldots, P_n'$, och om P_1 är ekvivalent med P_1', P_2 med $P_2', \ldots, P_n$ med P_n', äro tydligen äfven de gifna polygonerna P och P' ekvivalenta. Vidare tillkommer ekvivalensbegreppet följande viktiga egenskap:

Om två polygoner P_1 och P_2 äro ekvivalenta med en och samma polygon P, äro de äfven sinsemellan ekvivalenta.

Enligt antagandet kunna P och P_1 delas i parvis kongruenta delpolygoner, $p_1, p_2, \ldots, p_l$, och likaså kunna P och P_2 delas i parvis kongruenta delpolygoner, $p_1', p_2', \ldots, p_m'$. De två delningarna af polygonen P verkställas i allmänhet medels olika system af räta linier. Om vi samtidigt införa båda dessa system, sönderfaller P i ett antal delar hvilka vi beteckna med $p_1'', p_2'', \ldots, p_n''$.

Hvarje polygon p_ν som erhålles vid den första indelningen af P är sammansatt af vissa bland delarna p''. Vi införa motsvarande delningslinier i den med p_ν kongruenta delen af P_1, och tillämpa detta förfarande för enhvar af polygonerna $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Härvid sönderfaller P_1 i delar hvilka äro kongruenta med hvar sin af delarna $p_1'', p_2'', \ldots, p_n''$.

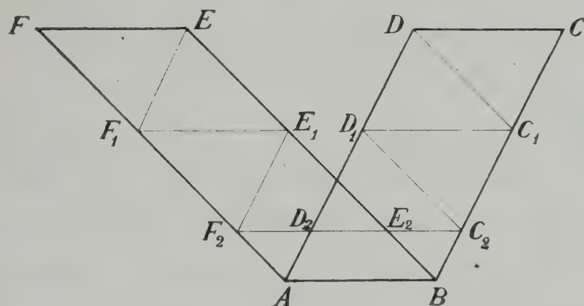
Å andra sidan består jämväl hvarje polygon p_ν', som erhålles vid den senare indelningen af P, af vissa delar p'', och om vi dela den med p_ν' kongruenta polygonen i P_2 på motsvarande sätt och förfara analogt med enhvar af polygonerna $p_1', p_2', \ldots, p_m'$, sönderfaller P_2 i delar kongruenta med hvar sin af delarna $p_1'', p_2'', \ldots, p_n''$.

Polygonerna P_1 och P_2 hafva sålunda medels räta linier delats i ett ändligt antal parvis kongruenta delar, och äro följaktligen ekvivalenta, h. s. b.

Vi bevisa nu en följd af satser om polygoners ekvivalens:

1°. *Parallellogrammer med lika stora baser och höjder äro ekvivalenta.*

De gifna parallellogrammerna flyttas så att deras baser sammanfalla. Om härvid de med basen parallella sidorna hafva någon punkt gemensam, framgår satsens riktighet omedel-



bart. I annat fall draga vi (se ofvanstående figur) DC_1 parallell med EB, härefter C_1D_1 parallell med BA, så åter D_1C_2 parallell med EB, o. s. v., tills vi komma till en punkt på sidan AD (i figuren punkten D_2) som faller inom den andra parallellogrammen eller på dess perimeter. I denna parallellogram draga vi nu EF_1 parallell med DA, F_1E_1 parallell med AB, E_1F_2 parallell med DA, o. s. v. Enligt figuren äro då trianglarna

$$CDC_1,\quad C_1DD_1,\quad C_1D_1C_2,\quad C_2D_1D_2,\quad C_2E_2B$$

i ordning kongruenta med trianglarna

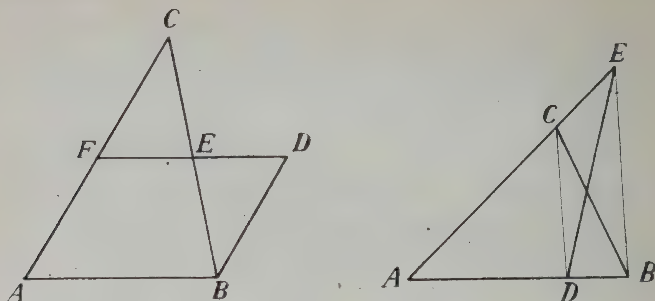
$$EFF_1,\quad E_1EF_1,\quad E_1F_1F_2,\quad E_2E_1F_2,\quad D_2F_2A,$$

medan den återstående delen, fyrhörningen ABE_2D_2, är gemensam för de två parallellogrammerna. Dessa äro således ekvivalenta, h. s. b.

2°. *En triangel är ekvivalent med en parallellogram som har en af dess sidor till bas och hälften af motstående höjdlinie till höjd.*

Detta framgår omedelbart om man jämför den gifna triangeln ABC med parallellogrammen $ABDF$, där F utgör midtpunkten af sidan AC (se den första af figurerna på följande sida). Trianglarna BDE och CFE äro nämligen kon-

gruenta och fyrhörningen $ABEF$ är gemensam för de betraktade figurerna.



Ur satserna 1° och 2° följer såsom korollarium:

3°. *Tvenne trianglar äro ekvivalenta om ett par sidor och motstående höjdlinier äro lika.*

Med stöd häraf bevisa vi åter följande sats:

4°. *En triangel, hvars bas och höjd hafva mätetalen b och h, är ekvivalent med en rektangel som har längdenheten till bas och hvars höjd har mätetalet* $\frac{bh}{2}$.

Den gifna triangeln må vara ABC och AB dess bas (se den senare af ofvanstående figurer). Vi afsätta $AD =$ längdenheten e, draga linien DC, samt härefter BE parallell med DC. Då äro trianglarna CDB och CDE ekvivalenta, ty de hafva sidan CD gemensam och deras motstående höjder äro lika stora. Lägga vi till hvardera af dem triangeln ADC, erhållas trianglarna ABC och ADE, hvilka således äfven äro ekvivalenta.

Då trianglarna ABE och ADC äro likformiga, är förhållandet mellan deras höjder lika med förhållandet mellan deras baser, alltså $= \frac{AB}{AD} = b$. Höjdlinien i triangeln ABE, som tillika utgör höjd i triangeln ADE, har således till mätetal bh.

Enligt 2° är triangeln ADE ekvivalent med en rektangel som har AD till bas och hälften af motstående höjdlinie till höjd, eller, med andra ord, med en rektangel som har längdenheten till bas och hvars höjd har mätetalet $\frac{bh}{2}$. Då den

gifna triangeln ABC, såsom ofvan visades, är ekvivalent med ADE, är den således äfven ekvivalent med nämnda rektangel, h. s. b.

Om b_1 och h_1 beteckna mätetalen för en annan sida i den gifna triangeln och dess motstående höjdlinie, är $\frac{b_1}{b} = \frac{h}{h_1}$ och således $b_1 h_1 = bh$, hvilket bevisas med stöd af likformiga trianglar. I ofvanstående sats 4⁰ erhåller man således samma rektangel, hvilken sida man än uppfattar såsom bas i den gifna triangeln.

Vi betrakta nu en godtycklig plan polygon P. Vi dela densamma på något sätt i trianglar, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, och beteckna med b_1 och h_1, b_2 och $h_2, \ldots, b_n$ och h_n mätetalen för dessa trianglars baser och höjder i förhållande till längdenheten e, hvarvid det är likgiltigt hvilka sidor väljas till baser. Enligt föregående sats är triangeln t_1 ekvivalent med en rektangel med e såsom bas och hvars höjd har mätetalet $\frac{b_1 h_1}{2}$, triangeln t_2 ekvivalent med en rektangel med samma bas och höjden $\frac{b_2 h_2}{2}$, o. s. v. I det vi sammansätta alla dessa rektanglar till en enda, erhålla vi följande resultat:

5⁰. *Polygonen P är ekvivalent med en rektangel som har längdenheten till bas och hvars höjd har mätetalet*

$$\frac{b_1 h_1}{2} + \frac{b_2 h_2}{2} + \cdots + \frac{b_n h_n}{2} = \sum_1^n \frac{b_\nu h_\nu}{2}. \tag{7}$$

En polygon kan emellertid på oändligt många olika sätt delas i trianglar, och det uppstår således frågan om summan (7) alltid erhåller samma värde.

Antag att ifrågavarande summa för tvenne olika indelningar af polygonen P erhåller olika värden. Enligt satsen 5⁰ finnes det då tvenne rektanglar, R_1 och R_2, med längdenheten såsom bas och olika höjder, H_1 och H_2, hvilka hvar för sig äro ekvivalenta med polygonen P. Dessa rektanglar äro således äfven sig emellan ekvivalenta, d. v. s. de kunna delas i parvis kongruenta delpolygoner.

Då höjderna H_1 och H_2 äro olika, utgör emellertid den

ena af rektanglarna R_1 och R_2 en del af den andra, om de flyttas så att baserna sammanfalla. För *åskådningen* synes häraf med nödvändighet följa att R_1 och R_2 icke kunna delas i parvis kongruenta delar. Ty om en sådan delning vore möjlig, skulle hvarje delpolygon i R_1 hafva lika stor yta som den kongruenta delpolygonen i R_2, och ytan af R_1, som utgör summan af dess delpolygoners ytor, vore ju då lika stor som ytan af R_2, som utgör summan af dess delpolygoners ytor, medan å andra sidan de betraktade rektanglarnas ytor måste vara olika stora, då den ena utgör en del af den andra. Utgör icke denna motsägelse ett bevis för att summan (7) alltid erhåller samma värde, huru än polygonen P delas i trianglar?

Mot detta resonemang är att anmärka att det förutsätter det begrepp som det just gäller att definiera, nämligen begreppet *storlek* eller *area* af en plan yta, här närmast af en polygons yta. Detta begrepp utgör för oss tillsvidare ett rent *åskådningsbegrepp*, och vår undersökning går just ut på att för detsamma vinna *en matematisk definition.*

För att logiskt uppbygga begreppet *area* är det således nödvändigt att, uteslutande med stöd af geometrins axiom, bevisa följande sats:

6°. *Huru än polygonen P delas i trianglar, erhåller summan (7) alltid samma värde.*

Satsens bevis kan föras rent geometriskt [1]), men ställer sig öfverskådligare om man gör bruk af den analytiska geometrin samt använder determinantläran. För att icke afbryta framställningen hafva vi gifvit detta bevis plats i en not i slutet af boken.

Ur satsen 6° sluta vi främst att tvenne rektanglar, R_1 och R_2, med längdenheten såsom bas och olika höjder, H_1 och H_2, icke äro ekvivalenta.

Ty vore de ekvivalenta, kunde de äfven delas i parvis kongruenta trianglar, och vid en dylik indelning skulle sum-

[1]) Jmf. t. ex. J. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire*, I, s. 289—293; F. Enriques, *Fragen der Elementargeometrie*, Teil I, Sechster Artikel: *Über die Lehre von der Äquivalenz*.

man (7) erhålla samma värde för dem båda. Enligt nyssnämnda sats skulle då ifrågavarande summa erhålla samma värde för rektanglarna R_1 och R_2, huru dessa än delas i trianglar. Om denna delning verkställes medels en diagonal, finner man emellertid att summan (7) är lika med mätetalet för den betraktade rektangelns höjd, och att den således har olika värden för R_1 och för R_2.

Ur satserna 5⁰ och 6⁰ samt ofvanstående anmärkning följer nu det resultat vi s. 326 ställde i utsikt:

7⁰. *Bland de rektanglar hvilka stå på längdenheten såsom bas finnes det en och endast en, R, som är ekvivalent med en gifven polygon P. Mätetalet för denna rektangels höjd är lika med det värde som summan (7) erhåller då polygonen på något sätt delas i trianglar.*

Enligt villkoren (I) och (II) s. 324 bör polygonen P erhålla samma mätetal som rektangeln R. För denna har redan tidigare erhållits ett bestämdt mätetal, lika med mätetalet för rektangelns höjd i förhållande till längdenheten, och såsom resultat af vår undersökning framgår således följande allmänna *definition* för en polygons mätetal:

Mätetalet för en plan polygons yta i förhållande till ytenheten är lika med det värde som erhålles för summan (7) då polygonen på något sätt delas i trianglar.

För en rektangel med längdenheten till bas öfverensstämmer denna definition med den tidigare uppställda (s. 325), såsom man finner om rektangeln medels en diagonal delas i två trianglar.

Härmed har hvarje plan polygons yta erhållit ett fullt bestämdt mätetal och således en bestämd storlek eller area i förhållande till ytenheten, och vi kunna nu efteråt lätt öfvertyga oss om att villkoren s. 324, hvilka med nödvändighet ledt oss till ofvanstående definition, allmänt och undantagslöst äro uppfyllda för plana polygoners ytor, och att vårt resultat således icke i sig innebär någon motsägelse.

Tvenne kongruenta polygoner hafva, enligt vår definition, säkert samma mätetal, ty de kunna delas i parvis kongruenta trianglar och vid en dylik indelning erhåller sum-

man (7) samma värde för båda polygonerna. Villkoret (I) är således uppfylldt.

Vi antaga för det andra att en polygon P består af vissa delpolygoner, $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Vi kunna då dela P i trianglar sålunda att vi dela polygonerna $P_1, P_2, \ldots, P_n$ hvar för sig i trianglar. Summan $\sum \frac{bh}{2}$ utsträckt öfver alla dessa trianglar ger oss mätetalet för P, samma summa, utsträckt endast öfver de trianglar som innehållas i en delpolygon P_ν, ger oss åter mätetalet för denna delpolygon. Häraf framgår omedelbart att mätetalet för polygonen P är lika med summan af mätetalen för dess delar, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, och således större än mätetalet för hvarje enskild del. Villkoret (II) är således allmänt uppfylldt.

Slutligen är, äfven enligt den allmänna definitionen, mätetalet för ytenheten lika med 1, såsom man finner om man medels en diagonal delar densamma i två trianglar. Villkoret (III) är således äfven uppfylldt.

Teorin för plana polygoners mätning är härmed slutförd. Vi framhålla ännu uttryckligen följande intressanta resultat som framgått ur denna teori:

Tvenne plana polygoner hafva samma mätetal och således lika stora ytor alltid och endast om de äro ekvivalenta.

Ty om polygonerna hafva samma mätetal, äro de, enligt sats 5⁰, ekvivalenta med en och samma rektangel med längdenheten såsom bas och således äfven sig emellan ekvivalenta; och omvändt hafva tvenne ekvivalenta polygoner alltid samma mätetal, ty de kunna delas i parvis kongruenta trianglar och summan (7) har följaktligen samma värde för dem båda.

61. **Arean af en godtyckligt begränsad plan yta.** — Vi betrakta nu en plan yta S, begränsad af en godtycklig kontinuerlig sluten linie som icke skär sig själf, och skola visa att, under ett mycket allmänt antagande beträffande nämnda begränsningslinie, villkoren (I)—(III) s. 324 entydigt bestämma ett mätetal för denna yta i förhållande till den antagna ytenheten.

För detta ändamål betrakta vi å ena sidan de polygoner

som utgöra en del af ytan S, å andra sidan de polygoner hvilka själfva innehålla S såsom en del. Vi benämna kort de förra *inre* polygoner, de senare *yttre* polygoner. Ytan af enhvar af dessa polygoner tillkommer ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten, såsom i föregående paragraf närmare utförts. Vi beteckna allmänt med p mätetalet för en inre polygon, med P mätetalet för en yttre polygon, och hafva då åter tvenne fullt bestämda oändliga talmängder, hvilka kort må betecknas

$$(p) \text{ och } (P).$$

Man kontrollerar omedelbart att dessa uppfylla följande tvenne villkor:

1°. *Hvarje tal p är mindre än hvarje tal P.*

Ty en inre polygon utgör en del af hvilken yttre polygon som helst och har således mindre mätetal än denna.

2°. *Det finnes intet största tal i mängden (p) och intet minsta tal i mängden (P).*

Ty om en inre polygon är gifven, kunna vi alltid finna en annan inre polygon som innehåller den förra såsom en del och således har större mätetal än denna; och likaså kan man, utgående från en yttre polygon, konstruera en annan dylik polygon som utgör en del af den förra och hvars mätetal således är mindre.

Ytan S innehåller hvarje inre polygons yta såsom en del, medan den själf utgör en del af hvarje yttre polygons yta. Enligt (II) bör således mätetalet för ytan S vara större än mätetalet för hvarje inre polygon och samtidigt mindre än mätetalet för hvarje yttre polygon, alltså större än hvarje tal p och mindre än hvarje tal P.

För att dessa villkor entydigt skola bestämma ett tal, erfordras emellertid att mängderna (p) och (P) besitta ännu följande tredje egenskap:

3°. *Om man föreskrifver ett godtyckligt litet positivt tal ε, bör det alltid vara möjligt att välja ett tal ur mängden (p) och ett tal ur mängden (P) på sådant sätt att $P - p < \varepsilon$.*

Detta villkor kan äfven utsägas i följande form:

Begränsningslinien för ytan S bör kunna inneslutas mellan en inre och en yttre polygonal linie, hvilka tillsammans begränsa en godtyckligt liten yta.

Vi betrakta härefter endast sådana ytor S hvilkas randkurvor uppfylla detta villkor. Härigenom uteslutas faktiskt vissa ytor ur betraktelsen, men dessa äro af ytterst komplicerad form och af uteslutande teoretiskt intresse.

Under nämnda förutsättning kunna vi således på talmängderna (p) och (P) tillämpa satsen s. 87, och sluta ur densamma att *det finnes ett och endast ett tal som åtskiljer dessa mängder*. Enligt villkoret (II) bör detta tal tilläggas ytan S såsom mätetal i förhållande till den antagna ytenheten, och vi erhålla alltså följande allmänna *definition:*

Mätetalet för en godtyckligt begränsad plan yta är det fullt bestämda tal som är större än mätetalet för hvarje inre polygons yta och samtidigt mindre än mätetalet för hvarje yttre polygons yta.

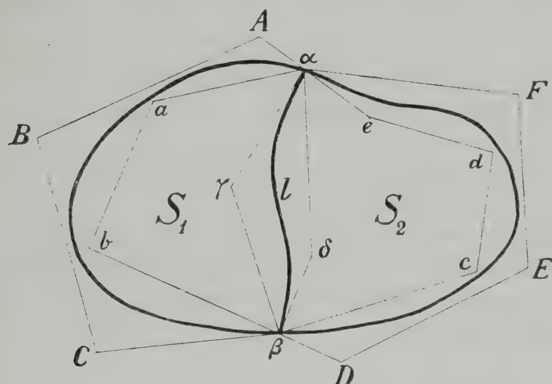
Till hvarje plan yta, hvars begränsningslinie uppfyller det ofvan nämnda allmänna villkoret, är härmed tillordnadt ett bestämdt mätetal och således en bestämd storlek eller area i förhållande till den antagna ytenheten.

Vi böra nu åter kontrollera att det erhållna resultatet står i full öfverensstämmelse med de s. 324 formulerade villkoren.

Hafva vi två kongruenta ytor, S_1 och S_2, svarar mot hvarje till S_1 hörande inre resp. yttre polygon en därmed kongruent inre resp. yttre polygon med afseende å ytan S_2. Mängderna (p) och (P) omfatta således för de två ytorna precis samma tal, och ytornas mätetal, hvilka åtskilja dessa mängder, äro således äfven identiska.

Likaså kan man visa att, om en yta S delas i ett ändligt antal delar, dess mätetal är lika med summan af delarnas mätetal och således större än mätetalet för hvarje enskild del, förutsatt att hvarje delningslinie uppfyller samma villkor som vi pålagt begränsningslinierna för våra ytor öfverhufvud, d. v. s. att den kan inneslutas mellan polygonala linier som begränsa en godtyckligt liten yta. Vi genomföra beviset för det fall att den gifna ytan S delas i tvenne delar, S_1 och S_2, medels en linie l som sammanbinder två punkter

α och β af dess randkurva. För att förenkla beteckningen och uttryckssättet göra vi ytterligare några speciella förutsättningar, men uppmana läsaren att utföra beviset oberoende af dessa, hvilket icke erbjuder några svårigheter.



Om ε är ett gifvet positivt tal, kunna vi välja en yttre och en inre polygon på sådant sätt att skillnaden $P-p$ mellan deras mätetal är mindre än ε. Vi antaga att dessa polygoner, oberoende af värdet för ε, kunna konstrueras så att de hafva punkterna α och β till hörnpunkter, samt att linien l helt och hållet förlöper inom den inre polygonen. I ofvanstående figur äro ifrågavarande polygoner $\alpha ABC\beta DEF\alpha$ och $\alpha ab\beta cde\alpha$.

Enligt vår förutsättning kan jämväl linien l inneslutas inom en polygon hvars yta har ett mätetal $< \varepsilon$. Vi antaga att denna polygon, för hvarje värde af ε, kan konstrueras så att den har α och β till hörnpunkter och utgör en del af den ofvan betraktade inre polygonen. I figuren föreställer $\alpha\gamma\beta\delta\alpha$ ifrågavarande polygon.

Enligt figuren utgör $\alpha ab\beta\gamma\alpha$ en inre, $\alpha ABC\beta\delta\alpha$ en yttre polygon med afseende å ytan S_1, och likaså utgöra $\alpha\delta\beta cde\alpha$ och $\alpha\gamma\beta DEF\alpha$ inre resp. yttre polygoner med afseende å ytan S_2. Om vi beteckna mätetalen för dessa polygoners ytor i ordning med p_1, P_1, p_2, P_2, framgå ur det ofvan sagda omedelbart olikheterna

$$P_1 - p_1 < 2\varepsilon, \quad P_2 - p_2 < 2\varepsilon,$$

hvilka främst visa oss att begränsningslinierna för ytorna S_1 och S_2 uppfylla de villkor som erfordras för att dessa ytor skola hafva bestämda mätetal i förhållande till ytenheten. För enkelhetens skull låta vi bokstäfverna S, S_1, S_2 jämväl beteckna motsvarande ytors mätetal, och hafva då

$$p_1 < S_1 < P_1, \quad p_2 < S_2 < P_2.$$

Genom addition af dessa olikheter erhålles

$$p_1 + p_2 < S_1 + S_2 < P_1 + P_2.$$

Men $P_1 + P_2$ är, såsom ur figuren framgår, lika med summan af P och mätetalet för polygonen $\alpha\gamma\beta\delta\alpha$ och således mindre än $P + \varepsilon$, och på analogt sätt inses att $p_1 + p_2$ är större än $p - \varepsilon$. Alltså är

$$p - \varepsilon < S_1 + S_2 < P + \varepsilon.$$

Å andra sidan är

$$p < S < P.$$

Ur dessa olikheter följer

$$p - (P + \varepsilon) < S - (S_1 + S_2) < P - (p - \varepsilon),$$

eller ännu, då $P - p < \varepsilon$,

$$-2\varepsilon < S - (S_1 + S_2) < 2\varepsilon.$$

Då detta resultat gäller huru litet talet ε än valts, är således med nödvändighet $S - (S_1 + S_2) = 0$ eller

$$S = S_1 + S_2,$$

hvarmed vårt påstående är bevisadt.

Man kan på olika sätt konstruera en obegränsad följd af inre eller yttre polygoner hvilkas mätetal hafva den gifna ytans mätetal S till gränsvärde. Enklast är att inslå följande förfarande.

Vi betäcka planet med ett nät af kvadrater och utvälja bland dessa alla dem som helt och hållet tillhöra den gifna

ytan S. Dessa kvadrater bilda tillsamman en inre polygon [1]), hvars mätetal vi beteckna med p_1. Det kortaste afståndet från en godtycklig punkt på denna polygons perimeter till randkurvan af området S är mindre än diagonalen i de betraktade kvadraterna, alltså $< \Delta \sqrt{2}$, om Δ betecknar sidan i kvadraterna.

Vi dela nu enhvar af de första kvadraterna i fyra mindre, så att planet blir indeladt i kvadrater med sidan $\frac{\Delta}{2}$, och utvälja bland dessa åter alla dem som helt och hållet tillhöra ytan S. Mätetalet för den af dessa kvadrater bildade polygonen beteckna vi med p_2; man har $p_1 \leqq p_2$, ty hvarje kvadrat som tillhör den första polygonen utgör äfven en del af den senare. Det kortaste afståndet från en godtycklig punkt på perimetern af den senare polygonen till randkurvan af S är $< \frac{\Delta}{2} \sqrt{2}$.

Vi fortgå på detta sätt, i det vi alltid dela de tidigare kvadraterna i fyra mindre, och erhålla sålunda en fullt bestämd följd af inre polygoner, hvilkas mätetal bilda en stigande talräcka:

$$p_1 < p_2 \leqq \ldots \leqq p_n \leqq \ldots$$

Denna talräcka har till gränsvärde den gifna ytans mätetal S. Enligt vårt antagande kunna vi nämligen för denna yta konstruera en yttre och en inre polygon så att skillnaden $P-p$ mellan deras mätetal är mindre än ett gifvet, godtyckligt litet tal ε, och man inser lätt att den inre polygonen kan väljas så att dess perimeter icke har någon punkt gemensam med begränsningslinien för ytan S [2]). Vi beteckna med $\delta\ (> 0)$ det kortaste afståndet mellan dessa två linier.

---

[1]) Denna och några af de följande polygonerna kunna möjligen bestå af skilda delar, men detta inverkar icke på giltigheten af våra slutsatser.

[2]) Man kan nämligen välja en yttre polygon och en tillhörande inre polygon sålunda att skillnaden $P-p'$ mellan deras mätetal är mindre än $\frac{\varepsilon}{2}$. Om den inre polygonens perimeter har punkter gemensamma med begränsningslinien för området S, kan man medels räta linier af-

Enligt ofvanstående konstruktionssätt befinner sig hvarje punkt på perimetern af polygonen med mätetalet p_n på ett afstånd $< \frac{\Delta}{2^{n-1}} \sqrt{2}$ från begränsningslinien för S. Välja vi n så stort att $\frac{\Delta}{2^{n-1}} \sqrt{2} < \delta$, innehåller denna polygon såsom en del den ofvan betraktade polygonen med mätetalet p, och vi erhålla således $p_n > p$, hvaraf följer $S - p_n < S - p < P - p$ eller slutligen $S - p_n < \varepsilon$. Alltså är $\lim p_n = S$.

På liknande sätt kan man konstruera en följd af yttre polygoner hvilkas mätetal konvergera mot S.

62. **Beräkning af några plana figurers areor.** — Vi tillämpa ofvanstående betraktelser på beräkningen af några speciella figurers areor. I nästa kapitel skola vi sedan visa huru väsentligt denna beräkning förenklas om man använder integralkalkylen.

1°. Vi påminna först om beräkningen af cirkelns area. Om med r betecknas mätetalet för cirkelns radie, med p_n och P_n mätetalen för de in- och omskrifna reguliära n-hörningarnas ytor, är

$$p_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n} = n r^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n},$$

$$P_n = n r^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n},$$

hvarur följer

$$P_n - p_n = n r^2 \left(\operatorname{tang} \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) = n r^2 \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

eller ännu, då $\sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$,

$$P_n - p_n < \frac{\pi^3 r^2}{n^2 \cos \frac{\pi}{n}}.$$

---

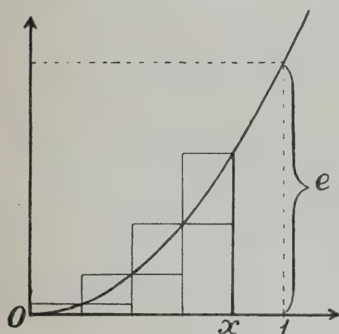
skära vissa delar af densamma, sålunda att den återstående polygonen, hvars mätetal må betecknas med p, helt och hållet ligger i det inre af S, samt att summan af de afskurna delarnas mätetal är mindre än $\frac{\varepsilon}{2}$. Då är $P - p' < \frac{\varepsilon}{2}$, $p' - p < \frac{\varepsilon}{2}$, och således $P - p < \varepsilon$.

Denna skillnad kan sålunda göras huru liten som helst genom att n väljes tillräckligt stort, och enligt n° 61 tillkommer följaktligen cirkelytan ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten, hvilket är större än mätetalet för hvarje inre polygon, mindre än mätetalet för hvarje yttre polygon, och således speciellt större än hvarje tal p_n och mindre än hvarje tal P_n. Nu följer ur uttrycken för p_n och P_n, då $\sin\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$, $\cos\frac{\pi}{n} < 1$, $\operatorname{tang}\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}$,

$$p_n < \pi r^2 < P_n,$$

och detta för hvarje värde n. Då det icke kan finnas flere än ett tal som åtskiljer talmängderna (p_n) och (P_n), är följaktligen mätetalet för cirkelns yta $= \pi r^2$.

2°. Vi betrakta nu den yta som begränsas af parabeln $y = x^2$, x-axeln och ordinatan i punkten $x\,(>0)$. Vi dela intervallen $(0, x)$ i n lika delar, så att hvarje del $= \frac{x}{n}$, och uppresa i delningspunkterna ordinator, hvarvid den betraktade ytan delas i n delar. För enhvar af dessa ytdelar konstruera vi de in- och omskrifna rektanglarna, såsom i bredvidstående figur anges. De inskrifna rektanglarna bilda tillsammans en *inre*, de omskrifna rektanglarna en *yttre* polygon med afseende å den gifna ytan. Den förras mätetal i förhållande till ytenheten är lika med



$$\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{x}{n}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2 = \left(\frac{x}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2),$$

den yttre polygonens mätetal är lika med

$$\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{x}{n}\left(\frac{nx}{n}\right)^2 = \left(\frac{x}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2).$$

Skillnaden mellan mätetalen för den yttre och den inre polygonen är således lika med $\frac{x}{n}\left(\frac{nx}{n}\right)^2 = \frac{x^3}{n}$, eller lika med mäte-

talet för den sista omskrifna rektangeln, hvilket för öfrigt omedelbart framgår däraf att hvarje inskrifven rektangel är kongruent med den närmast föregående omskrifna rektangeln. Emedan nämnda skillnad kan göras huru liten som helst genom att n väljes tillräckligt stort, äro vi säkra om att den betraktade ytan har ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten, den i figuren utmärkta kvadraten med sidan e.

För att bestämma detta mätetal söka vi ett allmänt uttryck för summan af de n första hela talens kvadrater:

$$\sum_1^n \nu^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

För detta ändamål utgå vi från identiteten

$$\nu^3 - (\nu - 1)^3 = 3\nu^2 - 3\nu + 1,$$

insätta i denna successivt $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$ och addera de erhållna likheterna. Resultatet blir:

$$n^3 = 3\sum_1^n \nu^2 - 3\sum_1^n \nu + n.$$

Men enligt regeln för summering af en aritmetisk serie är

$$\sum_1^n \nu = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

och ofvanstående likhet kan således skrifvas

$$3\sum_1^n \nu^2 = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

hvarur följer det sökta uttrycket

$$\text{(8)} \qquad \sum_1^n \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Om n ersättes med $n-1$, erhålles härur

$$\sum_1^{n-1} \nu^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

På grund af dessa likheter kunna de ofvan funna uttrycken för den inre och den yttre polygonens mätetal skrifvas under formen:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 \sum_1^{n-1} \nu^2 = \frac{x^3}{6} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{n^3} = \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 \sum_1^{n} \nu^2 = \frac{x^3}{6} \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{n^3} = \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Då n obegränsadt växer, konvergera dessa uttryck från hvar sin sida mot gränsvärdet $\frac{x^3}{3}$, och då den ofvan betraktade ytans mätetal för hvarje värde n ligger mellan ifrågavarande uttryck, är detta mätetal således $=\frac{x^3}{3}$.

3°. Läsaren uppmanas att på samma sätt bestämma arean af den yta som begränsas af x-axeln, en gifven ordinata, samt kurvan $y=x^3$ eller kurvan $y=x^4$. Härtill erfordras uttrycken för summorna

$$\sum_1^n \nu^3 \quad \text{och} \quad \sum_1^n \nu^4$$

såsom funktioner af n, hvilka erhållas genom ett förfarande analogt med det vi ofvan användt. För den förra summan gäller den intressanta relationen

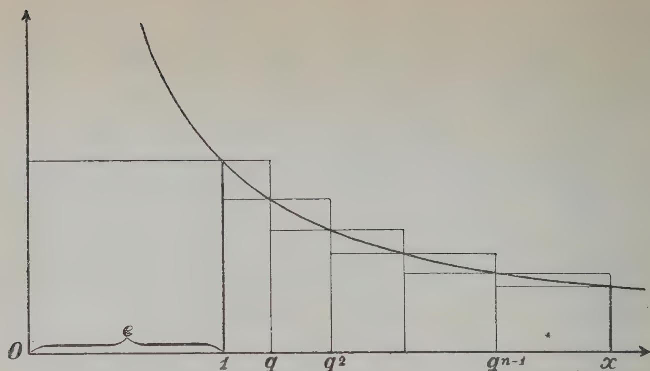
$$\sum_1^n \nu^3 = \left(\sum_1^n \nu\right)^2,$$

eller i utförligare form

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2,$$

hvilken läsaren bör verificera.

4°. Vi skola slutligen beräkna arean af den yta som begränsas af hyperbeln $y=\frac{1}{x}$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna 1 och $x\,(>1)$.



Resultatet ernås enklast om intervallen $(1, x)$ delas så att delintervallernas längder bilda en *geometrisk* progression. Vi bestämma för detta ändamål q genom likheten $q^n = x$, där n är ett positivt helt tal, och inskjuta mellan 1 och x punkterna $q, q^2, \ldots, q^{n-1}$, hvarvid delintervallernas längder i ordning blifva

$$q - 1,\quad q(q-1),\quad q^2(q-1), \ldots, q^{n-1}(q-1).$$

Då genom nämnda delningspunkter uppritas ordinator, sönderfaller den betraktade ytan i n delar. För hvarje af dessa konstruera vi den omskrifna och den inskrifna rektangeln, såsom ofvanstående figur visar. Mätetalen för de omskrifna rektanglarnas höjder i förhållande till längdenheten e äro i ordning

$$1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots, \frac{1}{q^{n-1}},$$

mätetalen för de inskrifna rektanglarnas höjder äro åter

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \ldots, \frac{1}{q^n}.$$

Man sluter häraf att mätetalet för hvarje omskrifven rektangels yta är lika med $q - 1$, mätetalet för hvarje inskrifven rektangels yta lika med $\frac{q-1}{q}$. Den *yttre* polygon som bildas af de omskrifna rektanglarna har följaktligen mätetalet $n(q-1)$, den *inre* polygon som bildas af de inskrifna rektanglarna mätetalet $\frac{n(q-1)}{q}$. Då $q^n = x$ och således $n = \frac{\log x}{\log q}$, kunna dessa resultat skrifvas under formen:

mätetalet för den yttre polygonens yta $= \frac{q-1}{\log q} \log x$,

mätetalet för den inre polygonens yta $= \frac{1}{q} \frac{q-1}{\log q} \log x$.

Om vi låta n obegränsadt växa, närmar sig $q = \sqrt[n]{x}$ gränsvärdet 1. Vi sätta $q = 1 + \frac{1}{m}$, där således m samtidigt med n växer mot ∞, och erhålla då

$$\frac{q-1}{\log q} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{\log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]},$$

hvarur, enligt likheten (14) s. 248, följer

$$\lim_{n=\infty} \frac{q-1}{\log q} = \lim_{m=\infty} \frac{1}{\log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]} = \frac{1}{\log e} = 1.$$

Häraf framgår att mätetalen för den yttre och den inre polygonens ytor med växande n båda konvergera mot ett och samma gränsvärde, nämligen $\log x$. Följaktligen har den af hyperbeln $y = \frac{1}{x}$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna 1 och x begränsade ytan ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten (den i figuren utmärkta kvadraten med sidan e), och detta mätetal är $= \log x$. Vi hafva härmed vunnit en intressant geometrisk tolkning af den Neperska logaritmen.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna arean af den figur som begränsas af kurvan $y = a^x$, x-axeln samt tvenne ordinator.

2) Huru stor är ytan af den figur som begränsas af kurvan $y = x^\mu$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna 1 och $x\,(>1)$, då μ har ett reellt värde $\neq -1$? (Uppgiften löses enkelt medels ett förfarande analogt med det på föregående sida).

3) Bevisa att arean af den sektor som begränsas af spiralen

$$r = Ce^{k\varphi}$$

samt tvenne radier r_1 och $r_2\,(> r_1)$ är lika med

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{4k}.$$

63. **Om mätning af kroppars volymer. Volymen af en polyeder.** — Vi skola nu i korthet redogöra för huru volymbegreppet logiskt uppbygges, och följa härvid samma betraktelsesätt som vid uppbyggandet af begreppet area.

Det gäller att mäta volymen af en gifven *kropp*, hvarmed i matematisk bemärkelse förstås *en begränsad del af rymden*, d. v. s. att jämföra densamma med en viss speciell kropp, den s. k. *volymenheten*, hvartill lämpligen väljes en kub hvars kant är lika med den sträcka e som valts till längdenhet, och hvars sidoyta således är lika med ytenheten. Mätningens resultat uttryckes genom ett visst *mätetal* som tillägges den gifna kroppen. För dettas bestämmande utgå vi åter från följande villkor, hvilka måste vara uppfyllda såframt våra resultat skola stå i öfverensstämmelse med vår åskådliga föreställning:

(I). *Kongruenta kroppar böra erhålla samma mätetal.*

(II). *Om en kropp är delad i ett ändligt antal delar, bör dess mätetal vara lika med summan af delarnas mätetal och större än mätetalet för hvarje enskild del.*

(III). *Volymenheten tilldelas mätetalet* 1.

Vi göra början med *polyedrarna*, och bland dessa betrakta vi först dem som enklast låta jämföra sig med volymenheten, nämligen *rätvinkliga parallellepipeder med ytenheten såsom bas.* Beträffande dessa erhålles, medels ett resonemang identiskt med det s. 324—325, följande resultat:

Enligt villkoren (I)—(III) erhåller hvarje rätvinklig parallellepiped med ytenheten såsom bas ett bestämdt mätetal i förhållande till volymenheten, hvilket är lika med mätetalet för dess höjd i förhållande till längdenheten.

I det vi gå till allmännare polyedrar, införa vi åter begreppet *ekvivalens*:

Tvenne polyedrar sägas vara e k v i v a l e n t a, *om de antingen äro kongruenta eller medels plan kunna delas i ett ändligt antal parvis kongruenta delar.*

För ekvivalens mellan polyedrar gälla samma egenskaper som för ekvivalens mellan polygoner, och speciellt följande sats, hvars bevis är identiskt med det vi gifvit s. 326:

Tvenne polyedrar som äro ekvivalenta med en och samma polyeder äro äfven sinsemellan ekvivalenta.

Vi bevisa nu en följd af satser om polyedrars ekvivalens.

1°. *Tvenne räta prismer med lika stora baser och höjder äro ekvivalenta.*

Ty då prismernas baser enligt antagandet hafva lika stora ytor, kunna de enligt n° 60 delas i parvis kongruenta polygoner, och om genom delningslinierna plan läggas vinkelrätt mot baserna, blifva prismerna delade i parvis kongruenta delprismer.

2°. *Tvenne rätvinkliga parallellepipeder, P och P', hvilkas kanter hafva mätetalen a, b, c resp. a', b', c', äro ekvivalenta om $abc = a'b'c'$.*

Vi välja talet b_1 så att $ab = a'b_1$; enligt 1° är då P ekvivalent med en rätvinklig parallellepiped P_1 hvars kanter hafva mätetalen a', b_1, c (vi uppfatta härvid kanten c såsom höjd i båda parallellepipederna). Härefter bestämma vi c_1 ur likheten $b_1 c = b' c_1$, och finna enligt 1° (i det vi uppfatta kanten a' såsom höjd) att P_1 i sin tur är ekvivalent med en rätvinklig parallellepiped P_2 hvars kanter hafva mätetalen a', b', c_1. Men enligt de likheter som bestämma b_1 och c_1 är

$$abc = a' b_1 c = a' b' c_1,$$

och då enligt antagandet $abc = a'b'c'$, är sålunda $a'b'c_1 = a'b'c'$, hvaraf $c_1 = c'$. Parallellepipeden P_2 är således kongruent med P', och följaktligen äro P och P' ekvivalenta.

3°. *Ett rätt prisma, P, hvars bas och höjd hafva mätetalen b och h, är ekvivalent med en rätvinklig parallellepiped som har ytenheten till bas och hvars höjd har mätetalet bh.*

Välja vi talen α och β så att $\alpha\beta = b$, är enligt 1° prismat P ekvivalent med en rätvinklig parallellepiped, P_1, hvars kanter hafva mätetalen α, β, h. Enligt 2° är åter P_1 ekvivalent med en rät parallellepiped med ytenheten såsom bas och hvars höjd har mätetalet $\alpha\beta h = bh$, och prismat P är således äfven ekvivalent med denna parallellepiped.

Öfvergången till sneda prismer sker med stöd af satsen:

4°. *Ett snedt prisma är ekvivalent med det räta prisma som har dess normalsektion till bas och dess sidolinie till höjd.*

Satsens riktighet inses omedelbart i de fall då man kan anbringa en normalsektion som skär prismats sidoyta utan att skära dess baser. Är detta icke möjligt, inskjuter man mellan det sneda och det räta prismat ett eller flere hjälpprismer, hvilka hafva samma normalsektion och lika stor sidolinie som de gifna, och i hvilka sidoliniens lutningsvinkel mot basplanen ständigt ökas.

Vi beteckna med b, h, s, b' mätetalen för det sneda prismats bas, höjd, sidolinie och normalsektion, samt med ω sidoliniens lutningsvinkel mot basplanet. Man har då $h = s \sin \omega$ samt vidare, enligt satsen om projektionen af en plan yta[1], $b = \frac{b'}{\sin \omega}$, ur hvilka likheter följer $bh = b's$. Enligt 3° är det i ofvanstående sats betraktade räta prismat, hvars bas och höjd hafva mätetalen b' och s, ekvivalent med en rätvinklig parallellepiped med ytenheten såsom bas och hvars höjd har mätetalet $b's = bh$. Det i samma sats betraktade sneda prismat är således äfven ekvivalent med ifrågavarande parallellepiped, och vi erhålla alltså följande allmänna sats:

5°. *Hvarje prisma, hvars bas och höjd hafva mätetalen b och h, är ekvivalent med en rätvinklig parallellepiped som har ytenheten till bas och hvars höjd har mätetalet bh.*

Såsom korollarium sluta vi härur följande intressanta resultat, hvilket i sig innefattar alla de föregående:

6°. *Tvenne prismer, för hvilka produkten af basens och höjdens mätetal har samma värde, äro alltid ekvivalenta, d. v. s. de kunna medels plan delas i ett ändligt antal parvis kongruenta delar.*

Då enligt de s. 344 formulerade villkoren ekvivalenta polyedrar böra erhålla samma mätetal, kunna vi ännu af satsen 5°, och af hvad tidigare visats om rätvinkliga parallellepipeder med ytenheten såsom bas, draga följande slutsats:

---

[1]) Jmf. L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, s. 171.

Enligt villkoren (I)—(III) är mätetalet för ett prismas volym lika med produkten bh af mätetalen för dess bas och höjd.

Öfvergången från prismer till allmännare polyedrar förmedlas, i den i elementargeometrin brukliga framställningen, af följande satser:

„Tvenne tetraedrar (eller trekantiga pyramider) med lika stora baser och höjder hafva lika stora volymer".

„Ett trekantigt prisma kan delas i tre tetraedrar med lika stora volymer".

I beviset för förstnämnda sats grundas emellertid likheten mellan tetraedrarnas volymer icke på delning i parvis kongruenta delar, utan därpå att de kunna instängas mellan samma gränser — summorna af vissa om- och inskrifna prismers volymer — hvilkas skillnad kan göras godtyckligt liten.

Man kan nu faktiskt bevisa [1]), ehuru vi här icke kunna ingå därpå, att tvenne tetraedrar med lika stora baser och höjder i allmänhet icke kunna delas i ett ändligt antal parvis kongruenta polyedrar. Häraf följer att man, då det gäller att allmänt definiera mätetalet för en polyeder, icke uteslutande kan grunda framställningen på ekvivalensbegreppet, såsom i läran om polygoners mätning, utan verkligen är tvungen att inslå ett annat förfarande.

Vi betrakta en godtycklig tetraeder, dela dess höjd i n lika stora delar och lägga genom delningspunkterna plan parallella med basen, hvarvid tetraedern sönderfaller i n delar. För enhvar af dessa konstruera vi, på det från elementargeometrin kända sättet, de om- och inskrifna prismerna. Om mätetalen för tetraederns bas och höjd betecknas med b och h, hafva de omskrifna prismernas baser i ordning mätetalen

$$b, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 b, \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 b, \ldots, \left(\frac{1}{n}\right)^2 b,$$

och deras volymer alltså mätetalen

$$\frac{bh}{n}, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{bh}{n}, \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \frac{bh}{n}, \ldots, \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{bh}{n}.$$

---

[1]) Jmf. det s. 330 citerade arbetet af Enriques.

Enligt villkoret (II) är mätetalet för den af dessa prismer sammansatta kroppen V således lika med

$$\frac{bh}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{bh}{n} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{bh}{n} = \frac{bh}{n^3} \sum_1^n \nu^2 .$$

På samma sätt finner man att den kropp v som bildas af de inskrifna prismerna har till mätetal summan

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{bh}{n} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \frac{bh}{n} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{bh}{n} = \frac{bh}{n^3} \sum_1^{n-1} \nu^2 .$$

Med användande af likheten (8) s. 340 kunna dessa resultat skrifvas under formen

$$\text{mätetalet för } V = \frac{bh}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

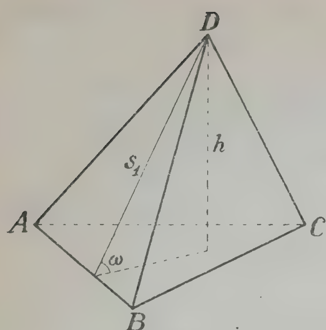
$$\text{mätetalet för } v = \frac{bh}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Den gifna tetraedern utgör en del af kroppen V och innehåller själf v såsom en del. Enligt villkoret (II) bör tetraederns mätetal således vara mindre än mätetalet för V och större än mätetalet för v, huru stort talet n än väljes.

Nu framgår af ofvanstående uttryck att mätetalet för V är större och mätetalet för v mindre än $\frac{bh}{3}$, och att de med växande n båda konvergera mot detta värde. Alltså är $\frac{bh}{3}$ det enda tal som uppfyller de villkor vi funno för tetraederns mätetal, och vi erhålla således följande resultat:

Enligt villkoren (I)—(III) är mätetalet för en tetraeders volym lika med $\frac{bh}{3}$, *då* b *och* h *beteckna mätetalen för tetraederns bas och höjd.*

Det är lätt att kontrollera att värdet af uttrycket $\frac{bh}{3}$ är oberoende af hvilken sida i tetraedern uppfattas såsom bas. Den gifna tetraedern må vara $ABCD$. Vi beteckna



med b och h mätetalen för ytan af triangeln ABC samt för tetraederns motstående höjdlinie, och likaså med b_1, h_1 mätetalen för triangeln ABD och den mot denna stående höjdlinien, vidare med k, s, s_1 mätetalen för kanten AB och de från punkterna C och D mot densamma fällda perpendiklarna, samt slutligen med ω lutningsvinkeln mellan planen ABC och ABD. Man erhåller då omedelbart likheterna

$$b = \frac{1}{2}ks\ , \quad h = s_1 \sin\omega\,, \quad bh = \frac{1}{2}kss_1 \sin\omega\,,$$

$$b_1 = \frac{1}{2}ks_1\,, \quad h_1 = s \sin\omega\,, \quad b_1h_1 = \frac{1}{2}kss_1 \sin\omega\,,$$

och således $bh = b_1h_1$, hvarmed riktigheten af vårt påstående är ådagalagd.

Vi gå nu till en allmän polyeder P. Denna kan delas i tetraedrar och detta på oändligt många olika sätt. Vid en dylik indelning må $t_1, t_2, \ldots, t_n$ beteckna de erhållna tetraedrarna samt b_1 och h_1, b_2 och $h_2, \ldots, b_n$ och h_n mätetalen för deras baser och höjder, hvarvid det är likgiltigt hvilken sida man för hvarje gång uppfattar såsom bas. Enligt ofvan erhållna resultat äro då mätetalen för tetraedrarna i ordning lika med $\frac{b_1h_1}{3}, \frac{b_2h_2}{3}, \ldots, \frac{b_nh_n}{3}$, och på grund af villkoret (II) böra vi således tilldela polyedern P mätetalet

$$\frac{b_1h_1}{3} + \frac{b_2h_2}{3} + \cdots + \frac{b_nh_n}{3} = \sum_1^n \frac{b_\nu h_\nu}{3}\,. \tag{9}$$

För att ådagalägga att vårt resultat icke i sig innebär någon motsägelse, hafva vi här åter främst att — uteslutande med stöd af geometrins axiom, och utan att på något sätt vädja till volymbegreppet, hvilket det just gäller att matematiskt definiera — bevisa följande grundläggande sats:

Huru den gifna polyedern än delas i tetraedrar, erhåller summan (9) alltid samma värde.

Beviset kan föras rent geometriskt [1]), men framgår äfven enkelt ur det uttryck i form af en determinant som den analytiska geometrin ger för en tetraeders mätetal. Vi utföra beviset i en not i slutet af boken.

Med stöd af denna sats kunna vi nu uppställa följande allmänna *definition* för en polyeders mätetal:

Mätetalet för en polyeders volym i förhållande till volymenheten är lika med det värde som erhålles för summan (9) då polyedern på något sätt delas i tetraedrar.

För ett prisma erhålles enligt denna allmänna definition samma mätetal som enligt den tidigare gifna definitionen (s. 347). För ett trekantigt prisma följer detta ur den redan tidigare omnämnda satsen, enligt hvilken ett sådant prisma kan delas i tre tetraedrar, hvilka två och två hafva lika stora baser och höjder och af hvilka tvenne hafva samma bas och höjd som prismat självt (då man hvarje gång väljer en lämplig sidoyta till bas). Då hvarje prisma kan delas i trekantiga prismer, följer härur att vårt påstående gäller allmänt.

Till hvarje gifven polyeders volym är härmed tillordnadt ett fullt bestämdt mätetal och således en bestämd storlek i förhållande till den antagna volymenheten [2]), och vi hafva sett att vår definition för detta mätetal med nödvändighet följer ur de af åskådningen oss pålagda villkoren (I)—(III) s. 344. Vi böra ännu *a posteriori* verificera att dessa samma villkor allmänt och undantagslöst äro uppfyllda för polyedrars volymer. Beviset är fullkomligt analogt med det vi gifvit s. 331—332, hvarför vi öfverlemna dess utförande åt läsaren.

---

[1]) Jmf. det s. 330 citerade arbetet af Enriques.

[2]) Af det ofvan sagda framgår att två polyedrar som hafva samma mätetal, och således lika stora volymer, i allmänhet icke äro ekvivalenta, d. v. s. icke kunna delas i ett ändligt antal parvis kongruenta delar.

Man kan emellertid gifva villkoret för likhet resp. olikhet mellan tvenne polyedrars volymer en rent geometrisk form. För att enklare kunna utsäga resultatet, införa vi följande uttryckssätt:

Vi säga att *polyedern P är ekvivalent med en del af polyedern P'*, om det är möjligt att medels plan dela dessa polyedrar i ett ändligt antal delar, på sådant sätt att mot hvarje del af *P* svarar en därmed kongruent

64. **Volymen af en godtyckligt begränsad kropp.** — Utsträckningen af volymbegreppet till en af en godtycklig yta begränsad kropp är fullkomligt analog med utsträckningen af begreppet area till en godtyckligt begränsad plan yta (jmf. n⁰ 61), hvarför vi i det följande kunna fatta oss kort.

Vi betrakta en kropp K, begränsad af en kontinuerlig sluten yta S, och tänka oss å ena sidan de polyedrar som utgöra en del af denna kropp, å andra sidan de polyedrar hvilka innehålla densamma såsom en del. Vi benämna de förra *inre* polyedrar, de senare *yttre* polyedrar, och beteckna allmänt med p mätetalet för en inre och med P mätetalet för en yttre polyeder i förhållande till den antagna volymenheten.

Vi hafva då åter två oändliga mängder af positiva tal,

$$(p) \text{ och } (P),$$

hvilka besitta följande egenskaper:

1^0. *Hvarje tal i mängden* (p) *är mindre än hvarje tal i mängden* (P).

2^0. *Mängden* (p) *innehåller intet största och mängden* (P) *intet minsta tal.*

För att nå vårt mål äro vi här åter tvungna att göra en inskränkning beträffande den betraktade kroppen:

Vi antaga att det är möjligt att innesluta begränsningsytan af kroppen K mellan tvenne polyedriska ytor, på sådant sätt att den del af rymden som ligger mellan dessa ytor har en godtyckligt liten volym.

---

del af P', medan P' innehåller åtminstone en del som icke har sin motsvarighet i polyedern P.

Vi kunna då utsäga följande resultat, hvilkas bevis utan svårighet erhållas ur den föregående framställningen (jmf. sats 5^0 samt härledningen af mätetalet för tetraederns volym):

Tvenne polyedrar P_1 och P_2 hafva lika stora volymer, om hvarje polyeder som innehålles i P_1 är ekvivalent med en del af P_2, och omvändt hvarje polyeder som innehålles i P_2 är ekvivalent med en del af P_1.

Polyedern P_1 har större volym än polyedern P_2, om P_2 är ekvivalent med en del af P_1.

Om detta antagande är uppfylldt, besitta talmängderna (p) och (P) ännu följande tredje egenskap:

3°. *Om* ε *är ett gifvet, godtyckligt litet positivt tal, kan man alltid välja ett tal ur mängden* (P) *och ett tal ur mängden* (p) *så att deras skillnad är mindre än* ε.

Enligt satsen s. 87 finnes det då ett och endast ett tal som *åtskiljer* mängderna (p) och (P), och enligt villkoret (II) böra vi tilldela kroppen K detta tal såsom mätetal i förhållande till volymenheten. Alltså:

Mätetalet för volymen af en godtyckligt begränsad kropp K *i förhållande till den antagna volymenheten utgöres af det fullt bestämda tal, som är större än mätetalet för hvarje polyeder som utgör en del af* K, *och samtidigt mindre än mätetalet för hvarje polyeder hvilken innehåller* K *såsom en del.*

Till volymen af hvarje kropp, hvars begränsningsyta uppfyller ofvan anförda villkor, är härmed tillordnadt ett bestämdt mätetal och således en bestämd storlek i förhållande till volymenheten, och man kan åter lätt kontrollera, medels ett resonemang analogt med det på s. 334—336, att det erhållna resultatet står i full öfverensstämmelse med villkoren (I)—(III), förutsatt att hvarje af de ytor, medels hvilka den i (II) omnämnda delningen verkställes, uppfyller samma villkor som ställts på kroppens begränsningsyta.

Man kan angifva olika sätt att konstruera en följd af polyedrar hvilkas mätetal hafva den gifna kroppens mätetal till gränsvärde. Enklast är att, i analogi med det s. 336—337 angifna förfarandet, dela rymden i kongruenta kuber och bland dessa utvälja alla dem som helt och hållet tillhöra den gifna kroppen, därpå dela hvarje kub i den första indelningen i åtta kongruenta kuber och af dessa mindre kuber åter utvälja alla dem som utgöra en del af den gifna kroppen, o. s. v. in infinitum.

65. **Beräkning af några speciella kroppars volymer.** — Vi skola tillämpa ofvanstående betraktelser på några enkla exempel.

1°. Vi betrakta först *en cylinder med godtycklig bas*, d. v. s. en kropp begränsad af två parallella plan och en

cylindrisk yta, hvilken alstras då en rät linie rör sig i rymden så att den ständigt förblir parallell med en fast riktning. Vi antaga att cylinderns basyta har ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten och beteckna detta med b; mätetalet för cylinderns höjd beteckna vi med h.

Vi välja en yttre och en inre polygon med afseende å cylinderns basyta (jmf. s. 333), och konstruera med dessa polygoner såsom baser tvenne prismer, hvilkas sidokanter äro parallella med cylinderns sidolinie och hvilka hafva samma höjd som cylindern. Det förra prismat innehåller cylindern såsom en del, medan det senare prismat utgör en del af cylindern. Om mätetalen för nämnda polygoners ytor betecknas med P och p, äro mätetalen för prismernas volymer Ph och ph. Då enligt vårt antagande cylinderns basyta har ett bestämdt mätetal, är det möjligt att välja polygonerna på sådant sätt att skillnaden $P-p$ blir godtyckligt liten, och skillnaden $Ph-ph=(P-p)h$ mellan mätetalen för prismernas volymer kan således äfven göras mindre än ett på förhand uppgifvet godtyckligt litet positivt tal.

Enligt n⁰ 64 tillkommer således cylinderns volym ett bestämdt mätetal i förhållande till volymenheten, hvilket är större än ph och mindre än Ph, huru de ofvan betraktade inre och yttre polygonerna än väljas. Men det enda tal som besitter dessa egenskaper är bh, ty b är det enda tal som åtskiljer mängderna (p) och (P), och vi erhålla således följande resultat:

Mätetalet för volymen af en cylinder med en godtycklig bas är lika med produkten af mätetalen för dess bas och höjd.

2⁰. Vi betrakta för det andra *en kon med godtycklig bas*, alltså en kropp begränsad af ett plan och en godtycklig konisk yta, hvilken alstras af en rät linie som rör sig så att den ständigt går genom en fast punkt. Om vi åter välja tvenne polygoner af hvilka den ena utgör en del af konens basyta medan den andra innehåller denna yta såsom en del, och konstruera pyramider med dessa polygoner till baser och konens spets såsom spets, utgör den ena pyramiden en inre, den andra en yttre polyeder med afseende å konen. Dennas mätetal bör således ligga mellan nämnda pyramiders mätetal,

huru dessas baser än väljas. Då mätetalet för en pyramids volym är lika med en tredjedel af produkten af mätetalen för dess bas och höjd, sluta vi häraf följande resultat:

Mätetalet för volymen af en kon med godtycklig bas är lika med en tredjedel af produkten af mätetalen för dess bas och höjd.

3°. Vi beräkna vidare, med stöd af våra allmänna betraktelser, volymen af ett sferiskt segment.

Det är enklast att utgå från ett segment som ligger mellan tvenne parallella plan af hvilka det ena går genom sferens medelpunkt. Vi dela segmentets höjd i n lika stora delar och lägga genom delningspunkterna plan parallella med basplanen, hvarvid vi erhålla n delsegment med lika stora höjder. För hvarje af dessa konstruera vi den omskrifna och den inskrifna cylindern. De omskrifna cylindrarna bilda tillsammans en kropp V hvilken innehåller det betraktade segmentet såsom en del, den af de inskrifna cylindrarna bildade kroppen v utgör åter en del af segmentet, hvars mätetal således ligger mellan mätetalen för v och V, och detta huru stort talet n än väljes.

Om r och h beteckna mätetalen för sferens radie och för segmentets höjd, äro mätetalen för de omskrifna cylindrarnas basytor i ordning lika med

$$\pi r^2, \quad \pi\left(r^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2\right), \quad \pi\left(r^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2\right), \ldots, \quad \pi\left(r^2 - \left(\frac{(n-1)h}{n}\right)^2\right).$$

Då mätetalet för deras höjder är lika med $\frac{h}{n}$, erhålles för volymen af kroppen V mätetalet (jmf. formeln (8) s. 340)

$$\pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{n^3} \sum_1^{n-1} \nu^2 = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

De inskrifna cylindrarnas baser åter hafva mätetalen

$$\pi\left(r^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2\right), \quad \pi\left(r^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2\right), \ldots\ldots, \quad \pi\left(r^2 - \left(\frac{nh}{n}\right)^2\right),$$

och mätetalet för kroppen v är således lika med

$$\pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{n^3} \sum_1^{n} \nu^2 = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Såsom häraf framgår är mätetalet för V större och mätetalet för v mindre än värdet $\pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3}$, hvilket utgör dessa mätetals gemensamma gränsvärde för $n = \infty$. Vi finna således[1])

$$\textit{mätetalet för det sferiska segmentets volym} = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3}.$$

För $h = r$ erhålles speciellt mätetalet för halfsferens volym $= \frac{2}{3}\pi r^3$. Volymen af ett godtyckligt sferiskt segment framgår ur de erhållna resultaten genom addition eller subtraktion.

4°. Vi beräkna slutligen volymen af den kropp som begränsas af den elliptiska paraboloiden[2])

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \qquad (a > 0, b > 0)$$

och planet $z = h\,(> 0)$. För detta ändamål dela vi åter höjden h af det betraktade paraboloidsegmentet i n lika stora delar, lägga genom delningspunkterna plan parallella med xy-planet, och konstruera för hvart och ett af de härvid erhållna n delsegmenten den om- och den inskrifna cylindern. Den af de omskrifna cylindrarna bildade kroppen V innehåller paraboloidsegmentet såsom en del, den kropp v som är sammansatt af de inskrifna cylindrarna utgör åter en del af detta segment.

Den betraktade kroppens genomskärningsyta med ett med xy-planet parallellt plan $z = z_0$ begränsas af ellipsen

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z_0,$$

[1]) Kring enhvar af de cylindrar af hvilka kroppen V är sammansatt kan man omskrifva ett prisma hvars volym skiljer sig godtyckligt litet från cylinderns volym, och likaså kan man, i enhvar af de cylindrar af hvilka kroppen v består, inskrifva ett prisma hvars volym kommer cylinderns volym huru nära som helst. Af det ofvan sagda följer således att för det gifna sferiska segmentet existera yttre och inre polyedrar hvilkas volymer hafva en godtyckligt liten skillnad, och att detta segment således, enligt den s. 352 uppställda definitionen, har ett bestämdt mätetal i förhållande till den antagna volymenheten. En analog anmärkning gäller äfven för de följande uppgifterna.

[2]) Jmf. L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, s. 227.

hvars halfaxlar äro $\sqrt{az_0}$ och $\sqrt{bz_0}$, och har följaktligen mätetalet $\pi\sqrt{ab}\, z_0$. Mätetalen för de omskrifna cylindrarnas baser erhållas härur då åt z_0 efterhand gifvas värdena $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \ldots, \frac{nh}{n} = h$. Volymen af kroppen V har således mätetalet

$$\pi\sqrt{ab}\left(\frac{h}{n}\right)^2 (1+2+\cdots+n) = \pi\sqrt{ab}\left(\frac{h}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\pi\sqrt{ab}\, h^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

och på samma sätt finner man såsom mätetal för kroppen v

$$\pi\sqrt{ab}\left(\frac{h}{n}\right)^2 \left(1+2+\cdots+(n-1)\right) = \frac{\pi\sqrt{ab}\, h^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Med växande n konvergera dessa uttryck båda mot gränsvärdet

$$\frac{\pi\sqrt{ab}\, h^2}{2},$$

hvilket således utgör *mätetalet för det betraktade paraboloidsegmentets volym.*

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna med stöd af ofvanstående betraktelsesätt volymen af ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2) Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

skäres med en parallell till y-axeln. Beräkna volymen af den kropp som alstras då det afskurna segmentet roterar kring x-axeln.

3) Bestäm volymen af den kropp som begränsas af hyperboloiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

samt tvenne med xy-planet parallella plan.

4) En cirkel roterar ett hvarf kring en i dess plan liggande rät linie som icke skär dess periferi. Bevisa att den härvid alstrade ringformiga kroppen har lika stor volym som en cylinder, hvars bas utgöres af den gifna cirkeln och hvars höjd är lika med längden af den linie som cirkelns medelpunkt beskrifver under rotationen.

Sjunde kapitlet.

Integralbegreppet och dess användningar.

66. **Begreppet integralfunktion.** — I differentialkalkylen ha vi lärt oss att bilda en gifven funktions derivata. Integralkalkylen behandlar det omvända problemet:

Att finna en funktion $F(x)$ hvars derivata är lika med en gifven funktion $f(x)$.

En funktion $F(x)$ som uppfyller detta villkor säges utgöra en *integral* eller *integralfunktion* eller *primitiv funktion* till den gifna funktionen $f(x)$, och den operation genom hvilken $F(x)$ bildas ur $f(x)$ benämnes *integration*.

Exempelvis utgör $\sin x$ en integralfunktion till $\cos x$, ty $D \sin x = \cos x$. På samma sätt säga oss likheterna

$$D \log x = \frac{1}{x}, \quad D\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right) = x^{\mu} \quad (\mu \neq -1)$$

att $\log x$ är en integralfunktion till $\frac{1}{x}$, och $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ en integralfunktion till x^{μ} om $\mu \neq -1$. Ur hvarje differentiationsregel erhålles sålunda genom omvändning en integrationsregel.

Vi antaga att funktionen $f(x)$ är entydigt definierad och besitter en kontinuerlig integralfunktion $F(x)$ inom en viss intervall (a, b). I hvarje punkt af denna intervall är alltså $DF(x) = f(x)$.

Summan $F(x) + C$, där C betecknar en godtycklig konstant, utgör då äfven en integralfunktion till $f(x)$, ty

$$D\,(F(x) + C) = DF(x) = f(x).$$

Omvändt är hvarje integralfunktion $F_1(x)$ till $f(x)$, som är kontinuerlig inom intervallen (a, b), lika med $F(x) +$ en konstant; ty då enligt antagandet såväl $DF(x) = f(x)$ som äfven $DF_1(x) = f(x)$, öfverensstämma derivatorna af funktionerna $F(x)$ och $F_1(x)$ till värdet i hvarje punkt af (a, b), och enligt den s. 294 bevisade viktiga satsen — för hvilken vi anticiperat benämningen *integralkalkylens fundamentalsats* — är följaktligen skillnaden $F_1(x) - F(x)$ konstant inom nämnda intervall.

Vi hafva härmed bevisat följande grundläggande sats:

Om, inom en viss intervall, $F(x)$ utgör en kontinuerlig integralfunktion till den gifna funktionen $f(x)$, är hvarje annan kontinuerlig integralfunktion till $f(x)$ lika med $F(x) + C$, där C betecknar en konstant, och omvändt utgör hvarje funktion af denna form en integral till $f(x)$.

Vi betrakta såsom exempel funktionen $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Denna har till integral funktionen $\overline{\text{arc tang}}\, x$, hvilken är kontinuerlig för alla värden x (jmf. s. 96—97). Å andra sidan visar oss likheten

$$D\, \overline{\text{arc tang}}\, \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1+x^2}$$

att jämväl $\overline{\text{arc tang}}\, \frac{1+x}{1-x}$ utgör en integralfunktion till $\frac{1}{1+x^2}$. Denna sistnämnda funktion har en diskontinuitet för $x = 1$ men är kontinuerlig för alla öfriga argumentvärden. Enligt ofvanstående sats äro vi således säkra om att skillnaden

$$\overline{\text{arc tang}}\, \frac{1+x}{1-x} - \overline{\text{arc tang}}\, x$$

har ett konstant värde inom intervallen från $x = -\infty$ till $x = 1$, och likaså inom intervallen från $x = 1$ till $x = \infty$.

För $x = 0$ antar denna skillnad värdet $\overline{\text{arc tang}}\, 1 - \overline{\text{arc tang}}\, 0 = \frac{\pi}{4}$. Dess värde är således lika med $\frac{\pi}{4}$ inom hela intervallen från $-\infty$ till 1, hvaraf följer

$$\overline{\text{arc tang}}\, \frac{1+x}{1-x} = \overline{\text{arc tang}}\, x + \frac{\pi}{4} \quad \text{för} \quad x < 1\,.$$

Om åter x är större än 1 och närmar sig detta värde, konvergerar den betraktade skillnaden mot gränsvärdet

$$\text{arc tang}\,(-\infty) - \overline{\text{arc tang}}\,1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4},$$

och då vi veta att densamma är konstant för $x > 1$, kunna vi häraf sluta att dess värde är $= -\frac{3\pi}{4}$ inom hela intervallen från 1 till ∞, så att följaktligen

$$\overline{\text{arc tang}}\,\frac{1+x}{1-x} = \text{arc tang}\,x - \frac{3\pi}{4} \quad \text{för} \quad x > 1\,.$$

Vi återgå till vår allmänna sats. Summan $F(x) + C$, där C betecknar en arbiträr eller godtycklig konstant, benämnes den *allmänna* eller *obestämda* integralen af den gifna funktionen $f(x)$. För densamma användes beteckningen

(1) $$\int f(x)\,dx,$$

hvars ursprung längre fram förklaras. Funktionen $f(x)$ under integraltecknet kallas *integranden*, hvilken benämning jämväl användes för differentialuttrycket $f(x)\,dx$. Den arbiträra konstanten C kallas *integrationskonstanten*.

Enligt integralens definition är således

$$D\int f(x)\,dx = f(x)\,, \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

eller, med användande af differentialbeteckningen (jmf. s. 276),

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx\,, \quad \int d\,f(x) = f(x) + C,$$

där C är en arbiträr konstant.

Vi sammanställa här några resultat, hvilka direkt erhållas ur formlerna s. 266—267:

$$\int A\,dx = Ax + C, \text{ om faktorn } A \text{ är konstant,}$$

$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \text{ om } \mu \neq -1\,,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C,$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C$$
$$= -\text{arc cot}\, x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C$$
$$= -\text{arc cos}\, x + C.$$

Då funktionen $\log x$, så länge vi röra oss inom det reella talområdet, är definierad blott för $x > 0$, gäller den tredje af ofvanstående formler endast för positiva värden x. För $x < 0$ har integralen formen $\log(-x) + C$, såsom man omedelbart verificerar genom differentiation. Båda resultaten kunna sammanfattas i formeln

$$\int \frac{dx}{x} = \log Cx,$$

där konstanten C bör erhålla samma tecken som x men för öfrigt kan väljas godtyckligt.

I den nästsista formeln kan man välja hvilken gren som helst af $\text{arc tang}\, x$ och af $\text{arc cot}\, x$ (jmf. s. 262). Däremot bör man i den sista formeln, i händelse $\sqrt{1-x^2}$ tages med positivt tecken, välja hufvudgrenarna af $\text{arc sin}\, x$ och $\text{arc cos}\, x$, eller grenar som skilja sig från dessa med en mångfald af 2π (jmf. s. 263).

Vi uppställa vidare några allmänna integrationsregler, hvilka omedelbart bevisas medels differentiation, och hvilka gälla under förutsättning att de betraktade integralerna existera och äro kontinuerliga.

Om A är en konstant, har man

$$(2) \qquad \int A f(x)\,dx = A \int f(x)\,dx.$$

En konstant faktor i integranden får således flyttas framför integraltecknet.

Derivatan af venstra membrum i (2) är nämligen, enligt integralens definition, lika med $A f(x)$, och å andra sidan är

$$D\left(A \int f(x)\,dx\right) = A \,.\, D \int f(x)\,dx = A f(x).$$

Uttrycken $\int A f(x)\,dx$ och $A \int f(x)\,dx$ hafva sålunda samma derivata och skilja sig följaktligen från hvarandra med en konstant, hvilken det emellertid icke är nödigt att utskrifva i resultatet, då hvartdera uttrycket redan innehåller en godtycklig additiv konstant.

Ofvanstående regel ger oss t. ex.

$$\int (-3x)\,dx = -3 \int x\,dx = -\frac{3}{2} x^2 + C.$$

Integralen af en summa af ett ändligt antal termer är lika med summan af termernas integraler:

$$(3) \qquad \int (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))\,dx$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx.$$

Ty derivatan af venstra membrum är, enligt integralens definition, lika med $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, och enligt regeln för differentiation af en summa erhålles samma uttryck för högra membrums derivata.

Genom kombination af reglerna (2) och (3) finner man att integralen af en skillnad mellan tvenne funktioner är lika med skillnaden mellan dessa funktioners integraler. Samma regler gifva oss vidare integralen af ett godtyckligt polynom:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C.$$

Vi sågo att den allmänna integralen af en gifven funktion $f(x)$ innehåller en godtycklig additiv konstant. Denna konstant kan bestämmas så att integralen för ett gifvet argumentvärde x_0 antar ett föreskrifvet värde A. Om vi använda samma beteckningar som s. 358, uttryckes sagda villkor genom likheten $F(x_0) + C = A$, hvarur följer $C = A - F(x_0)$. Den sökta integralen är således

$$F(x) - F(x_0) + A.$$

Speciellt representerar uttrycket

$$F(x) - F(x_0)$$

den integralfunktion till $f(x)$ som försvinner för $x = x_0$.

Öfningsuppgifter:

1) Integrera följande funktioner:

$$1, \frac{1}{x^2}, \sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^n}, \frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{x^2 + 2x - 1}{x};$$

$$(ax+b)(cx+d), (x^2-1)^3, 2a\sqrt[3]{x} - \frac{3b}{\sqrt[3]{x^2}} + c;$$

$$e^{-kx}, \sin nx, \sin^2 x, \cos^2 x, (ax+b)^n, \frac{x-1}{x+1}, \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2) Kontrollera riktigheten af följande integralformler:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C,$$

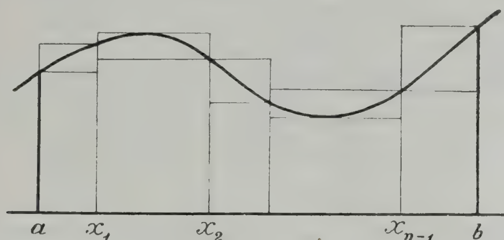
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C.$$

3) Bestäm den kontinuerliga funktion hvars derivata är lika med polynomet $x^3 - x^2 - 4x + 1$, och hvars värde är $= 2$ för $x = -1$.

4) Sök den integralfunktion till uttrycket $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ som försvinner för $x = 0$.

67. **Sammanhanget mellan begreppen integralfunktion och area.** — Vi antaga att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a \leq x \leq b$ samt positiv för $a < x < b$, och betrakta den yta, $S(a, b)$, som begränsas af kurvan $y = f(x)$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna a och b. Med stöd af betraktelserna i n° 61 skola vi främst visa att *denna yta tillkommer ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten.*



Vi inskjuta mellan a och b vissa punkter, $x_1, x_2, \ldots,$ x_{n-1}, så att intervallen (a, b) sönderfaller i n delintervaller

(4) $$(a, x_1), \ (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b),$$

samt uppresa i nämnda punkter ordinator, hvilka dela ytan $S(a, b)$ i n delar. För enhvar af dessa ytdelar konstruera vi, såsom ofvanstående figur anger, den omskrifna och den inskrifna rektangeln. De omskrifna rektanglarna bilda tillsamman en *yttre*, de inskrifna en *inre* polygon med afseende å ytan $S(a, b)$. Om med

$$M_1, \ M_2, \ldots, M_n$$

betecknas de största och med

$$m_1, \ m_2, \ldots, m_n$$

de minsta värdena af funktionen $f(x)$ inom delintervallerna (4), är mätetalet för den yttre polygonens yta lika med summan

(5) $$M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1})$$

och mätetalet för den inre polygonens yta lika med summan

(6) $$m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}).$$

För skillnaden mellan nämnda mätetal erhålles således uttrycket

$$(M_1 - m_1)(x_1 - a) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \cdots \cdot \\ + (M_n - m_n)(b - x_{n-1}),$$

i hvilket $M_1 - m_1$, $M_2 - m_2, \ldots,$ $M_n - m_n$ angifva oscillationen af $f(x)$ inom delintervallerna (4). Emedan funktionen $f(x)$ antagits kontinuerlig för $a < x < b$, är det, enligt satsen s. 39, möjligt att verkställa delningen af intervallen (a, b) på sådant sätt att dess oscillation inom hvarje delintervall är mindre än ett på förhand gifvet godtyckligt litet tal ε. För en sådan delning är ofvanstående uttryck mindre än

$$\varepsilon(x_1 - a) + \varepsilon(x_2 - x_1) + \cdots + \varepsilon(b - x_{n-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Man kan alltså till den betraktade ytan $S(a, b)$ konstruera en yttre och en inre polygon hvilkas mätetal hafva en godtyckligt liten skillnad, och enligt n° 61 tillkommer denna yta följaktligen ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten, h. s. b.

Ifrågavarande mätetal, hvilket jämväl må betecknas med $S(a, b)$, är enligt sin definition mindre än summan (5) och större än summan (6), huru delintervallerna (4) än väljas. Speciellt är således

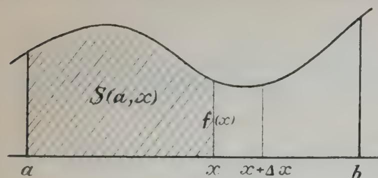
$$m(b - a) < S(a, b) < M(b - a),$$

då med M betecknas det största och med m det minsta värdet af $f(x)$ inom hela intervallen (a, b). Dessa olikheter visa oss att värdet af förhållandet $\frac{S(a, b)}{b - a}$ ligger mellan m och M, och då funktionen $f(x)$ är kontinuerlig sluta vi härur, enligt den första af de s. 38 anförda satserna, att det mellan a och b finnes åtminstone en punkt ξ i hvilken $f(\xi) = \frac{S(a, b)}{b - a}$. Alltså är

$$S(a, b) = (b - a) f(\xi),$$

hvilken likhet geometriskt utsäger att ytan $S(a, b)$ är lika stor som ytan af en rektangel med sträckan (a, b) till bas och ordinatan $f(\xi)$ till höjd.

Vi välja nu ett värde x mellan a och b och betrakta den yta $S(a, x)$ som begränsas af kurvan $y = f(x)$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna a och x. Enligt hvad ofvan visats tillkommer denna yta ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten, för hvilket vi jämväl använda beteckningen $S(a, x)$. Då variabelns värde förändras från x till $x + \Delta x$, erhåller funktionen $S(a, x)$ tillväxten



$$\Delta S = S(a, x + \Delta x) - S(a, x),$$

hvilken representerar mätetalet för den yta som begränsas af kurvan, x-axeln samt ordinatorna i punkterna x och $x + \Delta x$, taget med positivt eller negativt tecken beroende på om Δx har ett positivt eller negativt värde. Denna tillväxt kan således, enligt hvad vi nyss visat, skrifvas under formen

$$\Delta S = f(\xi)\, \Delta x,$$

där ξ betecknar ett värde mellan x och $x + \Delta x$.

Vi sluta häraf främst att ΔS närmar sig 0 samtidigt med Δx och att $S(a, x)$ således är en kontinuerlig funktion af x för $a < x < b$, hvilket för den geometriska åskådningen är omedelbart klart. Men ur ofvanstående likhet följer vidare, om vi skrifva den under formen

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(\xi)$$

och låta Δx närma sig 0, att

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x),$$

ty då Δx försvinner närmar sig ξ värdet x, och $f(\xi)$ konvergerar härvid mot gränsvärdet $f(x)$, eftersom den gifna funktionen antagits kontinuerlig inom intervallen (a, b). Vi erhålla således följande resultat:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a < x < b$ och positiv för $a < x < b$, utgör mätetalet $S(a, x)$ för den yta, som be-

gränsas af kurvan $y = f(x)$, *x-axeln samt ordinatorna i punkterna* a *och* x, *en kontinuerlig funktion af* x *hvars derivata är* $= f(x)$ *i hvarje punkt af den betraktade intervallen.*

Annorlunda uttryckt:

$S(a, x)$ *utgör en kontinuerlig integralfunktion till* $f(x)$ *inom intervallen* $a \leq x \leq b$.

Härmed är tillika ådagalagdt att hvarje kontinuerlig funktion, inom en intervall där den är positiv, verkligen besitter en kontinuerlig integralfunktion. Vi skola längre fram visa att villkoret att funktionen skall vara positiv icke är väsentligt.

Låtom oss nu antaga att vi bland de *elementära* funktionerna, hvilka vi tidigare studerat och lärt oss derivera, kunna finna en inom intervallen $a < x < b$ kontinuerlig funktion, $F(x)$, hvars derivata är lika med den gifna funktionen $f(x)$. Enligt satsen s. 358 har skillnaden $F(x) - S(a, x)$ mellan de två integralfunktionerna $F(x)$ och $S(a, x)$ ett konstant värde för $a < x \leq b$. För $x = a$ är värdet af denna skillnad lika med $F(a)$, ty $S(a, a) = 0$. Följaktligen är $F(x) - S(a, x) = F(a)$ och således

$$S(a, x) = F(x) - F(a)$$

inom hela intervallen $a < x < b$. För $x = b$ följer härur speciellt

$$S(a, b) = F(b) - F(a).$$

Vi hafva härmed bevisat följande viktiga sats:

Om funktionen $f(x)$ *är kontinuerlig för* $a < x \leq b$ *och positiv mellan* a *och* b, *och om* $F(x)$ *är en för* $a \leq x < b$ *kontinuerlig integralfunktion till* $f(x)$, *är den tillväxt,*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F(x), \tag{7}$$

som denna integralfunktions värde erhåller från början till slutet af den betraktade intervallen, lika med mätetalet för den yta som begränsas af kurvan $y = f(x)$, *x-axeln samt ordinatorna i intervallens ändpunkter.*

För att visa hvilken utomordentlig förenkling denna sats medför för beräkningen af plana ytors areor, tillämpa vi den först på de i n⁰ 62 behandlade uppgifterna.

Vi betrakta den yta som begränsas af parabeln $y = x^2$, den positiva x-axeln samt ordinatan i punkten $x (> 0)$ (jmf. s. 339). Då vi veta att

$$D\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2,$$

och då funktionen $\frac{x^3}{3}$ är kontinuerlig för alla argumentvärden, kunna vi enligt ofvanstående sats omedelbart sluta att mätetalet för ifrågavarande yta är lika med den tillväxt integralfunktionen $\frac{x^3}{3}$ erhåller då variabeln växer från 0 till värdet x, alltså lika med $\frac{x^3}{3}$.

Allmännare finner man att den yta som begränsas af sagda parabel, x-axeln samt tvenne godtyckliga ordinator, $x = a$ och $x = b\ (> a)$, har mätetalet

$$\Big|_a^b \frac{x^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

I n⁰ 62 betraktade vi vidare den yta som begränsas af hyperbeln $y = \frac{1}{x}$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna 1 och $x (> 1)$. Då $\log x$ utgör en kontinuerlig integralfunktion till $\frac{1}{x}$ för $x > 0$, finna vi åter omedelbart att mätetalet för ifrågavarande yta är lika med

$$\Big|_1^x \log x = \log x - \log 1 = \log x.$$

För den af samma hyperbel, x-axeln samt tvenne godtyckliga ordinator, $x = a\ (> 0)$ och $x = b\ (> a)$, begränsade ytan erhålles likaså mätetalet

$$\Big|_a^b \log x = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

Vi betrakta ännu den yta som begränsas af kurvan

$y = x^\mu$ $(\mu \neq -1)$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna $x = a$ (> 0) och $x = b$ $(> a)$. I detta fall utgör $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ en inom intervallen $a < x < b$ kontinuerlig integralfunktion, och vi finna således omedelbart att det sökta mätetalet är lika med

$$\left| {}_a^b \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \right. .$$

Om funktionen $f(x)$ är negativ inom intervallen (a, b), ger oss uttrycket (7) den af kurvan $y = f(x)$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna a och b begränsade ytans mätetal, taget med *negativt* tecken. För att inse detta behöfva vi blott betrakta den yta som är symmetrisk till den nyssnämnda med afseende å x-axeln, och hvilken begränsas af kurvan $y = -f(x)$. Då

$$D(-F(x)) = -D\,F(x) = -f(x),$$

så är denna ytas mätetal, och således äfven mätetalet för den först betraktade ytan, lika med

$$\left| {}_a^b (-F(x)) = -F(b) + F(a) = -(F(b) - F(a)) \right. .$$

Öfningsuppgifter (vid behandlingen af hvarje uppgift bör läsaren upprita den betraktade ytan samt ytenheten):

1) Beräkna arean af den yta som begränsas af kurvan $y = \sin x$ och sträckan $0 \leq x \leq \pi$ af x-axeln.

2) Huru stor är den yta som begränsas af x-axeln och parabeln

$$y = x^2 + 3x - 4?$$

3) Sök arean af den yta som begränsas af den räta linien $y = mx$ och parabeln $y^2 = 2px$.

4) Beräkna storleken af den yta som begränsas af *kedjelinien*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

x-axeln och tvenne ordinator.

68. Nytt bevis för integralkalkylens fundamentalsats. — Vår framställning i de två senaste paragraferna hvilar helt och hållet på den i n⁰ 55 bevisade viktiga satsen:

Om derivatorna af tvenne kontinuerliga funktioner till värdet öfverensstämma i hvarje punkt af en gifven intervall, är funktionernas skillnad konstant inom denna intervall.

Vi skola för denna sats gifva ett nytt bevis, som till sin natur är mer omedelbart och lättare att öfverskåda än det vi gåfvo i n⁰ 55. Vi stödja oss härvid på följande enkla hjälpsats, hvilken utgör ett specialfall af den s. 44 bevisade satsen.

Om nämnarena i bråken

$$\frac{\alpha}{\beta} \quad \textit{och} \quad \frac{\gamma}{\delta}$$

hafva samma tecken, ligger värdet af uttrycket

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

mellan dessa bråks värden eller har samma värde som bråken, beroende på om dessa sinsemellan äro olika eller lika.

Riktigheten häraf framgår omedelbart ur identiteterna

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta(\beta+\delta)},$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta(\beta+\delta)}.$$

Nämnarena $\beta(\beta+\delta)$ och $\delta(\beta+\delta)$ äro nämligen båda positiva, emedan deras faktorer hafva samma tecken, och ofvanstående differenser hafva således motsatta tecken om $\frac{\alpha}{\beta}$ och $\frac{\gamma}{\delta}$ äro olika, i hvilket fall $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, medan de båda försvinna om $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Vi gå nu till beviset för hufvudsatsen. Såsom i n⁰ 55 redan framhölls, återföres denna omedelbart till följande enklare sats:

Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig och dess derivata lika med 0 i hvarje punkt af en intervall, är funktionen konstant inom denna intervall.

Vi föra beviset indirekt. Vore vårt påstående icke riktigt, funnes det inom den betraktade intervallen säkert tvenne punkter, a och $b\,(>a)$, i hvilka funktionen $f(x)$ hade olika värden. Vi skola visa att ur detta antagande skulle följa att derivatan $f'(x)$ vore olika 0 i åtminstone en punkt af intervallen, tvärt emot hvad vi förutsatt.

Vi antaga först att $f(b) > f(a)$, i hvilket fall den mot intervallen (a, b) svarande differenskvoten

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{8}$$

har ett positivt värde.

Vi dela intervallen (a, b) midt itu, i punkten c, och bilda de mot delintervallerna (a, c) och (c, b) svarande differenskvoterna

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad \text{och} \quad \frac{f(b)-f(c)}{b-c}. \tag{9}$$

Summan af dessas täljare är $f(b)-f(a)$, summan af nämnarena $b-a$, och nämnarena äro båda positiva. Enligt ofvanstående hjälpsats kunna vi följaktligen sluta att den ena af ifrågavarande kvoter är större och den andra mindre än kvoten (8), såframt de icke äro sinsemellan lika, i hvilket fall de båda hafva samma värde som (8)[1]).

Äro kvoterna (9) olika, utvälja vi af delintervallerna (a, c) och (c, b) den mot hvilken svarar den större kvoten; äro kvoterna i fråga lika, välja vi den första af nämnda delintervaller, alltså (a, c).

Denna öfverenskommelse ger oss en fullt bestämd delintervall, hvars begynnelse- och slutpunkt vi för likformighetens skull beteckna med a_1 och b_1. Den mot denna delintervall (a_1, b_1) svarande differenskvoten

$$\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \tag{10}$$

---

[1]) Läsaren uppmanas att tolka detta resonemang geometriskt.

är, såsom ur det sagda framgår, till sitt värde större än eller lika med kvoten (8).

Vi dela nu intervallen (a_1, b_1) midt itu, och välja af de två delintervallerna åter den mot hvilken svarar den större differenskvoten, eller, i händelse differenskvoterna äro lika, den första af dessa delintervaller. Om vi med (a_2, b_2) beteckna den sålunda erhållna intervallen, är enligt ofvanstående hjälpsats kvoten

$$\frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}$$

större än eller lika med kvoten (10).

Detta förfarande kan fortsättas in infinitum och leder till en obegränsad följd af fullt bestämda intervaller

$$(a, b),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots,\ (a_n, b_n), \ldots,$$

af hvilka enhvar utgör hälften af den närmast föregående, och mot hvilka svara differenskvoter som bilda en stigande talräcka:

$$(11) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \leqq \cdots \leqq \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \leqq \cdots$$

Enligt satsen s. 208 finnes det ett och endast ett tal som är gemensamt för alla dessa intervaller. Detta tal, som vi beteckna med ξ, utgör det gemensamma gränsvärdet för den stigande talräckan $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ och den fallande talräckan $b, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Vi skola visa att

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(\xi).$$

Om samtliga tal a_n, hvilkas index öfverstiger en viss gräns n_0, äro sinsemellan lika och således lika med ξ, har man

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi} \quad \text{för} \quad n > n_0,$$

och likheten (12) följer således i detta fall omedelbart ur derivatans definition (jmf. likheten (2)' s. 239).

På samma sätt inses att likheten (12) gäller i det fall då alla talen b_n, från och med ett visst af dem, äro sinsemellan lika och alltså lika med ξ.

Om intet af dessa speciella fall inträffar, har man för hvarje index n

$$a_n < \xi < b_n.$$

Enligt ofvanstående hjälpsats ligger då värdet af kvoten $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ mellan

$$\frac{f(b_n) - f(\xi)}{b_n - \xi} \quad \text{och} \quad \frac{f(\xi) - f(a_n)}{\xi - a_n},$$

eller har samma värde som dessa kvoter, om de äro sinsemellan lika, och då sistnämnda kvoter med växande n båda konvergera mot gränsvärdet $f'(\xi)$, gäller likheten (12) följaktligen äfven i detta fall. Dess riktighet är härmed allmänt bevisad.

Nu följer ur olikheterna (11) att gränsvärdet (12) är större än eller lika med kvoten (8), och således positivt om, såsom vi antagit, $f(b) > f(a)$. Under detta antagande existerar det således säkert en punkt ξ af intervallen (a, b) i hvilken derivatan af funktionen $f(x)$ har ett positivt värde.

Genom att något modifiera ofvanstående resonemang, eller genom att tillämpa detsamma oförändradt på funktionen $-f(x)$, visar man likaså att, om $f(b) < f(a)$, derivatan $f'(x)$ är negativ i åtminstone en punkt af intervallen (a, b).

Antagandet $f(a) \neq f(b)$ leder sålunda i hvarje fall till en slutsats som står i strid med förutsättningarna i vår sats, hvars riktighet härmed är bevisad.

69. **Integration medels substitution**. — Vi återvända till problemet att integrera en gifven funktion eller att finna dess integral, d. v. s. en funktion som har den gifna funktionen till derivata. Vi skola redogöra för särskilda *integrationsmetoder*, medels hvilkas hjälp det i flere fall lyckas att uttrycka integralen genom elementära funktioner.

En viktig integrationsmetod erhålles genom omvändning af regeln för differentiation af en sammansatt funktion. Den

förelagda funktionen må vara $f(x)$ och $F(x)$ en integralfunktion till densamma, så att följaktligen, enligt den s. 359 införda beteckningen,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{en konstant}.$$

Vi införa nu en ny variabel t som är bunden vid x genom en viss likhet,

$$\varphi(x, t) = 0,$$

hvilken definierar hvardera af variablerna x och t såsom en funktion af den andra:

(13) $$x = x(t), \quad t = t(x).$$

Härvid öfvergår $F(x)$ i en funktion af t,

$$F(x) = F\big(x(t)\big),$$

för hvars derivata enligt n⁰ 47 erhålles uttrycket

$$D_t F\big(x(t)\big) = \big[D_x F(x)\big]_{x = x(t)} \cdot D_t\, x(t).$$

Men enligt vårt antagande är $D_x F(x) = f(x)$, hvaraf följer

$$D_t F\big(x(t)\big) = f\big(x(t)\big)\, x'(t).$$

Vi kunna således skrifva

$$F\big(x(t)\big) = \int f\big(x(t)\big)\, x'(t)\, dt + \text{en konstant},$$

och erhålla följaktligen för integralen $\int f(x)\,dx$ den viktiga transformationsformeln:

(14) $$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x = x(t)} = \int f\big(x(t)\big)\, x'(t)\, dt,$$

där det icke är nödigt att utskrifva någon integrationskonstant.

Det gäller att välja substitutionen (13) på sådant sätt att man verkligen kan utföra integrationen i högra membrum af (14), d. v. s. att man kan angifva en funktion $\bar{F}(t)$ hvars

derivata är lika med $f(x(t))\,x'(t)$. Om man funnit en sådan funktion och i denna åter inför variabeln x medels substitutionen $t = t(x)$, öfvergår densamma i en funktion af x hvars derivata är lika med $f(x)$. Detta följer ur ofvanstående framställning, men kan äfven direkt visas genom differentiation, ty enligt n⁰ 47 är

$$D_x \bar{F}(t(x)) = [D_t \bar{F}(t)]_{t=t(x)} \cdot D_x t(x),$$

hvilken likhet, då enligt antagandet $D_t \bar{F}(t) = f(x(t))\,x'(t)$ kan skrifvas

$$D_x \bar{F}(t(x)) = [f(x(t))\,x'(t)\,t'(x)]_{t=t(x)},$$

eller ännu, då $t = t(x)$ utgör den inversa funktionen till $x = x(t)$ och man således enligt n⁰ 46 har $x'(t)\,t'(x) = 1$,

$$D_x \bar{F}(t(x)) = f(x).$$

Formeln (14) kan utsägas som följer:

För att i integralen $\int f(x)\,dx$ införa en ny variabel t medels substitutionen $x = x(t)$, har man endast att verkställa denna substitution i integranden $f(x)$ samt i stället för dx substituera $d(x(t)) = x'(t)\,dt$.

Vi tillämpa här denna regel på ett antal enkla exempel. Längre fram skola vi särskildt behandla dess användning för algebraiska och trigonometriska funktioners integration.

1⁰. För att beräkna integralen $\int \sin ax\,dx$, där a är en konstant, sätta vi $ax = t$, hvaraf följer $x = \frac{t}{a}$, $dx = \frac{dt}{a}$, och erhålla då enligt (14)

$$\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{a}\cos t + C,$$

och slutligen, då vi för t åter insätta ax,

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

Allmänt finner man medels nämnda substitution

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

2°. Integralen $\int (ax+b)^{\mu}\,dx$, där a och b beteckna konstanter, återföres genom substitutionen $ax+b=t$, $dx=\frac{dt}{a}$, till integralen $\frac{1}{a}\int t^{\mu}\,dt$, och man finner sålunda

$$\int (ax+b)^{\mu}\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \text{om} \quad \mu \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log(ax+b) + C.$$

Samma substitution ger oss den allmänna formeln

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

3°. För att erhålla integralen

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$$

införa vi $x^2 = t$ såsom ny variabel. Genom differentiation få vi $2x\,dx = dt$ (jmf. s. 278—279), och vår regel ger oss således

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} t + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}(x^2) + C.$$

Vi anföra tillika den allmänna formeln

$$\int f(x^n)\,x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int f(t)\,dt,$$

där x och t äro bundna genom likheten $x^n = t$.

4°. Vi betrakta nu integralen $\int \sin^{\mu} x \cos x\,dx$, där μ är ett godtyckligt reellt tal. Då $\cos x\,dx = d\sin x$, öfvergår

denna integral genom substitutionen $\sin x = t$ i integralen $\int t^\mu\, dt$, och vi erhålla således

$$\int \sin^\mu x \cos x\, dx = \frac{\sin^{\mu+1} x}{\mu+1} + C, \quad \text{om} \quad \mu \neq -1,$$

och för $\mu = -1$

$$\int \cot x\, dx = \log \sin x + C.$$

På analogt sätt beräknas integralen $\int (a+bx^2)^\mu\, x dx$. Vi observera här att $d(a+bx^2) = 2bxdx$, eller

$$x dx = \frac{1}{2b} d(a+bx^2),$$

och sluta häraf att integralen genom substitutionen $a+bx^2 = t$ antar formen $\frac{1}{2b}\int t^\mu\, dt$, och att således, om $\mu \neq -1$,

$$\int (a+bx^2)^\mu\, x dx = \frac{1}{2b} \frac{(a+bx^2)^{\mu+1}}{\mu+1} + C,$$

medan för $\mu = -1$ erhålles

$$\int \frac{x dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \log (a+bx^2) + C.$$

Dessa resultat utgöra speciella fall af följande allmänna formler:

$$\int (u(x))^\mu\, u'(x)\, dx = \frac{(u(x))^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad (\mu \neq -1),$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \log u(x) + C.$$

5°. För att beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

göra vi substitutionen $e^x = t$, hvarur erhålles $e^x\, dx = dt$, $dx = \frac{dt}{t}\cdot$ Integralen antar då formen $\int \frac{dt}{t^2+1}$, och vi få således

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \text{arc tang}\,(e^x) + C.$$

Allmänt erhålles medels nämnda substitution

$$\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

6°. Vi gå till den viktiga integralen

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}.$$

Man har

$$ax^2+2bx+c = \frac{1}{a}(a^2x^2+2abx+ac)$$

$$= \frac{1}{a}\left((ax+b)^2+ac-b^2\right).$$

Om vi antaga $ac-b^2>0$, i hvilket fall det betraktade polynomet icke försvinner för något reellt värde x, kunna vi sätta detsamma under formen

$$ax^2+2bx+c = \frac{ac-b^2}{a}\left(1+\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2\right).$$

Vi göra nu substitutionen

$$\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} = t, \quad dx = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\,dt,$$

hvarvid polynomet antar formen $\frac{ac-b^2}{a}(1+t^2)$, och erhålla då enligt (14)

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\,\text{arc tang}\,t + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + C,$$

hvilket resultat läsaren uppmanas att kontrollera genom differentiation.

Vi betrakta ännu i detta sammanhang integralen

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+2bx+c}\,dx,$$

i det vi fortfarande antaga $ac - b^2 > 0$, och använda för dennas reduktion ett förfarande som ofta är tillämpligt. Vi bilda derivatan af integrandens nämnare:

$$D(ax^2 + 2bx + c) = 2ax + 2b,$$

och dividera täljaren $\alpha x + \beta$ med denna derivata, hvarvid erhålles

$$\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2a}(2ax + 2b) + \frac{a\beta - b\alpha}{a}.$$

Den gifna integralen kan således sönderdelas på följande sätt:

$$\frac{\alpha}{2a}\int \frac{2ax + 2b}{ax^2 + 2bx + c}\,dx + \frac{a\beta - b\alpha}{a}\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c},$$

och enligt hvad ofvan visats är denna integral således lika med

$$\frac{\alpha}{2a}\log(ax^2 + 2bx + c) + \frac{1}{a}\cdot\frac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{ac - b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}}\right) + C.$$

7°. Vi behandla slutligen integralen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}},$$

där vi antaga $a < 0$. Ur likheten

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{-a}\left(b^2 - ac - (ax + b)^2\right)$$

framgår att kvantiteten $b^2 - ac$ måste vara positiv för att kvadratroten skall hafva ett reellt värde. Man kan då skrifva

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{-a}}\sqrt{1 - \left(\frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)^2},$$

och medels substitutionen

$$\frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} = t, \quad dx = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}\,dt$$

bringas integralen således under formen $-\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$, hvaraf följer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \text{arc sin} \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} + C,$$

hvilket resultat läsaren bör verificera.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna följande integraler och kontrollera resultaten genom differentiation:

$$\int \frac{dx}{3x+4}, \int x\sqrt[3]{2x+1}\,dx, \int \frac{x\,dx}{2x+5}, \int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx;$$

$$\int e^{-k^2x^2} x\,dx, \int \frac{3x\,dx}{x^2-1}, \int \frac{ax+b}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \int \frac{5x^2\,dx}{(a+bx^3)^4};$$

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx, \int \frac{a \sin x}{b+c \cos x}\,dx, \int \text{tang}\, ax\,dx, \int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1};$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \int \sin mx \cos nx\,dx, \int \sin mx \sin nx\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+x+x^2}, \int \frac{3x+2}{1+x+x^2}\,dx, \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

2) Bestäm i ett gifvet rätvinkligt koordinatsystem de kurvor hvilkas subtangent har ett konstant värde, samt de kurvor hvilkas subnormal är konstant (jmf. s. 253).

70. **Partiell integration.** — En annan viktig integrationsmetod härflyter ur regeln för derivering af en produkt af tvenne funktioner, $u = u(x)$ och $v = v(x)$:

$$D(uv) = uDv + vDu. \tag{15}$$

Om vi multiplicera med dx och använda differentialbeteckningen (jmf. s. 277—278), antar denna likhet formen

$$d(uv) = udv + vdu,$$

hvarur följer

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Vi integrera här hvartdera membrum och erhålla då, med stöd af hvad i n⁰ 66 visats om integralen af en summa eller skillnad,

$$(16) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

hvilken formel innehåller regeln för s. k. *partiell integration*.

Vi ingå något närmare på förutsättningarna och beviset för detta resultat. Med $\int u\,dv = \int u\,Dv\,dx$ förstås en funktion hvars derivata är $u\,Dv$, och likaså betecknar $\int v\,du = \int v\,Du\,dx$ en funktion hvars derivata är vDu. Vi antaga att det existerar funktioner som uppfylla dessa villkor och äro kontinuerliga inom en viss intervall (a, b), inom hvilken jämväl u och v antagas kontinuerliga. Uttrycken

$$\int u\,dv \quad \text{och} \quad uv - \int v\,du$$

representera då inom nämnda intervall kontinuerliga funktioner af x, hvilkas derivator äro lika med

$$u\,Dv \quad \text{resp.} \quad D(uv) - vDu$$

och således, enligt (15), hafva samma värde. Skillnaden mellan dessa uttryck är följaktligen inom (a, b) lika med en konstant, hvilken vi emellertid icke utskrifva i formeln (16) då i $\int u\,dv$ och i $\int v\,du$ redan ingår ett arbiträr additiv konstant.

Vi tillämpa formeln (16) på beräkningen af några ofta förekommande integraler.

1⁰. Vi betrakta först integralen $\int \log x\,dx$, och tillämpa på denna formeln (16) i det vi sätta $u = \log x$, $v = x$. Härvid erhålles

$$\int \log x\,dx = x \log x - \int x\,d \log x.$$

Men $d \log x = \frac{dx}{x}$, hvaraf följer

$$\int x\,d \log x = \int dx = x + \text{ en konstant},$$

och vårt resultat antar således formen [1])

$$\int \log x\,dx = x \log x - x + C = x \log \frac{x}{e} + C,$$

där C betecknar integrationskonstanten och e den Neperska basen.

För att finna integralen $\int x \sin x\,dx$, skrifva vi $\sin x\,dx = -d(\cos x)$, och erhålla då enligt (16)

$$\int x \sin x\,dx = -\int x\,d(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= \sin x - x \cos x + C.$$

2⁰. I vissa fall är man tvungen att flere gånger använda formeln (16) för att erhålla integralens explicita uttryck. Gäller det t. ex. att beräkna integralen $\int e^x x^2\,dx$, sätta vi $e^x dx = d(e^x)$ och erhålla härvid

$$\int e^x x^2\,dx = \int x^2\,d(e^x) = x^2 e^x - 2\int e^x x\,dx.$$

På den i högra membrum uppträdande integralen tillämpa vi ånyo formeln (16), som ger oss

$$\int e^x x\,dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + \text{ en konstant.}$$

För den gifna integralen erhålles således uttrycket

$$\int e^x x^2\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

3⁰. Stundom leder tillämpningen af regeln (16) till en likhet där den sökta integralen åter uppträder i högra membrum, jämte kända funktioner, och ur hvilken densamma således blir bestämd.

---

[1]) Läsaren bör här och i det följande omedelbart verificera integrationsresultatet genom differentiation.

Om vi sålunda i integralen $\int \cos^2 x\,dx$ sätta $\cos x\,dx = d(\sin x)$ och tillämpa (16), erhålles

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,d(\sin x) = \cos x \sin x + \int \sin^2 x\,dx$$

$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx + \text{ en konstant,}$$

hvarur följer

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cos x + x + \text{ en konstant,}$$

och således

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C.$$

På analogt sätt kan integralen $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$ beräknas. Regeln (16) ger oss i detta fall, då vi sätta $u = \sqrt{1 - x^2}$, $v = x$,

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Integralen i högra membrum skrifva vi under formen

$$\int \frac{1 - (1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \int \sqrt{1 - x^2}\,dx,$$

och erhålla då likheten

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc\,sin} x - \int \sqrt{1 - x^2}\,dx + \text{ en konstant,}$$

ur hvilken följer

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc\,sin} x) + C.$$

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna följande integraler och pröfva resultatens riktighet:

$$\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx, \int \sin^2 x\,dx, \int x^3 \log x\,dx, \int (\log x)^2\,dx, \int \frac{x^2\,dx}{(1 + x^2)^2};$$

$$\int x^2 \cos nx\, dx\,, \int e^x \cos x\, dx\,, \int e^{-kx} \sin nx\, dx\,, \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\, dx\,.$$

2) Bestäm medels integration arean af en cirkel samt arean af en ellips.

3) Härled följande reduktionsformler:

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx\,,$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx\,,$$

och beräkna med deras hjälp de explicita uttrycken för integralerna i venstra membra då $n = 2, 3, 4$.

4) Beräkna integralerna

$$\int e^x x^n\, dx\,, \int (\log x)^n\, dx\,,$$

där n är ett positivt helt tal. Genom hvilken substitution kan den ena af dessa integraler öfverföras i den andra?

71. **Integration af rationella funktioner.** — En rationell funktion af variabeln x, som icke reducerar sig till ett polynom, kan bringas under formen

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ äro polynom hvilka icke hafva någon gemensam divisor.

Om graden af polynomet $P(x)$ är högre än eller lika hög som graden af $Q(x)$, erhåller man vid division af det förra polynomet med det senare

$$P(x) = Q(x)\, G(x) + H(x),$$

där $G(x)$ och $H(x)$ äro polynom af hvilka det senare, som utgör den vid divisionen erhållna resten, är af lägre grad än divisorn $Q(x)$. Den rationella funktionen kan således skrifvas

$$R(x) = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)}.$$

Om nämnaren $Q(x)$ är af första graden, kan man med

hjälp af denna likhet omedelbart integrera funktionen $R(x)$. Så erhålles t. ex.

$$\frac{x^3}{2x+3} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2x+3},$$

hvarur följer

$$\int \frac{x^3}{2x+3} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{8}x + C - \frac{27}{16}\log(2x+3).$$

Är polynomet $Q(x)$ af högre grad än den första, kan detsamma upplösas i en produkt af *reella* faktorer af första eller andra graden. Detta följer ur *algebrans fundamentalsats,* hvilken vi bevisa i slutet af det nionde kapitlet. Mot en reell rot x_0 till ekvationen $Q(x) = 0$ svarar i polynomet $Q(x)$ en lineär faktor, nämligen $x - x_0$ (jmf. s. 56—60). Mot ett par konjugeradt komplexa rötter $\alpha \pm i\beta$ till nämnda ekvation svarar åter en reell faktor af andra graden,

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

hvilken icke kan upplösas i reella lineära faktorer.

Vi skola genomgå de olika fall som kunna inträffa med afseende å de i $Q(x)$ ingående faktorerna, samt visa huru man i hvarje fall kan sönderdela den rationella funktionen i *partialbråk* hvilka omedelbart kunna integreras.

1°. Om $Q(x)$ utgör en potens af en enda lineär faktor, är det i allmänhet enklast att utveckla täljaren $P(x)$ efter potenser af denna samma faktor.

Vi betrakta såsom exempel funktionen

$$\frac{x^4 + 3x - 2}{(x+2)^3}.$$

Om vi i täljaren substituera $x = (x + 2) - 2$ och utveckla efter potenser af $x + 2$, erhålles

$$x^4 + 3x - 2 = (x + 2)^4 - 8(x+2)^3 + 24(x+2)^2 - 29(x+2) + 8,$$

och således

$$\frac{x^4 + 3x - 2}{(x+2)^3} = x - 6 + \frac{24}{x+2} - \frac{29}{(x+2)^2} + \frac{8}{(x+2)^3}.$$

Uttrycket i högra membrum kan nu omedelbart integreras:

$$\int \frac{x^4+3x-2}{(x+2)^3}\,dx = \frac{x^2}{2} - 6x + C + 24\log(x+2) + \frac{29}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

2°. Vi antaga nu att $Q(x)$ innehåller olika faktorer och däribland äfven lineära. En af dessa sistnämnda faktorer må vara $x-x_0$, och $(x-x_0)^n$ den högsta potens af denna faktor som innehålles i $Q(x)$. Då är

$$Q(x) = (x-x_0)^n \overline{Q}(x),$$

där $\overline{Q}(x)$ är ett polynom som icke försvinner för $x = x_0$, eftersom detsamma enligt vårt antagande icke är divisibelt med $(x-x_0)$.

Vi reducera i detta fall den rationella funktionens nämnare till enklare form genom att från funktionen afskilja vissa partialbråk med konstant täljare och en potens af $x-x_0$ till nämnare. För detta ändamål bilda vi först skillnaden

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-x_0)^n} = \frac{P(x) - A\overline{Q}(x)}{(x-x_0)^n\,\overline{Q}(x)}$$

och bestämma konstanten A så att täljaren i högra membrum blir divisibel med $x-x_0$, hvilket, enligt satsen s. 56, inträffar om

$$P(x_0) - A\,\overline{Q}(x_0) = 0.$$

Emedan $\overline{Q}(x_0) \neq 0$, ger oss detta villkor för konstanten A ett fullt bestämdt värde

$$A = \frac{P(x_0)}{\overline{Q}(x_0)},$$

hvilket är skildt från 0 om, såsom vi antagit, $P(x)$ icke har någon divisor gemensam med $Q(x)$ och således $P(x_0) \neq 0$. För detta värde A är då

$$P(x) - A\,\overline{Q}(x) = (x-x_0)^\mu P_1(x),$$

där μ betecknar ett helt tal > 1 och $P_1(x)$ ett polynom som icke vidare är divisibelt med $(x-x_0)$, och vi erhålla följaktligen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^n} + \frac{P_1(x)}{(x-x_0)^{n-\mu}\,\overline{Q}(x)}.$$

Om $n-\mu > 0$, tillämpa vi detta samma förfarande på den senare termen i högra membrum, och genom att fortfara på detta sätt erhålla vi för den gifna rationella funktionen en sönderdelning af utseendet

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^n} + \frac{A_1}{(x-x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(x-x_0)} + \frac{\overline{P}(x)}{\overline{Q}(x)},$$

där $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ äro konstanter och $\overline{P}(x)$ ett polynom.

3°. I de fall då samtliga rötter till ekvationen $Q(x) = 0$ äro reella och $Q(x)$ således utgör en produkt af reella lineära faktorer, leder ofvan skildrade förfarande slutligen till en sönderdelning af den rationella funktionen i idel partialbråk med konstant täljare och en potens af någon lineär faktor i $Q(x)$ till nämnare. I denna form kan den rationella funktionen omedelbart integreras.

Vi betrakta såsom exempel funktionen

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}.$$

För att sönderdela denna i partialbråk, bilda vi skillnaden

$$\frac{1}{x^2-a^2} - \frac{A}{x-a} = \frac{1-A(x+a)}{(x-a)(x+a)},$$

och bestämma konstanten A så att täljaren i högra membrum försvinner för $x = a$. Detta ger oss villkoret $1 - 2aA = 0$, hvaraf $A = \frac{1}{2a}$ och

$$1 - A(x+a) = 1 - \frac{x+a}{2a} = -\frac{x-a}{2a}.$$

Högra membrum i ofvanstående likhet reducerar sig alltså till $-\frac{1}{2a}\,\frac{1}{x+a}$, och vi erhålla

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a},$$

hvarur genom integration följer

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log (x - a) - \frac{1}{2a} \log (x + a) + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a} + C.$$

Vi skola ännu sönderdela funktionen

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{(x - 1)^2 (x + 1)^2}$$

i partialbråk. Vi bilda först skillnaden

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{(x - 1)^2 (x + 1)^2} - \frac{A}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 + 3x + 4 - A(x + 1)^2}{(x - 1)^2 (x + 1)^2}$$

och bestämma A så att täljaren i högra membrum försvinner för $x = 1$. Detta inträffar om $A = 2$, för hvilket värde erhålles

$$x^2 + 3x + 4 - A(x + 1)^2 = - x^2 - x + 2 = -(x - 1)(x + 2).$$

Alltså är

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{(x - 1)^2 (x + 1)^2} = \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)^2}.$$

Vi sönderdela nu den senare termen i högra membrum, i det vi bilda skillnaden

$$\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)^2} - \frac{A_1}{x - 1} = \frac{x + 2 - A_1 (x + 1)^2}{(x - 1)(x + 1)^2}$$

och bestämma A_1 så att täljaren i högra membrum försvinner för $x = 1$. Härvid erhålles $A_1 = \frac{3}{4}$, samt

$$x + 2 - A_1 (x + 1)^2 = -\frac{1}{4}(3x^2 + 2x - 5) = -\frac{1}{4}(x - 1)(3x + 5).$$

Således är

$$-\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3x + 5}{(x + 1)^2}.$$

I täljaren af den senare termen i högra membrum sätta vi ännu $x=(x+1)-1$, hvaraf $3x+5=3(x+1)+2$, och erhålla då

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3x+5}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Vårt slutresultat blir således:

$$\frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1},$$

och genom integration erhålles härur

$$\int\frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx=-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{4}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

4⁰. Vi öfvergå till det fall då rötterna till ekvationen $Q(x)=0$ icke alla äro reella och polynomet $Q(x)$ således innehåller reella faktorer af andra graden som icke kunna upplösas i reella lineära faktorer. Likväl behandla vi icke detta fall allmänt, utan inskränka oss till några typiska exempel.

Vi betrakta först funktionen

$$\frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)},$$

hvars nämnare innehåller en andragrads faktor, x^2+x+1, som icke vidare kan upplösas, och dessutom en lineär faktor. Vi befria oss från denna sistnämnda genom att från funktionen afskilja ett bråk af formen $\frac{A}{x-3}$ och bestämma konstanten såsom ofvan föreskrifvits. På detta sätt erhålles

$$\frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-3}+\frac{x+1}{x^2+x+1},$$

hvarur genom integration följer

$$\int\frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}\,dx=\log(x-3)+\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Integralen i högra membrum beräknas enligt det s. 378

angifna förfarandet. Vi bilda $D(x^2+x+1)=2x+1$ och skrifva $x+1=\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}$, samt härefter

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Den första integralen i högra membrum är lika med

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \text{en konstant}.$$

I den senare integralen bringa vi polynomet under formen

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

och substituera $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t$, hvarvid erhålles

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang} t + \text{en konstant}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \text{en konstant}.$$

Vi få således, då vi sammanslå de logaritmiska termerna,

$$\int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\log\left((x-3)^2(x^2+x+1)\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

På analogt sätt behandlas hvarje rationell funktion hvars nämnare innehåller endast en faktor af andra graden.

5°. Vi betrakta nu funktionen

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

hvars nämnare innehåller två olika faktorer af andra graden som icke kunna upplösas i reella lineära faktorer. Vi afskilja i detta fall en term af formen $\frac{Ax+B}{x^2+1}$:

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+2)} - \frac{Ax+B}{x^2+1} = \frac{x^3+1-(Ax+B)(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

och bestämma konstanterna A och B så att täljaren i högra membrum exakt kan divideras med x^2+1. Då

$$x^3+1 = x(x^2+1)+1-x, \quad x^2+2 = (x^2+1)+1,$$

se vi att vid nämnda division erhålles till rest

$$1-x-(Ax+B) = 1-B-(A+1)x,$$

hvilket uttryck således bör identiskt försvinna. Detta villkor ger oss $A=-1, B=1$, hvarur följer

$$\begin{aligned} x^3+1-(Ax+B)(x^2+2) &= (x^2+1)(x-Ax-B) \\ &= (x^2+1)(2x-1). \end{aligned}$$

Den gifna funktionen kan således skrifvas under formen

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1-x}{x^2+1} + \frac{2x-1}{x^2+2}.$$

Vi erhålla nu

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} \\ &= \text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \text{en konstant}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2+2}\,dx &= \int \frac{2x\,dx}{x^2+2} - \int \frac{dx}{x^2+2} \\ &= \log(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \text{en konstant}, \end{aligned}$$

och integralen af den gifna funktionen är således:

$$\int \frac{(x^3+1)\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \text{arc tang}\, x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \log\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

6°. Slutligen behandla vi funktionen

$$\frac{x^3+2x^2+5x+3}{(x^2+1)^2},$$

hvars nämnare innehåller tvenne lika faktorer af andra graden. Då täljaren divideras med x^2+1, erhålles

$$x^3+2x^2+5x+3=(x^2+1)(x+2)+4x+1,$$

och vår funktion kan således skrifvas

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Då detta uttryck integreras, erhålles till resultat

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1)+2\operatorname{arc\,tang}x-\frac{2}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

där det ännu återstår att beräkna den sista integralen.

För detta ändamål skrifva vi

$$\frac{1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{(x^2+1)^2},$$

och erhålla då

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\operatorname{arc\,tang}x-\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Vidare är

$$-\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int x\left(\frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\int x\,d\left(\frac{1}{x^2+1}\right),$$

och genom partiell integration få vi således

$$-\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}x+C.$$

Då dessa resultat sammanfattas, finner man för den gifna funktionens integral uttrycket

$$\int\frac{x^3+2x^2+5x+3}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-4}{x^2+1}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{5}{2}\operatorname{arc\,tang}x+C.$$

Ofningsuppgifter:

1) Integrera följande funktioner:

$$\frac{x^3}{(x+3)^2},\quad \frac{x^4}{x^2-5x+6},\quad \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)},\quad \frac{x^5+3x+1}{(x^2-1)^2},$$

$$\frac{x-1}{x^3+1},\quad \frac{1}{x^2(x^4-1)},\quad \frac{x+1}{(x^2+2)^3},\quad \frac{x^3}{(x^2-2x+5)(x^2+x+3)}.$$

2) Bevisa att, i händelse $P(x)$ är af lägre grad än $Q(x)$ och ekvationen $Q(x)=0$ har endast reella och olika rötter, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, partialbråksönderdelningen af funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kan skrifvas under formen (jmf. n⁰ 11):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}\frac{1}{x-x_1} + \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}\frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{P(x_n)}{Q'(x_n)}\frac{1}{x-x}.$$

Tillämpa denna formel på den tredje af ofvanstående funktioner.

72. **Integration af algebraiska funktioner.** — Vi betrakta funktioner som äro bildade medels rationella operationer af variabeln x och en irrationalitet af formen $\sqrt[n]{r(x)}$, där n är ett positivt helt tal och $r(x)$ en rationell funktion. En dylik funktion må allmänt betecknas $R\left(x, \sqrt[n]{r(x)}\right)$.

Vi skola behandla några allmänna fall i hvilka integralen af en funktion af detta slag,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{r(x)}\right) dx,$$

genom en lämpligt vald substitution kan återföras till en integral af en rationell funktion och således uttryckas genom elementära funktioner, medels det i n⁰ 71 beskrifna förfarandet.

Det gäller härvid att finna en variabel, t, som är bunden vid x genom en viss relation,

$$\varphi(x, t) = 0, \tag{17}$$

på grund af hvilken såväl x som $\sqrt[n]{r(x)}$ öfvergår i en *rationell* funktion af t:

$$x = x(t), \quad \sqrt[n]{r(x)} = y(t).$$

Genom substitutionen $x = x(t)$ erhålles då

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{r(x)}\right) dx = \int R\left(x(t), y(t)\right) x'(t)\, dt,$$

där integranden $R\left(x(t), y(t)\right) x'(t)$ utgör en rationell funktion af t. Sedan denna integrerats, har man att i resultatet för t substituera dess uttryck såsom funktion af x enligt likheten (17).

1°. Vi behandla först det fall då $r(x)$ utgör *en lineär funktion* och integralen således har formen

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx. \tag{18}$$

I detta fall välja vi roten $\sqrt[n]{ax+b}$ till ny variabel:

$$\sqrt[n]{ax+b} = t,$$

och erhålla då

$$x = \frac{t^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a} t^{n-1}\, dt,$$

hvarur följer:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = \frac{n}{a} \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) t^{n-1}\, dt.$$

Vi tillämpa detta förfarande på integralen

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+1}}.$$

Vi hafva här att göra substitutionen

$$\sqrt{x+1} = t, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t\, dt,$$

som ger oss

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+1}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2}.$$

Integranden i högra membrum kan skrifvas (jmf. s. 386)

$$\frac{1}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right),$$

hvaraf följer

$$2\int\frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + C,$$

och vi erhålla således, då vi insätta $t = \sqrt{x+1}$ och därefter bortskaffa rotuttrycken från nämnaren,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x+3-2\sqrt{2(x+1)}}{x-1} + C.$$

2⁰. Om $r(x)$ är *en lineär bruten funktion* af x, d. v. s. af formen $\frac{ax+b}{cx+d}$, når man likaledes målet genom substitutionen $\sqrt[n]{r(x)} = t$. Gäller det t. ex. att beräkna integralen

$$\int\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx,$$

sätta vi

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} = t,$$

hvarur följer

$$x = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Den gifna integralen antar genom denna substitution formen

$$-\int\frac{2t^2\,dt}{(t^2-1)^2} = \int t\,d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{t}{t^2-1} - \int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1} + C,$$

och vid återgång till variabeln x erhålles, efter en enkel reduktion,

$$\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}\, dx = \sqrt{x(x-1)} + \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right) + C.$$

3°. Vi gå till det fall då $n = 2$ och $r(x)$ utgör ett polynom af andra graden. Den betraktade integralen har då utseendet

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right) dx.$$

Genom en lineär substitution kunna vi bringa kvadratroten under en enklare form (jmf. s. 377). Om $a > 0$, skrifva vi

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}\left((ax+b)^2 + ac - b^2\right)$$

och sätta $ax + b = t$, hvarur erhålles $x = \frac{t-b}{a}$, $dx = \frac{dt}{a}$. Integralen öfvergår härvid i

$$\int \frac{1}{a} R\left(\frac{t-b}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t^2 + \alpha}\right) dt = \int \bar{R}\left(t, \sqrt{t^2 + \alpha}\right) dt,$$

där $\alpha = ac - b^2$ och $\bar{R}$ är en rationell funktion af t och $\sqrt{t^2 + \alpha}$.

Är åter $a < 0$, skrifva vi

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{-a}\left(b^2 - ac - (ax+b)^2\right).$$

Vi antaga $b^2 - ac > 0$, enär kvadratroten annars vore imaginär för alla reella värden x, och sätta $b^2 - ac = r^2$. Göra vi ånyo substitutionen $ax + b = t$, öfvergår den gifna integralen i

$$\int \frac{1}{a} R\left(\frac{t-b}{a}, \frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{r^2 - t^2}\right) dt = \int \bar{R}\left(t, \sqrt{r^2 - t^2}\right) dt,$$

där $\bar{R}$ är en rationell funktion af t och $\sqrt{r^2 - t^2}$.

4°. Vi antaga att den ofvan angifna förenklingen utförts, och betrakta först integralerna af formen

$$(19) \qquad \int R\left(x, \sqrt{x^2 + \alpha}\right) dx,$$

där α är en konstant. Det gäller att uttrycka x och $\sqrt{x^2+\alpha}$ såsom rationella funktioner af en hjälpvariabel.

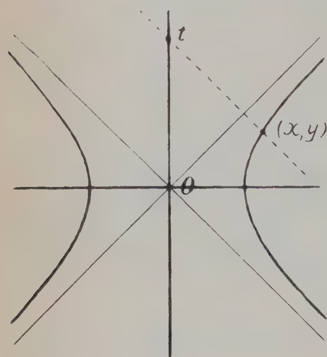
Vi gifva denna uppgift en geometrisk form, i det vi betrakta den kurva som representerar funktionen $\sqrt{x^2+\alpha}$, och hvars ekvation således är

$$y = \sqrt{x^2+\alpha}.$$

Denna ekvation kan bringas under formen

(20) $$y^2 - x^2 = \alpha,$$

och ifrågavarande kurva är alltså en liksidig hyperbel med origo såsom medelpunkt och hvars asymptoter utgöras af linierna $y = x$ och $y = -x$. Det gäller för oss *att uttrycka koordinaterna x, y för en punkt af hyperbeln såsom rationella funktioner af en parameter* (jmf. n^0 49).



Vi observera att hyperbeln skäres i endast en punkt af hvarje rät linie som är parallell med någon af dess asymptoter. Välja vi t. ex. asymptoten $y = -x$, kan den räta liniens ekvation skrifvas under formen

(21) $$y = -x + t,$$

hvarvid t betecknar ordinatan för liniens skärningspunkt med y-axeln. Man finner nu omedelbart att koordinaterna x, y för skärningspunkten mellan linien (21) och hyperbeln (20) hafva värdena

(22) $$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\alpha}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\alpha}{t}\right),$$

och således utgöra rationella funktioner af parametern t, hvarmed problemet är löst.

Då t växer från 0 till ∞, beskrifver punkten x, y, om $\alpha < 0$ och hyperbeln (20) således har det i figuren angifna

läget [1]), den högra hyperbelgrenen i riktning nedifrån uppåt; då t aftar från 0 till $-\infty$, beskrifver nämnda punkt hyperbelns venstra gren i riktning uppifrån nedåt. Mot hvarje punkt på den högra grenen svarar omvändt ett fullt bestämdt positivt värde t, mot hvarje punkt på den venstra grenen ett negativt värde t.

Vi utsäga det ofvan erhållna resultatet i analytisk form: Om vi införa en ny variabel, t, som är bunden vid x genom relationen

$$(21)' \qquad \sqrt{x^2+\alpha} = -x+t,$$

öfvergå både x och $\sqrt{x^2+\alpha}$ i rationella funktioner af t:

$$(22)' \qquad x = \frac{1}{2}\left(t-\frac{\alpha}{t}\right), \quad \sqrt{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\alpha}{t}\right).$$

Då uttrycket för x differentieras, erhålles

$$dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{t^2}\right)dt.$$

Integralen (19) undergår således vid substitutionen (22)′ följande transformation:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha})\,dx = \frac{1}{2}\int R\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{\alpha}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t+\frac{\alpha}{t}\right)\right)\left(1+\frac{\alpha}{t^2}\right)dt.$$

Integranden i högra membrum är en rationell funktion af t, och dess integral erhålles alltså medels sönderdelning i partialbråk. I resultatet hafva vi att för t insätta dess uttryck såsom funktion af x:

$$t = x + \sqrt{x^2+\alpha}.$$

Såsom exempel betrakta vi först den viktiga integralen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

---

[1]) Läsaren uppmanas att uppritа figuren och genomföra diskussionen äfven i de fall då $\alpha > 0$ eller den skärande linien väljes parallell med hyperbelns andra asymptot.

Enligt ofvanstående likheter är

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{2}{t+\frac{\alpha}{t}} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{t^2}\right) dt = \frac{dt}{t},$$

och vi erhålla således omedelbart

$$(23) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

$$= \log\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) + C.$$

Vi beräkna vidare integralen

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx.$$

Ofvanstående substitution ger oss

$$\sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{1}{4}\frac{(t^2+\alpha)^2}{t^3} dt = \left(\frac{t}{4} + \frac{\alpha}{2t} + \frac{\alpha^2}{4t^3}\right) dt,$$

hvaraf

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{t^2}{8} - \frac{\alpha^2}{8t^2} + \frac{\alpha}{2}\log t + C.$$

Då vi för t införa dess uttryck såsom funktion af x och observera att, enligt (22)',

$$\frac{t^2}{8} - \frac{\alpha^2}{8t^2} = \frac{1}{8}\left(t+\frac{\alpha}{t}\right)\left(t-\frac{\alpha}{t}\right) = \frac{x\sqrt{x^2+\alpha}}{2},$$

erhålles

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2+\alpha}}{2} + \frac{\alpha}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) + C,$$

hvilket resultat äfven enkelt härledes medels partiell integration sedan integralen (23) beräknats (jmf. s. 382).

5°. Vi gå till det senare af de ofvan behandlade fallen, då integralen kunde bringas under formen

$$(24) \qquad \int R\left(x, \sqrt{r^2-x^2}\right) dx.$$

Vi betrakta här åter kurvan

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

eller med andra ord cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$, och söka uttrycka koordinaterna för en punkt af densamma såsom rationella funktioner af en parameter. Vi ernå detta enklast om vi skära cirkeln medels en rät linie som går genom någon af de punkter i hvilka den råkar koordinataxlarna, och välja vinkelkoefficienten t för denna linie till parameter. Om af nämnda skärningspunkter väljes den hvars koordinater äro $x = -r$, $y = 0$, är den räta liniens ekvation

(25) $$y = t(x + r),$$

och för dess andra skärningspunkt med cirkeln erhållas koordinaterna

(26) $$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} r, \quad y = \frac{2rt}{1 + t^2}.$$

Då t växer från $-\infty$ till $+\infty$ beskrifver denna punkt cirkelns periferi ett hvarf i positiv riktning, utgående från punkten $x = -r$, $y = 0$.

Vi göra således i förevarande fall substitutionen

(25)′ $$\sqrt{r^2 - x^2} = t(x + r),$$

hvarur följer

(26)′ $$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} r, \quad \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{2rt}{1 + t^2}, \quad dx = -\frac{4rt}{(1 + t^2)^2} dt,$$

och erhålla då

$$\int R(x, \sqrt{r^2 - x^2})\, dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} r, \frac{2rt}{1 + t^2}\right) \left(-\frac{4rt}{(1 + t^2)^2}\right) dt,$$

där integranden i högra membrum är en rationell funktion.

Sedan denna integrerats, har man att i resultatet för variabeln t substituera dess uttryck såsom funktion af x:

$$t = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r + x} = \sqrt{\frac{r - x}{r + x}}.$$

Vi tillämpa detta förfarande på integralen

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Enligt ofvanstående likheter är

$$\frac{dx}{x\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{4rt}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{r(1-t^2)} \cdot \frac{1+t^2}{2rt}\, dt = \frac{2\,dt}{r(t^2-1)},$$

hvarur följer

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{r} \log \frac{1-t}{1+t} + \text{en konstant.}$$

Då för t substitueras dess uttryck i x, erhålles

$$\frac{1-t}{1+t} = \frac{\sqrt{r+x} - \sqrt{r-x}}{\sqrt{r+x} + \sqrt{r-x}} = \frac{(\sqrt{r+x} - \sqrt{r-x})^2}{2x} = \frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{x},$$

och resultatet kan således skrifvas under formen

$$(27) \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{r} \log \frac{C(r - \sqrt{r^2 - x^2})}{x},$$

där C är en konstant som bör väljas positiv om $x > 0$, negativ om $x < 0$, men för öfrigt är alldeles godtycklig (jmf. s. 360).

Formlerna (26) äro, på beteckningen när, identiska med dem vi s. 271 på annan väg härledde. Parametern t hade där betydelsen

$$t = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2},$$

hvarvid φ betecknade den betraktade punktens polära vinkel. Denna betydelse framgår jämväl ur ofvanstående figur, ty

den skärande räta linien bildar med x-axeln vinkeln $\frac{\varphi}{2}$ och dess vinkelkoefficient t är således $= \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$.

6°. Flere integraler af formen (24) erhållas enklast medels substitutionen

$$x = r\sin t,\quad \sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t,\quad dx = r\cos t\,dt.$$

Exempelvis finner man på detta sätt (jmf. s. 382)

$$\int\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2\int\cos^2 t\,dt = \frac{r^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + C.$$

Det bör vidare framhållas att man för integration af algebraiska funktioner i flere fall med fördel kan använda substitutionen

$$\frac{1}{x} = t,\ x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Exempelvis erhålles medels denna för integralen (27) uttrycket

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{r^2 - x^2}} = \int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{r^2}{x^2} - 1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{r^2t^2 - 1}} = -\frac{1}{r}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{r^2}}}.$$

Enligt (23) är

$$-\frac{1}{r}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{r^2}}} = \frac{1}{r}\log\frac{1}{t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{r^2}}} + \text{en konstant}$$

$$= \frac{1}{r}\log\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{r^2}}\right) + \text{en konstant},$$

och då vi här insätta $t = \frac{1}{x}$, erhålles efter en enkel förändring åter det tidigare resultatet.

Allmänt bör observeras att integralen

$$\int\frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}},$$

där α, a, b, c äro konstanter, genom substitutionen

$$x - \alpha = \frac{1}{t}$$

antar formen

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{a't^2 + 2b't + c'}},$$

och således på detta sätt lätt kan beräknas.

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna följande integraler:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}, \quad \int \frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}, \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}, \quad \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx;$$

$$\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}, \quad \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}.$$

2) Härled reduktionsformeln

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+\alpha} - \frac{(n-1)\alpha}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

och beräkna integralen i venstra membrum för $n = 2, 3, 4$.

3) Hvilken transformation undergår integralen (19), om hyperbeln (20) skäres medels en rät linie som går genom en af de punkter i hvilka hyperbeln råkar koordinataxlarna, och denna linies vinkelkoefficient införes såsom ny variabel?

4) Huru transformeras integralen (24), om cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ skäres med en rät linie som går genom en af dess skärningspunkter med y-axeln, och denna linies vinkelkoefficient väljes till ny variabel?

73. **Integration af trigonometriska funktioner.** — Då dessa funktioner spela en särskildt viktig roll i Analysen, vilja vi ännu göra några allmänna anmärkningar beträffande deras integration, hvarpå i det föregående redan anförts flere exempel.

1°. Hvarje integral

$$(28) \qquad \int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

hvars integrand är en rationell funktion af $\sin x$ och $\cos x$, återföres genom substitutionen

$$(29) \qquad \operatorname{tang} \frac{x}{2} = t$$

till en integral af en rationell funktion af t. Man erhåller nämligen (jmf. s. 271 och 399)

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

och vidare, genom differentiation af (29),

$$dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2}\, dt = \frac{2}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}}\, dt = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Alltså är

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

där integranden i högra membrum utgör en rationell funktion af t. Sedan integrationen verkställts, har man att i resultatet insätta $t = \operatorname{tang} \frac{x}{2}$.

Såsom exempel betrakta vi först integralen

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Enligt ofvanstående formler erhålles

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\, dt}{1+t^2} = \frac{dt}{t},$$

hvaraf omedelbart följer

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log t + C = \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$$

Vi beräkna vidare integralen

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$$

Den ofvan betraktade substitutionen ger oss

$$5 - 3\cos x = \frac{5(1+t^2) - 3(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{2(1+4t^2)}{1+t^2},$$

och således [1])

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos x} = \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} 2t + C$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang}\left(2 \operatorname{tang} \frac{x}{2}\right) + C.$$

2^0. För att integrera en produkt eller en kvot af tvenne hela potenser af $\sin x$ och $\cos x$, alltså en funktion af formen

$$\sin^m x . \cos^n x$$

där m och n äro hela tal, är det emellertid icke alltid praktiskt att använda ofvan anförda substitution, utan når man i flere fall målet snabbare medels särskilda reduktioner, hvilka grunda sig på kända relationer mellan de trigonometriska funktionerna.

I öfningsuppgiften (3) s. 383 hafva vi redan anfört reduktionsformler för beräkningen af integralerna

$$\int \sin^n x\, dx \quad \text{och} \quad \int \cos^n x\, dx,$$

---

[1]) Uttrycket $2 \operatorname{tang} \frac{x}{2}$ blir oändligt då x närmar sig en udda multipel af π. Om vi inom intervallen $(-\pi, \pi)$ välja t. ex. hufvudgrenen af arc tang, böra vi, för att erhålla en för alla argumentvärden kontinuerlig integralfunktion, inom intervallen $(\pi, 3\pi)$ använda grenen $\overline{\operatorname{arc\,tang}} + \pi$, inom intervallen $(3\pi, 5\pi)$ grenen $\overline{\operatorname{arc\,tang}} + 2\pi$, o. s. v., och likaså inom intervallen $(-\pi, -3\pi)$ grenen $\overline{\operatorname{arc\,tang}} - \pi$, inom intervallen $(-3\pi, -5\pi)$ grenen $\overline{\operatorname{arc\,tang}} - 2\pi$, o. s. v. (jmf. s. 96). Denna kontinuerliga integralfunktion representeras för öfrigt af uttrycket

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \overline{\operatorname{arc\,tang}} \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{x}{2}}{1 + 2 \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}} \right)$$

för alla värden x, hvilket läsaren uppmanas att kontrollera.

hvilka formler äro användbara såväl för positiva som för negativa heltalsvärden af exponenten n. Om n är ett positivt udda tal eller ett negativt jämnt tal, beräknas dessa integraler ännu enklare enligt likheterna

$$\int \sin^{2k+1} x\, dx = \int \sin^{2k} x \,.\, \sin x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^k d\cos x\,,$$

$$\int \cos^{2k+1} x\, dx = \int \cos^{2k} x \,.\, \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^k d\sin x\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = \int \frac{1}{\sin^{2k-2} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1+\cot^2 x)^{k-1} d\cot x\,,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int \frac{1}{\cos^{2k-2} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tang}^2 x)^{k-1} d\operatorname{tang} x\,.$$

Integralerna i högra membra erhållas omedelbart då potenserna under integraltecknet utvecklas till polynom.

Vi anmärka slutligen att integralen

$$\int \operatorname{tang}^k x\, dx\,,$$

där k är ett godtyckligt positivt helt tal, enkelt erhålles med hjälp af substitutionen $\operatorname{tang} x = t$. Ty ur denna följer

$$dx = \cos^2 x\, dt = \frac{dt}{1+\operatorname{tang}^2 x} = \frac{dt}{1+t^2}\,,$$

och således

$$\int \operatorname{tang}^k x\, dx = \int \frac{t^k}{1+t^2}\, dt\,.$$

Integralen i högra membrum erhålles omedelbart om man utvecklar integranden genom division.

Likaså erhåller man enklast uttrycket för integralen

$$\int \cot^k x\, dx\,,$$

där k är ett positivt helt tal, om man inför $\cot x$ såsom ny variabel.

Ofningsuppgifter:

1) Integrera följande funktioner:

$$\frac{1}{\sin 2x}, \quad \sin^3 x, \quad \cos^5 x, \quad \sin^2 x \cos^2 x, \quad \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{1}{\cos^4 x},$$

$$\operatorname{tang}^4 x, \quad \cot^3 x, \quad \frac{\cos x}{1+\cos x}, \quad \frac{1}{\sin^3 x}, \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}, \quad \frac{1}{a+b\cos x}.$$

2) Beräkna integralerna

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}, \quad \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx$$

medels substitutionen $x = a \operatorname{tang} t$.

3) Beräkna integralerna

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx, \quad \int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

medels substitutionen $x = a \sin t$.

74. **Integration af några differentialekvationer.** — Vi betrakta en ekvation mellan variabeln x, en obekant funktion y af x, samt denna funktions derivator ända till en viss ordning n:

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{30}$$

En dylik ekvation benämnes *en differentialekvation af* n^{te} *ordningen*. Med en *lösning* till (30) förstås en funktion $y(x)$ som, insatt i stället för y, gör ekvationens båda membra identiska, så att man följaktligen för hvarje värde x, eller åtminstone inom en viss intervall, har

$$F(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Vi hafva redan i n^0 57 behandlat en speciell differentialekvation, nämligen ekvationen för en partikels rätliniga rörelse i ett elastiskt medium. Vi skola här betrakta några andra enkla differentialekvationer, hvilkas lösningar omedelbart erhållas med stöd af integralkalkylens fundamentalsats.

1°. Såsom första exempel välja vi ekvationen

(31) $$\frac{d^2y}{dx^2} = x^3 - 1.$$

Om $y(x)$ är en godtycklig lösning, har man identiskt

$$y''(x) = x^3 - 1.$$

I denna likhet utgör venstra membrum derivata af funktionen $y'(x)$, högra membrum derivata af funktionen $\frac{x^4}{4} - x$. Enligt integralkalkylens fundamentalsats är alltså skillnaden mellan dessa funktioner konstant, om vi förutsätta att $y'(x)$ är kontinuerlig för alla argumentvärden, och vi erhålla således

$$y'(x) = \frac{x^4}{4} - x + C.$$

I denna likhet är åter venstra membrum derivata af $y(x)$, högra membrum derivata af $\frac{x^5}{20} - \frac{x^2}{2} + Cx$, och nyssnämnda sats ger oss följaktligen, om vi antaga jämväl $y(x)$ kontinuerlig för alla argumentvärden,

(32) $$y(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^2}{2} + Cx + C',$$

där C' är en ny konstant.

Hvarje lösning till (31), som jämte sin derivata är kontinuerlig för alla argumentvärden, har således formen (32), där C och C' äro vissa konstanter; och omvändt satisfierar funktionen (32) ekvationen (31) för alla värden af C och C', såsom man omedelbart finner vid derivering.

Den *allmänna* lösningen till (31) utgöres således af funktionen (32), där C och C' äro *arbiträra* konstanter. För hvarje speciellt system af värden C, C' ger oss (32) en *partikulär* lösning till den gifna differentialekvationen.

Man finner genom ett analogt resonemang att den allmänna lösningen till hvarje differentialekvation af formen

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$$

erhålles genom n successiva integrationer och innehåller n arbiträra konstanter.

2°. Vi behandla vidare ekvationen

(33) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y+1}}{x^2}.$$

Vi se här omedelbart att $y = -1$ utgör en lösning, ty om y har detta konstanta värde, äro båda membra i (33) identiskt 0. Är $y = y(x)$ en godtycklig annan lösning, har man för denna identiskt

(33)′ $$\frac{1}{\sqrt{y+1}} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Här är venstra membrum derivata af funktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{y+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y+1}} = 2\sqrt{y+1} + \text{en konstant},$$

högra membrum derivata af funktionen

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \text{en konstant},$$

och integralkalkylens fundamentalsats ger oss således, inom hvarje intervall där den betraktade lösningen y är kontinuerlig,

(34) $$\sqrt{y+1} = C - \frac{1}{2x},$$

där C är en konstant. Härur erhålles för lösningen y uttrycket

(35) $$y = C^2 - 1 - \frac{C}{x} + \frac{1}{4x^2}.$$

Omvändt satisfierar denna funktion ekvationen (33), konstanten C må hafva hvilket värde som helst. Ty densamma satisfierar likheten (34), och ur denna erhålles vid derivering likheten (33)′, hvilken är identisk med (33). Läsaren uppmanas att jämväl direkt insätta funktionen (35) i

ekvationen (33) och kontrollera att dennas båda membra här-vid blifva identiska.

Funktionen (35), där C är en arbiträr konstant, utgör sålunda den allmänna lösningen till ekvationen (33). Hvarje lösning till denna ekvation framgår ur (35) för ett speciellt värde af C, med undantag af den först funna lösningen $y = -1$, hvilken på denna grund säges utgöra en *singulär* lösning. Vi uppmana läsaren att upprita kurvan (35) för olika värden af konstanten C.

På analogt sätt kan man lösa hvarje differentialekvation af formen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(y)}{X(x)}, \tag{36}$$

där X beror endast af variabeln x och Y endast af y. Om man skrifver ekvationen under formen

$$\frac{dy}{Y(y)} = \frac{dx}{X(x)},$$

så att variablerna x och y äro *separerade*, finner man genom ett resonemang som är analogt med det ofvanstående, och hvilket läsaren i detalj bör genomföra, att den allmänna lösningen till (36) erhålles ur likheten

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int \frac{dx}{X(x)},$$

i hvilken ingår en arbiträr integrationskonstant. Dessutom är ekvationen (36) satisfierad för de konstanta värden af y hvilka göra $Y(y) = 0$. Dessa framgå icke ur den allmänna lösningen genom specialisering af integrationskonstanten, och representera således singulära lösningar.

3°. Vi behandla slutligen differentialekvationen

$$x\frac{dy}{dx} = x + y. \tag{37}$$

Denna kan skrifvas under formen

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Om vi välja förhållandet $\frac{y}{x} = t$ till ny obekant funktion i stället för y och således sätta $y = xt$, erhålles $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$, och differentialekvationen antar alltså formen $t + x\frac{dt}{dx} = 1 + t$, eller $x\frac{dt}{dx} = 1$, eller slutligen

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Om t satisfierar denna ekvation, utgör omvändt funktionen $y = xt$ en lösning till ekvationen (37).

Nu ger oss ofvanstående ekvation omedelbart $t = \log Cx$, där C är en konstant, hvilken bör erhålla samma tecken som x men för öfrigt är arbiträr. Vi erhålla således såsom allmän lösning till (37)

$$y = x \log Cx.$$

Denna likhet representerar en kurvskara, hvilken läsaren uppmanas att undersöka och upprita.

På analogt sätt löses hvarje annan s. k. *homogen* differentialekvation, som kan bringas under formen

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{38}$$

där högra membrum beror endast af förhållandet $\frac{y}{x}$. Ty genom substitutionen $\frac{y}{x} = t$ öfvergår densamma i

$$x\frac{dt}{dx} = f(t) - t, \tag{38$'$}$$

och vi kunna här separera variablerna:

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Den allmänna lösningen t till (38)$'$ framgår således ur likheten

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} = \log Cx,$$

och den allmänna lösningen y till differentialekvationen (38) erhålles härefter ur likheten $y = xt$.

Öfningsuppgifter:

1) Bestäm den partikulära lösning $y(x)$ till ekvationen (31) som uppfyller villkoren

$$y(2) = 3, \quad y'(2) = -1,$$

samt den partikulära lösning till ekvationen (33) som antar värdet $-\frac{3}{4}$ för $x = \frac{1}{2}$.

2) Lös följande differentialekvationer (resonemanget bör utföras fullständigt och resultatet kontrolleras genom insättning):

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x + \frac{1}{x}, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = ay, \quad \frac{dy}{dx} = 4x^2y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\cos y}, \quad x^2\frac{dy}{dx} = xy + y^2, \quad x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

3) Hvilka kurvor skära alla från origo utgående strålar under en konstant vinkel Θ (för uppgiftens lösning användes polära koordinater)?

4) Bestäm funktionen $f(x)$ så att afståndet från origo till en godtycklig punkt af kurvan $y = f(x)$ är lika med det stycke af kurvans normal i samma punkt som faller mellan kurvan och x-axeln.

5) Sök alla de kurvor hvilkas tangent, räknad från tangeringspunkten till x-axeln, har en konstant längd a.

6) Lös allmänt följande differentialekvationer (jmf. s. 309—311):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0,$$

och bestäm härefter de partikulära lösningar, hvilka representeras af kurvor som gå genom origo och i denna punkt tangera linien $y = x$.

75. **Begreppet bestämd integral.** — Vi upptaga ånyo betraktelserna i n⁰ 67, och genomföra den där verkställda undersökningen i en allmännare och rent analytisk form.

Vi antaga att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för hvarje argumentvärde som tillhör intervallen (a, b), men göra denna gång ingen förutsättning beträffande funktionens tecken.

Mellan a och b inskjuta vi en följd af värden, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, hvarvid (a, b) sönderfaller i n delintervaller

(39) $$(a, x_1), \ (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b),$$

samt välja n godtyckliga tal,

$$\xi_1, \ \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

som tillhöra hvar sin af dessa delintervaller. De motsvarande värdena af funktionen $f(x)$,

$$f(\xi_1), \ f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n),$$

multiplicera vi i ordning med differenserna

(40) $$x_1 - a, \ x_2 - x_1, \ldots, b - x_{n-1},$$

och addera produkterna. Vi erhålla sålunda summan

(41) $$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}),$$

och om denna skola vi bevisa följande viktiga sats:

Om intervallen (a, b) delas i allt flere delar och för hvarje ny indelning bildas en summa af formen (41), konvergera dessa summor mot ett ändligt gränsvärde, hvilket är alldeles oberoende af den lag enligt hvilken de successiva delningarna verkställas och talen ξ väljas, blott denna lag är sådan att delintervallernas längder slutligen alla blifva mindre än hvilken uppgifven kvantitet som helst.

Ifrågavarande gränsvärde benämnes *den bestämda integralen af funktionen $f(x)$, tagen mellan gränserna a och b.*

Det må först anmärkas att, i händelse funktionen $f(x)$ inom intervallen (a, b) har ett konstant värde C, summan (41) alltid är lika med $C(b - a)$, huru än indelningen verkställes och talen ξ väljas, hvaraf följer att dess gränsvärde äfven är lika med $C(b - a)$. I detta speciella fall är satsen alltså riktig.

Om $f(x)$ icke är konstant inom (a, b), beteckna vi med

$$M_1, \ M_2, \ldots, M_n$$

de största och med

$$m_1, \ m_2, \ldots, m_n$$

de minsta värdena af denna funktion inom delintervallerna (39), och bilda medels dessa värden summorna

(42) $S(M) = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1})$

och

(43) $S(m) = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1})$,

hvilka kort må benämnas de mot den betraktade indelningen svarande *maximi-* och *minimi*-summorna.

För hvarje index ν är $m_\nu \leq f(\xi_\nu) \leq M_\nu$. Då differenserna (40) alla hafva samma tecken — nämligen positivt tecken om $b > a$, negativt tecken om $b < a$ — följer häraf att, *huru talen* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *än väljas inom sina resp. intervaller, ligger värdet af summan (41) alltid mellan* $S(M)$ *och* $S(m)$, *eller sammanfaller med någon af dessa summor.*

Vi hafva således att undersöka huru summorna (42) och (43) förhålla sig då intervallen (a, b) delas i allt mindre delar. Vid denna undersökning antaga vi $b > a$, i hvilket fall differenserna (40) äro positiva. Vore $b < a$, skulle alla olikheter i det följande beviset ändra riktning, men resultatet skulle blifva detsamma.

Vi betrakta alla möjliga olika indelningar af intervallen (a, b) i ett ändligt antal delar. Mot hvarje sådan indelning svarar en maximi- och en minimisumma, och vi erhålla sålunda tvenne oändliga talmängder, hvilka må betecknas

(44) $$(S(M)) \text{ och } (S(m)).$$

Vi skola visa att satsen s. 87 är tillämplig på dessa mängder, och hafva i sådant afseende att ådagalägga att de besitta följande tre egenskaper:

1°. *Hvarje tal* $S(M)$ *är större än hvarje tal* $S(m)$.

Man inser omedelbart att, för samma indelning af intervallen (a, b), summan (42) är större än summan (43). Ty för hvarje index ν är $M_\nu \geq m_\nu$, och då $f(x)$ enligt antagandet icke är konstant inom (a, b), är säkert $M_\nu > m_\nu$ för något värde ν.

Vi betrakta nu tvenne indelningar af den gifna intervallen, D och D', af hvilka D' innehåller alla de delningspunkter som ingå i D, och därtill ännu andra. Vi skola visa att

(45) $$S_D(M) \geq S_{D'}(M), \quad S_D(m) \leq S_{D'}(m),$$

då med $S_D(M)$ och $S_D(m)$ betecknas de mot indelningen D, med $S_{D'}(M)$ och $S_{D'}(m)$ de mot indelningen D' svarande maximi- och minimisummorna.

Vid indelningen D må (a, b) sönderfalla i delintervallerna (39). Då delningen D' verkställes, blifva dessa delintervaller, eller åtminstone vissa af dem, styckade i mindre delar. Vi antaga t. ex. att (a, x_1) sönderfaller i två delar, (a, ξ) och (ξ, x_1), samt beteckna med M_1', M_1'' de största och med m_1', m_1'' de minsta värdena af funktionen $f(x)$ inom dessa delintervaller.

Den första termen, $M_1(x_1 - a)$, i summan $S_D(M)$ blir då i $S_{D'}(M)$ ersatt med termerna $M_1'(\xi - a) + M_1''(x_1 - \xi)$. Talet M_1, som utgör det största värdet af $f(x)$ inom (a, x_1), är lika med det större af talen M_1' och M_1''. Alltså är

$$M_1'(\xi - a) + M_1''(x_1 - \xi) \leqq M_1(\xi - a) + M_1(x_1 - \xi) = M_1(x_1 - a),$$

och då detta resonemang tillämpas jämväl på de öfriga termerna i summan $S_D(M)$, erhålles till resultat den första af olikheterna (45).

Mot den första termen, $m_1(x_1 - a)$, i summan $S_D(m)$ svara likaså i $S_{D'}(m)$ termerna $m_1'(\xi - a) + m_1''(x_1 - \xi)$, och då m_1, som betecknar det minsta värdet af $f(x)$ inom (a, x_1), är lika med det mindre af talen m_1' och m_1'', erhålles

$$m_1'(\xi - a) + m_1''(x_1 - \xi) \geqq m_1(\xi - a) + m_1(x_1 - \xi) = m_1(x_1 - a),$$

hvarur man sluter till riktigheten af den senare olikheten (45).

Låtom oss nu betrakta två alldeles godtyckliga indelningar, D_1 och D_2, af den gifna intervallen (a, b). Vi vilja bevisa att $S_{D_1}(M) > S_{D_2}(m)$.

För detta ändamål bilda vi den indelning, D', som omfattar såväl de till D_1 som de till D_2 hörande delningspunkterna. Emedan D' erhålles ur D_1 genom tillfogande af vissa nya delningspunkter, är enligt den första af olikheterna (45)

$$S_{D_1}(M) \geqq S_{D'}(M).$$

Vidare är för indelningen D', enligt hvad ofvan visats,

$$S_{D'}(M) > S_{D'}(m).$$

Då D' jämväl framgår ur D_2 genom införande af vissa nya delningspunkter, erhålles slutligen enligt den senare af olikheterna (45)

$$S_{D'}(m) \geqq S_{D_2}(m).$$

Ur dessa resultat följer den sökta olikheten, $S_{D_1}(M) > S_{D_2}(m)$, och härmed är bevisadt att talmängderna (44) besitta egenskapen 1°.

2°. *I mängden* $(S(M))$ *finnes intet minsta tal och i mängden* $(S(m))$ *intet största tal.*

Vi betrakta ett godtyckligt tal $S_D(M)$ i mängden $(S(M))$. Bland de delintervaller i hvilka (a, b) sönderfaller vid indelningen D, finnes åtminstone en inom hvilken funktionen $f(x)$ icke är konstant. Är $(x_\nu, x_{\nu+1})$ en dylik intervall, kunna vi dela den på sådant sätt att det största värdet af funktionen $f(x)$ inom åtminstone en af delarna är mindre än dess största värde inom hela intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$. Den mot en sådan indelning af (a, b) svarande maximisumman är säkert mindre än $S_D(M)$, såsom ur resonemanget på föregående sida omedelbart framgår.

På analogt sätt inses att man genom att inskjuta nya delningspunkter alltid kan bilda en minimisumma som är större än en gifven dylik summa.

3°. *Man kan välja ett tal ur mängden* $(S(M))$ *och ett tal ur mängden* $(S(m))$ *så att deras skillnad är mindre än ett föreskrifvet positivt tal* ε.

Vi bilda skillnaden mellan de summor (42) och (43) som svara mot en och samma indelning D:

$$(46) \qquad S_D(M) - S_D(m) = (M_1 - m_1)(x_1 - a) + \cdots \cdot \cdot + (M_n - m_n)(b - x_{n-1}).$$

Om med O_D betecknas den största af differenserna $M_1 - m_1$,

$\ldots, M_n - m_n$, eller m. a. o. den största oscillationen af funktionen $f(x)$ inom de delintervaller i hvilka (a, b) sönderfaller vid indelningen D, erhålles ur (46) olikheten

$$(47) \qquad S_D(M) - S_D(m) \leq O_D(b-a).$$

Då nu funktionen $f(x)$ antagits kontinuerlig för $a < x \leq b$, kan man finna ett sådant positivt tal, δ, att oscillationen af $f(x)$ är mindre än $\frac{\varepsilon}{b-a}$ inom hvarje del af (a, b) hvars längd är mindre än δ (jmf. s. 39). Om vi välja indelningen D så att längden af hvarje delintervall är mindre än δ, är följaktligen enhvar af differenserna $M_\nu - m_\nu$, och således äfven O_D mindre än $\frac{\varepsilon}{b-a}$, och vi erhålla $S_D(M) - S_D(m) < \varepsilon$, hvarmed egenskapen 3° är bevisad.

Satsen s. 87 kan således tillämpas på talmängderna (44), och lär oss att *det finnes ett och endast ett tal, I, som åtskiljer dessa talmängder, så att*

$$(48) \qquad \textit{hvarje tal } S(m) < I < \textit{hvarje tal } S(M).$$

Vi skola visa att *detta tal I utgör gränsvärde för summan (41).*

Om vi för en godtycklig indelning D af intervallen (a, b) bilda maximisumman $S_D(M)$, minimisumman $S_D(m)$ samt en summa af formen (41), för hvilken vi använda beteckningen $\Sigma_D f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$, hafva vi å ena sidan olikheterna (jmf. s. 413)

$$S_D(m) \leq \Sigma_D f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leq S_D(M),$$

och å andra sidan olikheterna

$$S_D(m) < I < S_D(M),$$

hvaraf vi sluta

$$|\Sigma_D f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - I| < S_D(M) - S_D(m),$$

och således, enligt (47),

$$(49) \qquad |\Sigma_D f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - I| < O_D(b-a).$$

Välja vi indelningen D så att längden af hvarje delintervall är mindre än det ofvan bestämda talet δ, är följaktligen

$$\left| \Sigma_D f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - I \right| < \varepsilon ,$$

och detta resultat består huru litet ε än väljes, blott δ för hvarje gång bestämmes så att det på föregående sida angifna villkoret är uppfylldt.

Men detta innebär att, då intervallen (a, b) delas i allt flere delar, enligt någon sådan lag att samtliga delars längder aftaga mot 0, summan (41) alltid närmar sig ett och samma gränsvärde, nämligen det genom olikheterna (48) entydigt definierade talet I. Den s. 412 formulerade satsen är härmed fullständigt bevisad.

Ifrågavarande gränsvärde I benämnes, såsom redan sades, *den bestämda integralen af funktionen* $f(x)$, *tagen mellan gränserna* a *och* b, och betecknas

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{50}$$

Denna beteckning har följande ursprung. Om intervallerna (39) väljas lika stora och för $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ väljas dessa intervallers begynnelsevärden, erhåller summan (41) utseendet

$$f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x ,$$

där $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, och kan, med användande af ett summatecken S, kortare skrifvas

$$S f(x)\,\Delta x .$$

Då n obegränsadt växer, närmar sig Δx noll. Enligt det betraktelsesätt för hvilket vi redogjort s. 280, uppfattades Δx vid gränsen såsom *en oändligt liten kvantitet* och betecknades med dx, och gränsvärdet för summan uppfattades i enlighet härmed såsom en summa af *ett oändligt antal oändligt små termer* eller *element*. Summatecknet antog formen af ett integraltecken, och sålunda erhölls beteckningen $\int f(x)\, dx$. Först långt senare begynte man angifva integrationsintervallen genom att utsätta variabelns begynnelsevärde såsom *undre gräns* och dess slutvärde såsom *öfre gräns* invid integraltecknet.

Öfningsuppgift. — Beräkna värdet af integralen $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ med ett fel $< \frac{1}{10}$, och angif huru man kunde erhålla dess värde med ett fel $< \frac{1}{1000}$.

76. **Några egenskaper hos den bestämda integralen.** — Ur den bestämda integralens definition härledas enkelt följande egenskaper hos densamma, hvilka oupphörligt komma till användning.

1°. *Om faktorn A har ett konstant värde, är*

$$\int_a^b A f(x)\,dx = A \int_a^b f(x)\,dx.$$

Integralen i venstra membrum utgör gränsvärde för en summa af formen $\Sigma A f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$, som är utsträckt öfver de delar i hvilka integrationsintervallen (a, b) delats. Men denna summa kan skrifvas $A \Sigma f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$, och enligt sats (6) s. 200 är dess gränsvärde således äfven lika med produkten af A och gränsvärdet för summan $\Sigma f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$, d. v. s. lika med $A \int_a^b f(x)\,dx$.

2°. $$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Venstra membrum i denna likhet utgör nämligen gränsvärde för summan

$$\Sigma \big(f_1(\xi_\nu) + f_2(\xi_\nu)\big)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Men denna kan sönderdelas som följer:

$$\Sigma f_1(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) + \Sigma f_2(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

och enligt sats (7) s. 200 är dess gränsvärde således lika med högra membrum i ofvanstående likhet.

3°. *Om integralens gränser byta plats, ändras dess tecken:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Integralen i venstra membrum utgör gränsvärde för summan $\Sigma f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$, i hvilken differenserna $x_\nu - x_{\nu-1}$ beteckna tillväxterna af variabeln x inom de skilda delarna af intervallen (a, b), då denna genomlöpes i riktning från a till b. Integralen $\int_b^a f(x)\,dx$ åter utgör gränsvärde för summan $\Sigma f(\xi_\nu)(x_{\nu-1} - x_\nu)$, ty variabeln x tänkes nu genomlöpa integrationsintervallen i riktning från b till a. Då de två summorna hafva motsatta tecken, gäller detsamma äfven om deras gränsvärden, och vi erhålla således ofvanstående likhet.

4°. *Om a, b, c äro tre godtyckliga argumentvärden inom en intervall hvarest funktionen $f(x)$ är kontinuerlig, har man*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Vi antaga först att c ligger mellan a och b. Vi verkställa en indelning af intervallen (a, b) i hvilken c utgör en delningspunkt, och bilda för denna indelning en summa Σ af formen (41) s. 412. Denna summa sönderdela vi i tvenne delar,

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

af hvilka Σ_1 omfattar de termer i Σ som hänföra sig till intervallen (a, c), Σ_2 de termer som hänföra sig till intervallen (c, b). Då indelningen drifves allt längre, enligt en sådan lag att samtliga delar närma sig 0, konvergera summorna $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ i ordning mot integralerna $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$, och vi erhålla således ofvanstående likhet.

Om b ligger mellan a och c, är, enligt hvad just visats,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx,$$

och genom omflyttning af termerna erhålles åter den sökta likheten.

På analogt sätt visas att denna likhet gäller om a ligger mellan b och c.

5°. *Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b), har man*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a),$$

där ξ betecknar ett värde mellan a och b.

Om $f(x)$ inom (a, b) har ett konstant värde C, är integralens värde lika med $C(b-a)$ (jmf. s. 412) och satsen alltså riktig.

Är $f(x)$ icke konstant, ligger enligt integralens definition dess värde mellan gränserna $m(b-a)$ och $M(b-a)$, då med m betecknas det minsta och med M det största värdet af $f(x)$ inom (a, b). Kvoten

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

ligger således till sitt värde mellan m och M, och det finnes följaktligen inom integrationsintervallen åtminstone en punkt ξ i hvilken värdet af $f(x)$ öfverensstämmer med denna kvot (jmf. s. 38), hvarur den sökta likheten följer.

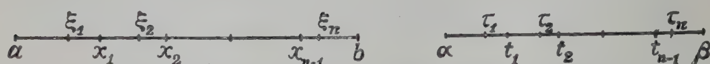
Vi skola slutligen redogöra för huru en bestämd integral

(51) $$\int_a^b f(x)\,dx$$

transformeras då man utför en substitution

(52) $$x = x(t).$$

Vi antaga att denna substitution definierar en entydig motsvarighet mellan de värden x som tillhöra intervallen (a, b) och värdena t inom en viss intervall (α, β), sålunda att, då t genomlöper sistnämnda intervall från α till β, värdet af funk-



tionen $x(t)$ varierar kontinuerligt och ständigt i samma riktning från a till b. Vidare förutsätta vi att derivatan $x'(t)$ existerar och är kontinuerlig i hvarje punkt af (α, β).

Genom substitutionen (52) öfvergår $f(x)$ i en funktion af t,

$$f\bigl(x(t)\bigr) = \bar{f}(t),$$

hvilken är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (α, β).

Vi inskjuta mellan α och β en följd af värden, $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, och beteckna de motsvarande värdena af x med $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, så att följaktligen

$$a = x(\alpha),\; x_1 = x(t_1), \ldots, x_{n-1} = x(t_{n-1}),\; b = x(\beta).$$

Enligt medelvärdssatsen (s. 291) kunna vi skrifva differenserna

$$x_1 - a,\; x_2 - x_1, \ldots\ldots, b - x_{n-1}$$

under formen

$$x'(\tau_1)(t_1 - \alpha),\;\; x'(\tau_2)(t_2 - t_1), \ldots, x'(\tau_n)(\beta - t_{n-1}),$$

där värdena $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ligga inom hvar sin af intervallerna $(\alpha, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, \beta)$. Vi beteckna de motsvarande värdena af variabeln x med

$$\xi_1 = x(\tau_1),\;\; \xi_2 = x(\tau_2), \ldots, \xi_n = x(\tau_n),.$$

och bilda summan

$$(53)\quad f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}).$$

Enligt hvad ofvan sagts kan denna äfven skrifvas

$$(53)'\quad f\bigl(x(\tau_1)\bigr)x'(\tau_1)(t_1 - \alpha) + f\bigl(x(\tau_2)\bigr)x'(\tau_2)(t_2 - t_1) + \cdots$$
$$+ f\bigl(x(\tau_n)\bigr)x'(\tau_n)(\beta - t_{n-1}).$$

Om vi nu dela intervallen (α, β) i allt flere delar, enligt en sådan lag att samtliga delar närma sig 0, kommer på grund af motsvarigheten (52) jämväl intervallen (a, b) att blifva delad i allt flere delar, hvilka likaledes närma sig 0. Enligt den bestämda integralens definition, konvergerar härvid summan (53) mot integralen (51), och summan $(53)'$ mot integralen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))\, x'(t)\, dt.$$

Då nämnda summor alltid hafva samma värde för tvenne motsvarande indelningar, äro äfven deras gränsvärden lika, och vi erhålla således följande resultat (jmf. satsen s. 374):

6⁰. *Genom substitutionen $x = x(t)$ erhålles, om $x(t)$ uppfyller de s. 420 angifna villkoren, transformationsformeln*

$$(54) \quad \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))\, x'(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))\, dx(t),$$

i hvilken α och β beteckna de värden af t som enligt nämnda substitution motsvara den gifna integralens gränser a och b.

Vi skola angifva några enkla tillämpningar af denna viktiga regel. Vi betrakta först integralen

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx$$

och göra i denna substitutionen $x = a + ht$, hvaraf $dx = h\,dt$. Då x genomlöper intervallen från a till $a + h$, växer $t = \frac{x-a}{h}$ kontinuerligt från 0 till 1, och enligt (54) erhålla vi således

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx = h \int_0^1 f(a+ht)\, dt.$$

En annan ofta förekommande användning af de ofvan bevisade satserna är följande. Enligt sats 4⁰ s. 419 är

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx.$$

I den första termen i högra membrum göra vi substitutionen $x = -t$, hvaraf $dx = -dt$, och erhålla då enligt 6⁰ och 3⁰

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_a^0 f(-t)\, dt = \int_0^a f(-t)\, dt,$$

eller ännu, då det ju är likgiltigt med hvilken bokstaf integrationsvariabeln betecknas,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx\,.$$

Vi få således, med användande af satsen 2⁰ s. 418,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} \big(f(x)+f(-x)\big)\,dx.$$

Är speciellt $f(x)$ en s. k. *jämn* funktion, d. v. s. är $f(-x) = f(x)$ för hvarje x, erhålles $f(x)+f(-x) = 2\,f(x)$ och således

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Om däremot $f(x)$ är en *udda* funktion, d. v. s. $f(-x) = -f(x)$ för hvarje x, är $f(x)+f(-x) = 0$, hvaraf följer

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0\,.$$

Öfningsuppgifter:

1) Transformera integralen $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\log x}$ medels substitutionen $x = e^{t}$.

2) Visa att integralerna

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\,,\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \quad \text{och} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$$

kunna öfverföras i hvarandra genom lämpliga substitutioner.

3) Bevisa att, om funktionen $f(x)$ har *perioden* 2π, d. v. s. om $f(x+2\pi) = f(x)$ för hvarje värde x, likheten

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx$$

äger rum för hvarje värde a.

4) Vi antaga att funktionerna $f(x)$ och $\varphi(x)$ äro kontinuerliga för $a \leq x \leq b$, samt att $\varphi(x)$ bibehåller samma tecken mellan a och b. Bevisa att

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx\,,$$

där ξ är ett värde mellan a och b.

77. **Sammanhanget mellan begreppen bestämd integral och integralfunktion.** — Vi antaga att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b), och betrakta den bestämda integralen af denna funktion, tagen från värdet a till ett annat värde x inom nämnda intervall[1]):

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Denna integral utgör en funktion af x som är entydigt definierad inom intervallen (a, b), ty för hvarje värde x som tillhör denna intervall har integralen ett fullt bestämdt ändligt värde. Vi skrifva, i analogi med den s. 365 använda beteckningen,

$$\int_a^x f(t)\,dt = I(a, x).$$

Gifva vi variabeln ett nytt värde, $x + \Delta x$, som likaledes tillhör intervallen (a, b), antar den betraktade funktionen värdet

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = I(a, x + \Delta x).$$

Dess tillväxt är således

$$\Delta I = I(a, x + \Delta x) - I(a, x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Men enligt sats 4^0 s. 419 är

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

och vi erhålla således, då vi ännu göra bruk af sats 5^0 s. 420,

$$\text{(55)} \qquad \Delta I = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\,\Delta x,$$

där ξ är ett värde mellan x och $x + \Delta x$.

---

[1]) Denna integral kan äfven betecknas, och betecknas vanligen, $\int_a^x f(x)\,dx$. Till förebyggande af hvarje missförstånd hafva vi här föredragit att utmärka integrationsvariabeln med en annan bokstaf än den öfre gränsen.

Om vi låta Δx närma sig 0, närmar sig $x + \Delta x$ och således äfven ξ värdet x. Enär integranden antagits kontinuerlig i hvarje punkt af (a, b), närmar sig härvid $f(\xi)$ gränsvärdet $f(x)$. Ur (55) kunna vi alltså sluta 1° att ΔI försvinner samtidigt med Δx och funktionen $I(a, x)$ således är kontinuerlig i hvarje punkt x af intervallen (a, b), samt 2° att förhållandet $\frac{\Delta I}{\Delta x}$ närmar sig gränsvärdet $f(x)$ då Δx försvinner, eller annorlunda uttryckt, att funktionen $I(a, x)$ i hvarje punkt af nämnda intervall har en derivata, hvilken till sitt värde öfverensstämmer med den gifna funktionen $f(x)$. Vi tillägga att $I(a, x)$ försvinner då x närmar sig värdet a, hvilket enklast framgår ur satsen 5° s. 420.

Det erhållna resultatet kan utsägas som följer:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b), utgör den bestämda integralen

(56)
$$\int_a^x f(t)\,dt,$$

betraktad såsom funktion af sin öfre gräns x, en integralfunktion till $f(x)$, hvilken är kontinuerlig i hvarje punkt af nämnda intervall och försvinner för $x = a$.

Låtom oss antaga att det lyckats oss att finna en elementär funktion, $F(x)$, som är kontinuerlig och hvars derivata är lika med $f(x)$ i hvarje punkt af intervallen (a, b). Enligt integralkalkylens fundamentalsats är då skillnaden

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x)$$

inom nämnda intervall konstant och alltså lika med det värde den antar för $x = a$, d. v. s. lika med $-F(a)$, hvaraf följer

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Speciellt erhålles för $x = b$, om vi åter utmärka integrationsvariabeln med x och använda beteckningen (7) s. 366,

$$(57)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big|_a^b F(x),$$

hvilken likhet äfven kan skrifvas[1])

$$(57)'\qquad \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b d\,F(x) = \Big|_a^b F(x).$$

Vi hafva härmed bevisat följande sats:

Om $F(x)$ *utgör en integralfunktion till* $f(x)$ *som är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen* (a, b), *ändpunkterna medräknade, är värdet af den bestämda integralen*

$$(58)\qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

lika med skillnaden mellan de värden integralfunktionen $F(x)$ *antar för den öfre gränsen* b *och för den undre gränsen* a.

Då denna sats är af grundläggande betydelse, gifva vi ännu ett annat bevis för densamma, hvilket stöder sig på medelvärdssatsen (s. 291).

Vi utföra en delning D af intervallen (a, b), hvarvid densamma må sönderfalla i delarna (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots,$ (x_{n-1}, b), och sönderdela differensen $F(b) - F(a)$ på motsvarande sätt:

$$F(b) - F(a) = \big(F(x_1) - F(a)\big) + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \cdots + \big(F(b) - F(x_{n-1})\big).$$

[1]) Då enligt antagandet $F'(x) = f(x)$, kan den betraktade integralens *element*, $f(x)\,dx$, skrifvas under formen $F'(x)\,dx = d\,F(x)$.

Enligt det betraktelsesätt för hvilket redogjorts s. 280—285, uppfattas nämnda element såsom den tillväxt hvilken integralfunktionen $F(x)$ erhåller då variabeln, utgående från värdet x, erhåller en *oändligt liten* tillväxt dx. Integralen (58) uppfattas åter (jmf. s. 417) såsom summan af dess element, hvilka motsvara de oändligt många delintervaller, enhvar lika med dx, i hvilka intervallen från a till b tänkes delad. Integralens värde är i enlighet härmed lika med den totala tillväxten af integralfunktionen från $x = a$ till $x = b$.

Af efterföljande bevis framgår huru detta resonemang bör modifieras för att blifva strängt.

På enhvar af termerna i högra membrum tillämpa vi medelvärdssatsen och erhålla härvid, då enligt antagandet $F'(x) = f(x)$,

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) \quad &= f(\xi_1)(x_1 - a), \\ F(x_2) - F(x_1) \quad &= f(\xi_2)(x_2 - x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(\xi_n)(b - x_{n-1}), \end{aligned}$$

där ξ_1 är ett visst värde mellan a och x_1, ξ_2 ett värde mellan x_1 och x_2, o. s. v. Ofvanstående likhet kan således skrifvas

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots\cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}).$$

Nu har s. 416 visats att summan i högra membrum skiljer sig från värdet af integralen (58) med en kvantitet som är numeriskt mindre än $O_D|b - a|$, då med O_D betecknas den största oscillationen af funktionen $f(x)$ inom intervallerna $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$. Således är äfven

$$(59) \qquad \left| \int_a^b f(x)\,dx - \big(F(b) - F(a)\big) \right| < O_D\,|b - a|.$$

I denna olikhet, hvilken består för hvarje indelning D af intervallen (a, b), har venstra membrum ett fullt bestämdt värde, som på intet sätt beror af huru nämnda indelning verkställts; högra membrum kan däremot, då funktionen $f(x)$ enligt antagandet är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b), göras så litet man vill om (a, b) delas i tillräckligt små delar. Häraf följer med nödvändighet att värdet af venstra membrum är lika med 0, ty man kunde annars välja en sådan indelning D att olikheten (59) icke vore uppfylld, och vi hafva härmed ånyo ådagalagt riktigheten af likheten (57).

Denna likhet ger oss omedelbart värdet af den bestämda integralen i alla de fall då vi direkt kunna angifva en inte-

gralfunktion som är kontinuerlig i hvarje punkt af integrationsintervallen. Exempelvis erhålles:

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-x-1)\,dx = \Big|_{-1}^{+1}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right) = -\frac{7}{6}-\frac{1}{6} = -\frac{4}{3};$$

$$\int_0^x e^{-ax}\,dx = \Big|_0^x\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right) = \frac{1-e^{-ax}}{a};$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \Big|_0^x \overline{\text{arc tang}}\, x = \overline{\text{arc tang}}\, x.$$

Denna sista likhet ger oss för $x = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Vi betrakta ännu integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}.$$

Vi funno s. 404 att

$$\frac{1}{2}\,\overline{\text{arc tang}}\left(2\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right)$$

utgör en integralfunktion till $\frac{1}{5-3\cos x}$. Då denna integralfunktion emellertid är diskontinuerlig för värdet $x = \pi$ som ligger inom integrationsintervallen, dela vi den gifna integralen i tvenne, tagna mellan gränserna 0 och π resp. π och 2π. För dessa sistnämnda integraler ger oss ofvan bevisade sats värdena [1])

$$\int_0^\pi \frac{dx}{5-3\cos x} = \Big|_0^\pi \frac{1}{2}\,\overline{\text{arc tang}}\left(2\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{\text{arc tang}}\,(\infty) - \overline{\text{arc tang}}\,(0)\right) = \frac{\pi}{4},$$

---

[1]) Då x växande närmar sig värdet π, växer $\text{tang}\,\frac{x}{2}$ mot ∞; då x aftar mot π, närmar sig $\text{tang}\,\frac{x}{2}$ åter $-\infty$.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} = \Big|_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\, \overline{\text{arc tang}} \left(2 \text{ tang } \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{\text{arc tang}}\ 0 - \overline{\text{arc tang}}\,(-\infty)\right) = \frac{\pi}{4},$$

hvaraf genom addition följer

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} = \frac{\pi}{2}.$$

Samma resultat erhålles direkt om man använder den i noten s. 404 angifna integralfunktionen, hvilken är kontinuerlig för alla argumentvärden.

Af särskild vikt är användningen af *partiell integration* för beräkning af bestämda integraler. Om den gifna integralen skrifves under formen

$$\int_a^b u\,dv$$

och man sätter (jmf. s. 379)

$$u\,dv = d(uv) - v\,du,$$

erhålles först

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du.$$

Men den första termen i högra membrum är, enligt (57)′, lika med den tillväxt funktionen uv erhåller då x varierar från a till b, och vi få således formeln

(60) $$\int_a^b u\,dv = \Big|_a^b uv - \int_a^b v\,du.$$

Härvid förutsättes att funktionerna u och v och deras första derivator äro kontinuerliga i hvarje punkt af integrationsintervallen.

Enligt (60) erhålles t. ex.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, d \sin x = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx,$$

hvilken likhet, då produkten $\cos x \sin x$ försvinner såväl för $x = \frac{\pi}{2}$ som för $x = 0$, reducerar sig till

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx.$$

För summan af dessa två integraler erhålles omedelbart värdet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2},$$

hvaraf följer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Allmänt finner man, om n är ett helt tal > 1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\, d \cos x$$

$$= -\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= \quad (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, (1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \quad (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

och således

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx.$$

Genom upprepad tillämpning af denna rekursionsformel erhålles, om n är ett jämnt tal $2k$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

samt, om n är ett udda tal $2k+1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3},$$

hvilka resultat läsaren bör kontrollera. För integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$$

erhållas samma värden, ty substitutionen $x = \frac{\pi}{2} - t$ ger oss (jmf. s. 422)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.$$

En annan viktig anmärkning gäller de fall då integralfunktionen till den förelagda integranden $f(x)$ erhålles medels en substitution:

$$x = x(t), \quad t = t(x).$$

Vi antaga att, då x genomlöper integrationsintervallen från a till b, $t = t(x)$ varierar kontinuerligt och ständigt i samma riktning från värdet $\alpha = t(a)$ till värdet $\beta = t(b)$, samt att derivatan $x'(t)$ existerar och är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (α, β).

Integralfunktionen till $f(x)$ erhålles uttryckt i den nya variabeln t enligt formeln (jmf. s. 373—374)

$$\bar{F}(t) = \int f\big(x(t)\big)\, x'(t)\, dt.$$

Då vi i $\bar{F}(t)$ åter substituera $t = t(x)$, erhålles en funktion, $\bar{F}\big(t(x)\big)$, hvars derivata är lika med $f(x)$, och denna funk-

tion är kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b), om $\bar{F}(t)$ antages kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (α, β). Vi erhålla då, enligt ofvan bevisade sats,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b \bar{F}\big(t(x)\big) = \bar{F}\big(t(b)\big) - \bar{F}\big(t(a)\big).$$

Det är emellertid icke nödigt att i $\bar{F}(t)$ åter införa variabeln x, ty då $t(a) = \alpha$ och $t(b) = \beta$, kan det erhållna resultatet enklare skrifvas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \bar{F}(\beta) - \bar{F}(\alpha) = \Big|_\alpha^\beta \bar{F}(t).$$

Då funktionen $\bar{F}(t)$ utgör en integralfunktion till uttrycket $f\big(x(t)\big)\,x'(t)$ samt antagits kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (α, β), är vidare

$$\bar{F}(\beta) - \bar{F}(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)\,x'(t)\,dt.$$

Vi erhålla således ånyo transformationsformeln

$$(54) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)\,x'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)\,dx(t),$$

hvilken s. 420—422 härleddes direkt med stöd af den bestämda integralens definition.

Om vi t. ex. vilja beräkna integralen

$$\int_2^3 \frac{x\,dx}{1+x^4}$$

och härvid använda substitutionen $x^2 = t$, enligt hvilken t växer från 4 till 9 då x växer från 2 till 3, ger oss (54)

$$\int_2^3 \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_4^9 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(\overline{\text{arc tang}}\, 9 - \overline{\text{arc tang}}\, 4\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\overline{\text{arc tang}}\,\frac{5}{37} = 0.06716\ldots$$

Om för beräkning af integralen

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

användes substitutionen (jmf. s. 398)

$$\sqrt{x^2+1} = -x + t, \quad t = x + \sqrt{x^2+1},$$

erhålles likaså, då man observerar att t växer från $1+\sqrt{2}$ till $2+\sqrt{5}$ när x växer från 1 till 2,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{dt}{t} = \Big|_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \log t = \log \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} = 0,56226\ldots$$

Öfningsuppgifter:

1) Beräkna följande integralers värden:

$$\int_2^{-1} 3\,dx, \quad \int_{-1}^{+1} x^n\,dx, \quad \int_{-2}^{0} (x^3-1)\,dx, \quad \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}, \quad \int_a^{a+\pi} \sin^2 x\,dx,$$

$$\int_1^2 \log x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx, \quad \int_{-2}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

2) Beräkna värdet af integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+4}}$$

medels enhvar af följande substitutioner, hvilka böra tolkas geometriskt (jmf. s. 396):

$$\sqrt{x^2+5x+4} = x+t, \qquad \sqrt{x^2+5x+4} = 2+xt,$$

$$\sqrt{x^2+5x+4} = (x+1)\,t, \quad \sqrt{x^2+5x+4} = (x+4)\,t.$$

78. **Utsträckning af begreppet bestämd integral.** — Vid den bestämda integralens definition antogo vi integrationsintervallen ändlig, samt integranden ändlig och kontinuerlig i hvarje punkt af denna intervall. Begreppet bestämd integral kan emellertid fattas väsentligt allmännare och utsträckas i olika riktningar. Vi redogöra här kort för några enkla generaliseringar af detta begrepp, hvilka oupphörligt komma till användning.

Vi utgå från ett speciellt exempel. Man har för godtyckliga ändliga värden a och b

$$(61) \quad \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \Big|_a^b \operatorname{arc\,tang} x = \operatorname{arc\,tang} b - \operatorname{arc\,tang} a.$$

Om vi i denna likhet låta b obegränsadt växa medan a förblir konstant, närmar sig $\overline{\text{arc tang}}\, b$ gränsvärdet $\frac{\pi}{2}$, hvaraf följer

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \overline{\text{arc tang}}\, a\,.$$

Detta resultat angifves kortare medels beteckningen

$$\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \overline{\text{arc tang}}\, a\,.$$

Låta vi åter i (61) a närma sig $-\infty$ medan b förblir konstant, närmar sig $\overline{\text{arc tang}}\, a$ gränsvärdet $-\frac{\pi}{2}$ och vi erhålla

$$\lim_{a=-\infty} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \overline{\text{arc tang}}\, b + \frac{\pi}{2},$$

hvilket kortare skrifves

$$\int_{-\infty}^b \frac{dx}{1+x^2} = \overline{\text{arc tang}}\, b + \frac{\pi}{2}\cdot$$

Om slutligen samtidigt a aftar mot $-\infty$ och b växer mot ∞, närmar sig integralen (61) gränsvärdet π, hvilket utmärkes medels beteckningen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\,.$$

Allmänt införa vi följande *definitioner* för en integral i hvilken någon af gränserna är oändlig:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b=+\infty \\ a=-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Härvid förutsättes att funktionen $f(x)$ är ändlig och kontinuerlig i hvarje punkt af integrationsintervallen, samt att det betraktade gränsvärdet existerar och är ändligt.

Betraktelsen af integralen

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

leder oss till en annan viktig utsträckning af integralbegreppet. Integranden $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ är reell blott inom intervallen från -1 till 1, och blir oändlig då x närmar sig något af dessa värden. Enligt vår tidigare definition har ofvanstående integral således en betydelse blott om dess gränser a och b ligga mellan -1 och 1, i hvilket fall dess värde är

$$(62) \qquad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big|_a^b \overline{\text{arc sin}\, x} = \overline{\text{arc sin}\, b} - \overline{\text{arc sin}\, a}\,.$$

Emellertid framgår ur denna likhet att, om vi låta b närma sig 1, eller a närma sig -1, eller samtidigt b närma sig värdet 1 och a värdet -1, den betraktade integralen i hvarje fall konvergerar mot ett bestämdt ändligt gränsvärde, hvilket i första fallet är lika med $\frac{\pi}{2} - \overline{\text{arc sin}\, a}$, i andra fallet lika med $\overline{\text{arc sin}\, b} + \frac{\pi}{2}$, i tredje fallet lika med π. För att angifva detta skrifver man kort

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \overline{\text{arc sin}\, a}\,,$$

$$\int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \overline{\text{arc sin}\, b} + \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\,.$$

Allmänt införa vi följande *definitioner* för de fall då integranden blir oändlig i någon af integrationsintervallens ändpunkter (ε och ε' beteckna positiva tal):

Om $f(x)$ är ändlig och kontinuerlig för $a < x < b$ men blir oändlig då x närmar sig b, skrifva vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Om $f(x)$ är ändlig och kontinuerlig för $a < x < b$ men blir oändlig då x närmar sig a, skrifves

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Om $f(x)$ är ändlig och kontinuerlig för $a < x < b$ men blir oändlig såväl för $x = a$ som för $x = b$, är slutligen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{a+\varepsilon'}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

I hvarje fall förutsättes att det betraktade gränsvärdet existerar och är ändligt.

Öfningsuppgifter: — Beräkna, i noggrann anslutning till ofvan gifna definitioner, följande bestämda integralers värden[1]):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\mu},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu},\quad \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\mu},$$

$$\int_0^1 \log x\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-x} x^2\,dx,\quad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1},\quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2(x-1)(x-2)},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1},\quad \int_0^\infty e^{-kx} \sin nx\,dx.$$

79. **Beräkning af en kurvbåges längd.** — Vi skola nu i korthet redogöra för några geometriska användningar af integralkalkylen, hvarpå i n⁰ 67 redan gifvits exempel. Vi anknyta vår framställning vid betraktelserna i det sjette kapitlet, och göra åter början med problemet att *rectificera* en kurva, d. v. s. att beräkna dess längd.

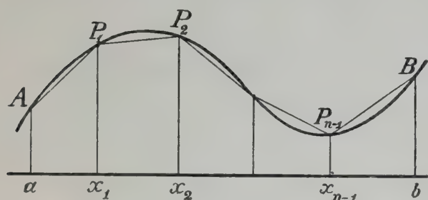
---

[1]) Om någon af integralens gränser är oändlig och integralfunktionen innehåller flere logaritmiska termer, böra dessa termer sammanslås.

1⁰. Vi antaga först kurvans ekvation gifven under formen

$$y = f(x),$$

samt beteckna med a och $b\,(>a)$ abskissorna för den betraktade bågens ändpunkter A och B. Vi förutsätta att bågen AB icke skäres af någon parallell till y-axeln i mer än en punkt, samt att den har en bestämd tangent, hvars riktning varierar kontinuerligt med tangeringspunktens läge och icke i någon punkt är parallell med y-axeln, eller m. a. o. att derivatan $f'(x)$ är ändlig och kontinuerlig för $a \leq x \leq b$.



Mellan A och B inskjuta vi på kurvan en följd af punkter, $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, hvilkas abskissor må betecknas x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$, samt konstruera den brutna linien $A P_1 P_2 \ldots P_{n-1} B$. Enligt den s. 313 uppställda definitionen utgör längden af kurvbågen AB den gräns hvilken den brutna liniens längd närmar sig då antalet af dess sidor obegränsadt ökas, enligt en sådan lag att samtliga sidor slutligen blifva kortare än hvilken uppgifven sträcka som helst. Det gäller att afgöra om, under de antaganden vi gjort, en dylik gräns verkligen existerar, samt att beräkna densamma (jmf. n⁰ 58).

Sidan $P_{\nu-1} P_\nu$ i den brutna linien har längden [1])

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + \big(f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\big)^2}.$$

Nu är enligt medelvärdssatsen (s. 291)

$$f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) = (x_\nu - x_{\nu-1}) f'(\xi_\nu),$$

där $x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu$, och ofvanstående uttryck kan således skrifvas

$$\sqrt{1 + \big(f'(\xi_\nu)\big)^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

---

[1]) För korthetens skull använda vi härefter uttrycken *längd*, *area*, *volym* jämväl för att beteckna de betraktade storheternas *mätetal* i förhållande till de fastställda enheterna.

Alltså är den brutna liniens längd lika med summan

$$\sqrt{1+(f'(\xi_1))^2}\,(x_1-a)+\sqrt{1+(f'(\xi_2))^2}\,(x_2-x_1)+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{1+(f'(\xi_n))^2}\,(b-x_{n-1}),$$

där $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ äro vissa bestämda värden hvilka ligga inom intervallerna $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$.

Då vi nu låta antalet sidor i den brutna linien obegränsadt ökas på sätt ofvan angifvits, kommer intervallen (a, b) samtidigt att blifva delad i allt flere delar hvilka samtligen närma sig 0. Emedan funktionen $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ på grund af vårt antagande är ändlig och kontinuerlig för $a \leq x \leq b$, närmar sig ofvanstående uttryck härvid gränsvärdet (jmf. n⁰ 75)

$$(63) \qquad s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

som således anger *längden af kurvbågen AB* i förhållande till den vid kurvans uppritande använda längdenheten.

Såsom exempel beräkna vi längden s af den båge af parabeln $x^2 = 2py$ som ligger mellan vertex och punkten P med abskissan $x\,(> 0)$. Man har i detta fall

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{x^2+p^2},$$

hvaraf följer

$$s = \int_0^x \frac{1}{p}\sqrt{x^2+p^2}\,dx.$$

Enligt kalkylerna s. 398 är, om integrationskonstanten utelemnas,

$$\int \frac{1}{p}\sqrt{x^2+p^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right),$$

och då högra membrum för $x = 0$ antar värdet $\frac{p}{2}\log p$, erhålles således till resultat

$$s = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}.$$

2°. Vi skola undersöka huru formeln (63) gestaltar sig om kurvans ekvation är gifven i parameterform:

(64) $$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Vi antaga att punkterna af bågen AB entydigt motsvara de värden af parametern t som tillhöra en viss intervall $t_0 \leq t \leq t_1$, samt att derivatorna $x'(t)$ och $y'(t)$ äro kontinuerliga och $x'(t)$ skild från noll i hvarje punkt af denna intervall [1].

Enligt n° 49 är i detta fall $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, hvaraf följer

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{|x'(t)|}.$$

Vi böra vidare i integralen (63) substituera $dx = x'(t)\,dt$, och uttrycket under integraltecknet antar således formen

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \pm\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt,$$

där man har att välja tecknet + eller — beroende på om derivatan $x'(t)$ är positiv eller negativ inom intervallen (t_0, t_1), eller m. a. o. om punkten (64) genomlöper den gifna kurvbågen från A till B eller från B till A då t växer från t_0 till t_1. I hvartdera fallet erhålla vi, enligt satserna 3° s. 418 och 6° s. 422,

(65) $$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

---

[1]) Om den gifna kurvbågen icke skäres af någon parallell till x-axeln i mer än en punkt, i hvilket fall dess ekvation kan skrifvas under formen $x = \varphi(y)$, erhålles genom samma resonemang som ofvan för dess längd uttrycket $\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$, där y_0 och y_1 $(> y_0)$ beteckna ordinatorna för bågens ändpunkter.

Vid öfvergång till parameterframställningen (64) erhålles för kurvans längd äfven i detta fall en integral af formen (65), hvilket läsaren bör kontrollera.

Man sluter häraf att formeln (65) är tillämplig så snart den gifna kurvbågen AB kan delas i ett ändligt antal bågar, sålunda att hvarje båge skäres i högst en punkt, antingen af hvarje parallell till x-axeln

Vi betrakta såsom exempel cycloiden[1])

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

En enkel räkning ger

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

och för cycloidbågens längd erhålles således uttrycket

$$2a\int_{t_0}^{t_1} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a \Big|_{t_0}^{t_1} \cos\frac{t}{2} = 4a\left(\cos\frac{t_0}{2} - \cos\frac{t_1}{2}\right),$$

då med t_0 och t_1 ($> t_0$) betecknas de värden af t som svara mot bågens ändpunkter. Speciellt finner man, om man sätter $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$, att längden af en fullständig cycloidbåge, mellan två på hvarandra följande spetsar, är lika med $8a$.

3°. Vi betrakta särskildt det fall då kurvans ekvation är gifven i polära koordinater:

$$r = r(\varphi).$$

De rätvinkliga koordinaterna x, y för den punkt af kurvan som svarar mot ett gifvet värde φ äro då

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Härur erhålles

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2,$$

och formeln (65) ger oss således, då φ väljes till parameter,

$$(66) \qquad s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi,$$

---

eller af hvarje parallell till y-axeln. Härvid förutsättes att, då t växer från t_0 till t_1, punkten (64) ständigt i samma riktning genomlöper kurvan AB.

[1]) Jmf. L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, s. 159.

där φ_0 och $\varphi_1 (>\varphi_0)$ beteckna de värden af φ som motsvara den gifna kurvbågens ändpunkter. Härvid förutsättes att derivatan $\frac{dr}{d\varphi}$ är ändlig och kontinuerlig i hvarje punkt af integrationsintervallen.

Exempelvis erhålles för spiralen $r = Ce^{k\varphi}$

$$\frac{dr}{d\varphi} = kCe^{k\varphi},\ r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = C^2(1+k^2)\,e^{2k\varphi},$$

och således (jmf. öfningsuppgiften s. 323)

$$s = C\sqrt{1+k^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{k\varphi}\,d\varphi = C\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\left(e^{k\varphi_1} - e^{k\varphi_0}\right).$$

4°. För *bågelementet* ds af en kurva, d. v. s. elementet af den integral som representerar dess båglängd, gäller enligt (63) likheten

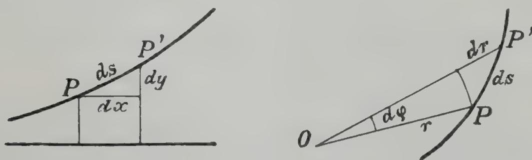
$$(63)' \qquad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

samt enligt (66) likheten

$$(66)' \qquad ds = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = \sqrt{(r\,d\varphi)^2+dr^2}.$$

Ur det förra uttrycket framgår elementet i integralen (65) då man substituerar $dx = \frac{dx}{dt}dt,\ dy = \frac{dy}{dt}dt.$

Ofvanstående likheter härledas enkelt medels differentialgeometrisk betraktelse. Om de rätvinkliga koordinaterna



för ändpunkterna P och P' af bågelementet ds betecknas med x, y och $x+dx,\ y+dy$, kan ds uppfattas såsom hypotenusa i en rätvinklig triangel med kateterna dx och dy, hvarur likheten (63)′ framgår. Är åter kurvans ekvation gifven i

formen $r = r(\varphi)$, och betecknas de polära koordinaterna för P och P' med r, φ resp. $r + dr, \varphi + d\varphi$, kan ds uppfattas såsom hypotenusa i en rätvinklig triangel med kateterna $r d\varphi$ och dr, hvarur afläses likheten (66)'.

Öfningsuppgifter:

1) Hvilket uttryck erhålles enligt (63) för längden af en cirkelbåge?

2) Sök längden af en båge af ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, först genom att uttrycka y såsom funktion af x, därefter genom att införa den excentriska anomalin såsom parameter (jmf. s. 273).

3) Rectificera en båge af ARCHIMEDES' spiral $r = a\varphi$.

4) Bestäm längden af den båge af kedjelinien

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

som ligger mellan y-axeln och en parallell till densamma.

80. **Beräkning af figurers ytinnehåll.** — Vi gå till integralkalkylens användning vid figurers *kvadratur*, d. v. s. vid beräkningen af deras ytinnehåll.

1°. I n° 67 redogjorde vi redan för sammanhanget mellan begreppet ytinnehåll eller area och begreppet integralfunktion. Vi funno (s. 366) att, om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a \leq x \leq b$ och positiv mellan a och b, och om $F(x)$ utgör en för $a < x \leq b$ kontinuerlig integralfunktion till $f(x)$, arean af den yta, som begränsas af kurvan $y = f(x)$, x-axeln samt ordinatorna i punkterna a och b, representeras af uttrycket $F(b) - F(a)$. Å andra sidan är $F(b) - F(a)$ lika med värdet af den bestämda integralen

$$(67) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx.$$

Denna integral ger oss således den betraktade ytans area. Dess element $y\,dx$ föreställer arean af en rektangel med höjden y och basen dx.

Detta resultat framgår äfven direkt ur den bestämda integralens och areans definitioner. Ty integralens värde är (jmf. n° 75) mindre än den mot en godtycklig indelning D

af intervallen (a, b) svarande maximisumman $S_D(M)$ men större än minimisumman $S_D(m)$, och å andra sidan ligger äfven den betraktade ytans area mellan dessa samma gränser (jmf. s. 363—364). Men det finnes endast ett tal som är mindre än hvarje maximisumma och större än hvarje minimisumma (jmf. s. 416) och integralens värde är således lika med ytans area.

Om funktionen $f(x)$ är negativ mellan a och b, i hvilket fall den betraktade ytan ligger under x-axeln, representerar integralen (67) denna ytas area tagen med *negativt* tecken (jmf. s. 368).

Om slutligen funktionen $f(x)$ går genom 0 och ändrar tecken i ett ändligt antal punkter $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ mellan a och b, sönderdela vi integralen (67) i integraler tagna mellan gränserna a och x_1, x_1 och $x_2, \ldots, x_{n-1}$ och b, och finna sålunda att dess värde är lika med den sammanlagda arean af de ytdelar som begränsas af kurvan $y = f(x)$, stycket (a, b) af x-axeln samt ordinatorna i punkterna a och b, och hvilka ligga ofvanom x-axeln, minskad med areorna af de bland ifrågavarande ytdelar hvilka ligga under x-axeln.

Enligt (67) är t. ex arean af en kvadrant af cirkeln med radien r lika med (jmf. s. 401)

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \Big|_0^r \frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{r}\right)$$

$$= \frac{r^2}{2} \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Vi betrakta vidare den yta som begränsas af cycloiden

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

och sträckan $(0, 2\pi a)$ af x-axeln. För att beräkna integralen $\int_0^{2\pi a} y\,dx$, som representerar denna ytas area, införa vi t såsom ny variabel och hafva då att substituera $y = a(1 - \cos t)$, $dx = a(1 - \cos t)\, dt$, hvaraf

$$y\,dx = a^2(1-\cos t)^2\,dt.$$

Vi erhålla sålunda, då variabeln t växer från 0 till 2π samtidigt som x växer från 0 till $2\pi a$,

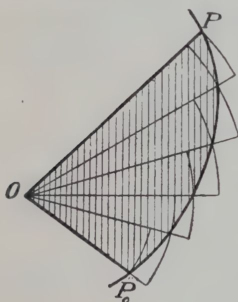
$$\int_0^{2\pi a} y\,dx = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$= 2\pi a^2 - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt.$$

Men $\int_0^{2\pi}\cos t\,dt = 0$ och $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \pi$ (jmf. s. 430), och den betraktade ytans area är alltså $= 3\pi a^2$, eller tre gånger så stor som arean af den cirkel som alstrar cycloiden.

2°. Vi antaga nu kurvans ekvation gifven i polära koordinater, $r = r(\varphi)$, och betrakta den sektorformiga yta, S, som begränsas af denna kurva samt tvenne radii-vectores, OP_0 och OP, hvilka må motsvara värdena φ_0 och $\varphi\ (>\varphi_0)$. Funktionen $r(\varphi)$ antages entydig och kontinuerlig för dessa och alla mellanliggande värden.

Mellan φ_0 och φ inskjuta vi en följd af växande värden, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, och draga motsvarande radii-vectores, hvilka dela ytan S i n delområden. För hvart och ett af dessa konstruera vi, såsom närstående figur utvisar, de in- och omskrifna cirkelsektorerna. Ytan S innehåller såsom en del den af de inskrifna sektorerna bildade ytan, medan den själf utgör en del af den yta som bildas af de omskrifna sektorerna. Den förra ytans area är



$$(68)\quad \frac{1}{2}\Big(r_1^2(\varphi_1-\varphi_0)+r_2^2(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+r_n^2(\varphi-\varphi_{n-1})\Big),$$

den senare ytans area

$$(69)\quad \frac{1}{2}\Big(R_1^2(\varphi_1-\varphi_0)+R_2^2(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+R_n^2(\varphi-\varphi_{n-1})\Big),$$

då med $r_1, r_2, \ldots, r_n$ betecknas de minsta och med $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de största värdena af funktionen $r(\varphi)$ inom delintervallerna $(\varphi_0, \varphi_1), (\varphi_1, \varphi_2), \ldots, (\varphi_{n-1}, \varphi)$. Arean af ytan S[1]) är således större än summan (68) men mindre än summan (69), och detta gäller huru än intervallen (φ_0, φ) delats.

Men enligt n⁰ 75 ligger jämväl värdet af den bestämda integralen

$$(70) \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi \qquad .$$

mellan summorna (68) och (69), huru än intervallen (φ_0, φ) delats, och tillika hafva vi (s. 416) visat att det finnes endast ett tal som besitter denna egenskap. Integralen (70) ger oss således arean af den betraktade ytan S. Dess element $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$ föreställer arean af en cirkelsektor med radien r och centrivinkeln $d\varphi$.

Vi betrakta såsom exempel den yta som begränsas af spiralen $r = Ce^{k\varphi}$ $(k > 0)$ och dess mot värdena φ_1 och φ_2 $(> \varphi_1)$ svarande radier, $r_1 = Ce^{k\varphi_1}$ och $r_2 = Ce^{k\varphi_2}$ (jmf. uppgiften (3) s. 343). Enligt (70) finner man omedelbart för denna ytas area uttrycket

$$\frac{C^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2k\varphi} d\varphi = \frac{C^2}{4k}\left(e^{2k\varphi_2} - e^{2k\varphi_1}\right) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4k}.$$

3⁰. Vi skola undersöka hvilken form integralen (70) antar om kurvans ekvation är

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

[1]) Intervallen (φ_0, φ) kan delas i så små delar att skillnaden mellan summorna (69) och (68) blir så liten man vill. Å andra sidan kan enhvar af de ofvan betraktade cirkelsektorerna ersättas med en inskrifven resp. omskrifven polygonal sektor, hvars area skiljer sig godtyckligt litet från sektorns area. Häraf följer att man till den gifna ytan S kan konstruera en yttre och en inre polygon hvilkas areor hafva en godtyckligt liten skillnad, och att således nämnda yta, enligt den s. 334 uppställda definitionen, tillkommer ett bestämdt mätetal i förhållande till ytenheten.

För de polära koordinaterna gälla då likheterna

$$r^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{y(t)}{x(t)},$$

ur hvilka följer

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2},$$

$$r^2\,d\varphi = (x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t))\,dt = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt,$$

och vi erhålla således

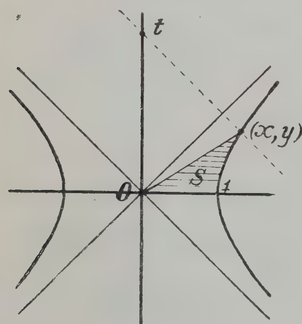
$$\text{(71)} \qquad \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

Härvid förutsättes att, då vinkeln φ växer från φ_0 till det betraktade värdet φ, parametern t varierar kontinuerligt och ständigt i samma riktning från t_0 till t, samt att derivatorna $x'(t)$ och $y'(t)$ äro kontinuerliga för alla dessa värden.

Den erhållna integralens element

$$\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

anger arean af den triangel som till hörnpunkter har origo O samt punkterna x, y och $x + dx, y + dy$ af den gifna kurvan (jmf. den andra noten i slutet af boken).



Såsom en tillämpning söka vi arean af den yta som begränsas af den högra grenen af hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ samt de till vertex och en annan punkt x, y af denna gren dragna radii-vectores. Om vi genom punkten x, y draga en parallell till asymptoten $y = -x$ och med t beteckna ordinatan för den punkt i hvilken denna parallell skär y-axeln, är enligt s. 396

$$\text{(72)} \qquad x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Härur följer medels en enkel kalkyl

$$\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{dt}{t},$$

och då hyperbelns vertex motsvarar parametervärdet $t=1$, erhålla vi enligt (71) för den betraktade ytans area värdet

$$S=\frac{1}{2}\int_1^t\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\log t\,.$$

Ur denna likhet följer omvändt $t=e^{2S}$, och då detta värde insättes i (72), erhålla vi koordinaterna x, y för en punkt af hyperbeln uttryckta såsom funktioner af parametern S:

(72)′ $$x=\frac{1}{2}\left(e^{2S}+e^{-2S}\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(e^{2S}-e^{-2S}\right).$$

Med användande af de s. 259 införda *hyperboliska* funktionerna kunna dessa likheter kort skrifvas

(72)″ $$x=\cosh 2S,\quad y=\sinh 2S\,.$$

Om hyperbeln $x^2-y^2=1$ ersättes med cirkeln $x^2+y^2=1$, och om vi med S beteckna arean af den sektor som begränsas af denna cirkel samt de till punkten $x=1, y=0$ och en annan punkt x, y af cirkeln dragna radii-vectores, är sektorns centrivinkel lika med $2S$ och således

$$x=\cos 2S,\quad y=\sin 2S\,.$$

Häraf framgår att de hyperboliska funktionerna spela samma roll för hyperbeln $x^2-y^2=1$ som de trigonometriska funktionerna för cirkeln $x^2+y^2=1$, hvilket äfven gifvit upphof åt den för de hyperboliska funktionerna använda beteckningen.

4°. Vi skola slutligen definiera och beräkna arean af en *rotationsyta*, i det vi stödja oss på de i elementargeometrin bevisade resultaten om cylinderns och konens ytor.

Vi betrakta den rotationsyta S som alstras af en kurvbåge AB som roterar kring x-axeln (jmf. figuren s. 437).

Vi antaga kurvans ekvation gifven i formen $y = f(x)$, och förutsätta att $f(x)$ och $f'(x)$ äro kontinuerliga för $a < x < b$.

I bågen AB inskrifva vi åter en bruten linie, $AP_1P_2 \ldots P_{n-1}B$, och låta jämväl denna rotera kring x-axeln, hvarvid alstras en yta, S', som är sammansatt af koniska eller cylindriska ytor. Vi *definiera* arean af rotationsytan S såsom den gräns hvilken arean af ytan S' närmar sig då den brutna liniens sidoantal obegränsadt ökas, enligt en sådan lag att samtliga sidor slutligen blifva kortare än hvilken uppgifven sträcka som helst.

Arean af den yta kordan $P_{\nu-1}P_\nu$ alstrar under rotationen är, enligt elementargeometrin, lika med produkten af kordans längd och längden af den cirkelperiferi dess midtpunkt beskrifver. Kordans längd kan, såsom s. 437 visats, skrifvas under formen

$$\sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

där $x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu$. Nämnda cirkelperiferi åter har till radie medeltalet af kurvans ordinator i punkterna $x_{\nu-1}$ och x_ν, och dess längd är således

$$2\pi \frac{f(x_{\nu-1}) + f(x_\nu)}{2}.$$

Men då $f(x)$ antagits kontinuerlig, finnes det en punkt ξ_ν' af intervallen $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ för hvilken $f(\xi_\nu') = \dfrac{f(x_{\nu-1}) + f(x_\nu)}{2}$, och sistnämnda uttryck kan alltså skrifvas $2\pi f(\xi_\nu')$ Arean af den af kordan $P_{\nu-1}P_\nu$ alstrade ytan är sålunda

$$2\pi f(\xi_\nu')\sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

och för arean af ytan S' erhålles följaktligen uttrycket

$$(73) \qquad \sum 2\pi f(\xi_\nu')\sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

där summan är utsträckt öfver alla delar af intervallen (a, b).

Vi sätta ännu, för $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$f(\xi_\nu') = f(\xi_\nu) + \varepsilon_\nu,$$

hvarvid uttrycket (73) öfvergår i följande:

$$(73)' \qquad \begin{aligned} &\sum 2\pi f(\xi_\nu) \sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}) \\ &+ \sum 2\pi\,\varepsilon_\nu \sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}). \end{aligned}$$

Nu är kvantiteten $\varepsilon_\nu = f(\xi_\nu') - f(\xi_\nu)$ numeriskt mindre än den största oscillationen O_D af funktionen $f(x)$ inom de intervaller i hvilka (a, b) delats. Om vi med M' beteckna det största värdet af $|f'(x)|$ inom (a, b), är alltså i uttrycket (73)′ den senare summan numeriskt mindre än

$$\sum 2\pi\, O_D \sqrt{1 + M'^2}\,(x_\nu - x_{\nu-1}) = 2\pi\, O_D \sqrt{1 + M'^2}\,(b - a),$$

och närmar sig således gränsvärdet 0 då (a, b) delas i allt mindre delar. Emedan funktionen $f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ är kontinuerlig för $a \leq x \leq b$, har åter den förra summan i uttrycket (73)′ till gränsvärde den bestämda integralen

$$(74) \qquad \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

hvilken enligt (63)′ kortare kan skrifvas

$$(74)' \qquad 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds.$$

Denna integral ger oss således arean af rotationsytan S. Dess element $2\pi y ds$ betyder arean af den yta som kurvans bågelement ds alstrar vid rotationen (om detta bågelement betraktas såsom rätlinigt och y betecknar ordinatan för dess midtpunkt).

Såsom exempel betrakta vi den rotationsparaboloid hvilken alstras då parabeln $y^2 = 2px$ roterar kring x-axeln. Man har i detta fall

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{2px + p^2},$$

och för arean af den del af nämnda yta, som afskäres af ett mot x-axeln vinkelrätt plan på afståndet x från origo, erhålles således enligt (74) uttrycket

$$2\pi\int_0^x \sqrt{2px+p^2}\,dx = 2\pi\Big|_0^x \frac{1}{3p}(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\pi p^2\left(\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Öfningsuppgifter:

1) Härled uttrycket för ellipsens yta, först i rätvinkliga koordinater, därefter genom att införa den excentriska anomalin såsom parameter.

2) Huru stor är den yta som begränsas af parabeln $y^2 = 2x$ och hyperbeln $x^2 - y^2 = 3$?

3) Sök arean af den yta som ligger mellan cissoiden[1])

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

och dess asymptot $x = a$.

4) Beräkna, med användande af polära koordinater, storleken af den yta som begränsas af lemniskatan[1])

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

5) Härled enligt formeln (71) uttrycket för det s. 443 betraktade cycloidsegmentets area.

6) Huru stor är den yta som begränsas af hypocycloiden[1]) eller astroiden

$$x = a\cos^3 t\,,\quad y = a\sin^3 t\,?$$

7) Härled uttrycket för ytan af en sferisk zon.

8) Beräkna ytorna af de rotationsellipsoider som uppkomma då ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ roterar kring sina axlar (den excentriska anomalin införes såsom parameter).

9) Huru kan man definiera och beräkna arean af mantelytan af en cylinder med godtycklig bas (jmf. n° 65)?

81. **Beräkning af kroppars volymer.** — Vi redogöra slutligen för några tillämpningar af integralkalkylen på kroppars *kubatur*, d. v. s. på beräkningen af deras volymer.

[1]) Jmf. L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, tionde kapitlet.

1°. Vi betrakta först en *rotationskropp*, alstrad af en plan yta som roterar kring en i dess plan liggande rät linie. Denna linie välja vi till x-axel, och antaga för enkelhetens skull att den alstrande ytan S är begränsad af nämnda axel, tvenne ordinator, $x = a$ och $x = b\,(> a)$, samt en kurva, $y = f(x)$, som icke skäres i mer än en punkt af någon parallell till y-axeln.

Mellan a och b inskjuta vi åter en följd af punkter, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, uppresa i dessa ordinator, hvilka dela ytan S i n delar, samt konstruera för hvarje sådan del den omskrifna och den inskrifna rektangeln (jmf. figuren s. 363). Vid rotationen alstrar enhvar af dessa rektanglar en cylinder. Den gifna rotationskroppen utgör en del af den kropp, V, som bildas af de af de omskrifna rektanglarna alstrade cylindrarna, medan den själf innehåller den kropp, v, som är sammansatt af de cylindrar hvilka alstras af de inskrifna rektanglarna.

Nu har kroppen V volymen

$$(75)\quad \pi\left(M_1^2(x_1 - a) + M_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n^2(b - x_{n-1})\right),$$

och volymen af kroppen v är

$$(76)\quad \pi\left(m_1^2(x_1 - a) + m_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n^2(b - x_{n-1})\right),$$

om såsom förut med $M_1, M_2, \ldots, M_n$ betecknas de största och med $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de minsta värdena af funktionen $f(x)$ inom intervallerna $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$. Rotationskroppens volym[1]) är således mindre än summan (75) men större än summan (76), och detta gäller huru än intervallen (a, b) delats.

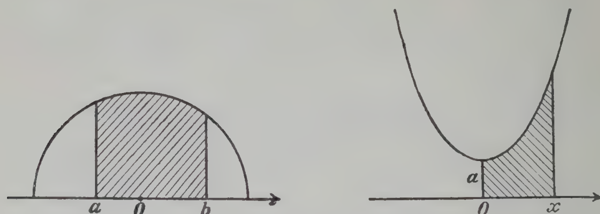
Men, enligt hvad i n° 75 visats, finnes det endast ett tal som besitter dessa egenskaper, och detta tal utgör tillika vår definition för värdet af den bestämda integralen

$$(77)\qquad \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_a^b y^2\,dx\,.$$

---

[1]) Jmf. den första noten s. 355.

Denna integral ger oss således den betraktade rotationskroppens volym. Dess element, $\pi y^2 dx$, föreställer volymen af en cylindrisk skifva med basradien y och höjden dx.



Vi söka först volymen af det sferiska segment som alstras då den af cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$, x-axeln samt ordinatorna $x = a$ och $x = b$ $(> a)$ begränsade ytan roterar kring x-axeln. Ur cirkelns ekvation erhålles $y^2 = R^2 - x^2$, och formeln (77) ger oss således för den betraktade volymen uttrycket

$$\pi \int_a^b (R^2 - x^2)\, dx = \pi \Big|_a^b \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right) = \pi R^2 (b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3).$$

Härur framgår uttrycket för hela sferens volym då man sätter $a = -R$, $b = R$.

Vi betrakta vidare en kropp, alstrad genom rotation af den yta som begränsas af kedjelinien

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

x-axeln samt ordinatorna i origo och punkten x (> 0) (jmf. den senare af ofvanstående figurer). För denna kropps volym erhålles enligt (77) uttrycket

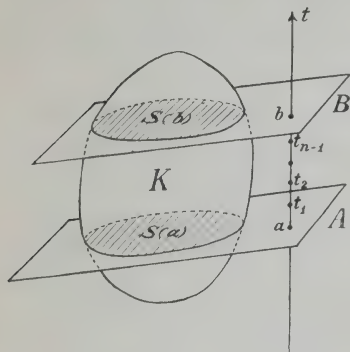
$$\frac{\pi a^2}{4} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \Big|_0^x \left(2x + \frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$= \frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right).$$

2^0. Vi betrakta nu en godtyckligt begränsad kropp, och söka volymen af den del K af densamma som ligger mellan två parallella plan, A och B.

Vi välja en rätlinig axel som skär planen A och B (t. ex. någon af koordinataxlarna), och bestämma läget af en punkt på densamma genom dess afstånd t från en fast punkt af axeln, räknadt positivt i en viss riktning, negativt i den motsatta. Skärningspunkterna mellan ifrågavarande axel och planen A och B må motsvara värdena $t = a$ och $t = b\ (> a)$. Vidare må $S(t)$ beteckna arean af skärningsytan mellan den betraktade kroppen och det med A och B parallella plan som råkar nämnda axel i punkten t. Vi antaga att $S(t)$ är en kontinuerlig funktion af t för $a \leqq t \leqq b$.



Mellan a och b inskjuta vi en följd af värden, $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, och lägga genom motsvarande punkter af t-axeln plan parallella med planen A och B. Dessa dela kroppen K i n delar, hvilkas undre basytor hafva areorna $S(a), S(t_1), \ldots, S(t_{n-1})$ och hvilkas höjder äro $(t_1 - a)\cos\omega$, $(t_2 - t_1)\cos\omega$, $\ldots$, $(b - t_{n-1})\cos\omega$, då med ω betecknas den spetsiga vinkel som normalen till planen A och B bildar med t-axeln. Vi ersätta enhvar af dessa delar af kroppen K med en rät cylinder med samma basyta och höjd, och erhålla sålunda en kropp, K', sammansatt af n cylindriska skifvor, hvars volym är

$$(78)\qquad \big(S(a)(t_1 - a) + \cdots + S(t_{n-1})(b - t_{n-1})\big)\cos\omega .$$

Vi tänka oss nu intervallen (a, b) delad i allt flere delar, enligt en sådan lag att alla delar närma sig noll. Emedan funktionen $S(t)$ antagits kontinuerlig för $a < t < b$, närmar sig härvid summan (78) ett bestämdt ändligt gränsvärde, nämligen värdet af den bestämda integralen

$$(79)\qquad \int_a^b S(t)\cos\omega\, dt = \cos\omega \int_a^b S(t)\, dt .$$

Denna integral utgör således gränsvärdet för volymen af kroppen K'.

Men, då (a, b) delas i allt mindre delar, närmar sig volymen af K' å andra sidan allt mer volymen af den gifna kroppen K, förutsatt att denna kropp verkligen har en bestämd volym, hvartill erfordras att dess begränsningsyta uppfyller det s. 351 formulerade villkoret. Ty om detta villkor är uppfylldt, kan man äfven innesluta begränsningsytan af K mellan två polyedriska ytor hvilka icke hafva någon punkt gemensam med densamma, och hvilka tillsammans begränsa en del af rymden hvars volym är mindre än en föreskrifven, godtyckligt liten kvantitet ε (jmf. den senare noten s. 337). Om delarna af intervallen (a, b) väljas tillräckligt små, kommer begränsningsytan af den på ofvan angifvet sätt konstruerade kroppen K' helt och hållet att falla mellan nyssnämnda polyedriska ytor, och för en dylik indelning af (a, b) skiljer sig således volymen af K' från den gifna kroppens volym med mindre än ε, hvarmed vårt påstående är bevisadt.

Integralen (79) ger oss således volymen af den ofvan betraktade kroppen K. Dess element, $S(t) \cos \omega \, dt$, föreställer volymen af en cylindrisk skifva hvars basyta har arean $S(t)$ och hvars höjd är $\cos \omega \, dt$. Produkten $S(t) \cos \omega$ representerar arean af nämnda basytas projektion på ett mot t-axeln vinkelrätt plan.

Om K är en rotationskropp och t-axeln väljes parallell med dennas axel, reducerar sig (79) till det uttryck vi tidigare erhållit för volymen af en dylik kropp [1]).

---

[1]) Integralkalkylens historia går mycket längre tillbaka i tiden än differentialkalkylens (jmf. s. 275). EUKLIDES' *Elementa*, hvilket verk utgjorde en sammanfattning af den tidens matematiska vetande, visar oss att grekerna redan tidigt ingående hade sysslat med frågor rörande figurers kvadratur och kroppars kubatur. Ett halft århundrade efter EUKLIDES gjordes på detta område betydande nya upptäckter af ARCHIMEDES, som bl. a. beräknade cirkelperiferins längd (jmf. s. 172), arean af ett parabelsegment, volymerna af särskilda rotationskroppar och deras segment, samt de buktiga ytorna af cylindern, konen och sferen, hvarjämte han anställde omfattande undersökningar beträffande tyngdpunkter. ARCHIMEDES använde vid sina undersökningar ett summationsförfarande analogt med det hvaraf vi särskilda gånger gjort bruk i det sjette kapitlet. De sum-

Såsom exempel betrakta vi den kropp som begränsas af paraboloiden $2az = x^2 + y^2$ och planet $x + y + z = h$. Vi skära densamma med planet $x + y + z = t$, hvilket är parallellt med det gifna och råkar z-axeln (som vi i detta fall välja till t-axel) i punkten $z = t$. Vi söka skärningsytans projektion på xy-planet, och hafva för detta ändamål att eliminera z mellan ekvationerna $2az = x^2 + y^2$ och $x + y + z = t$, hvarvid erhålles

$$(x + a)^2 + (y + a)^2 = 2a(t + a).$$

Den sökta projektionen utgöres således af en cirkel med arean $2\pi a(t + a)$, hvilket uttryck motsvarar produkten $S(t)\cos\omega$ i integralen (79). För $t = -a$ reducerar sig cirkeln till en punkt, hvaraf vi sluta att planet $x + y + z = -a$ tangerar paraboloiden $2az = x^2 + y^2$. Integralens gränser blifva alltså $-a$ och h, och vi erhålla följaktligen för den betraktade kroppens volym uttrycket

$$\int_{-a}^{h} 2\pi a(t + a)\,dt = \pi a(h + a)^2.$$

Öfningsuppgifter:

1) Sök längden af de bågar af kurvan

$$9ay^2 = x(x - 3a)^2$$

---

mationer han var i stånd att utföra reducera sig i själfva verket till beräkningen af integralerna $\int_0^a x\,dx$ och $\int_0^a x^2\,dx$.

Väsentliga nya framsteg på integralkalkylens område äro att anteckna först från 1600-talet, och hafva vi här åter främst att nämna Descartes, Fermat, Pascal och Huyghens. Särskildt må omnämnas att Fermat beräknade integralen $\int x^n\,dx$ för godtyckliga värden af n (utom $n = -1$), och härvid använde det summationsförfarande af hvilket vi gjort bruk s. 342.

Flere af integralkalkylens metoder och resultat voro sålunda faktiskt kända före Newton och Leibniz. Men frånvaron af en lämplig och enhetlig beteckning omöjliggjorde på detta område, likasom i differentialkalkylen, en klar formulering af principerna och en systematisk framställning af de vunna resultaten.

Integraltecknet, likasom differentialbeteckningen, infördes af Leibniz. Benämningen integral härrör från Jacob Bernoulli.

som ligga mellan origo och punkten $x=3a$ på x-axeln, arean af den figur som begränsas af dessa bågar, samt ytan och volymen af den kropp som alstras af nämnda figur då den roterar kring x-axeln.

2) En cirkel roterar kring en i samma plan liggande axel som icke skär dess periferi. Beräkna ytan och volymen af den härvid alstrade ringformiga kroppen (jmf. uppgiften (4) s. 356).

3) Härled enligt (79) uttrycket för volymen af en ellipsoid.

4) Beräkna volymen af den kropp som begränsas af hyperboloiden $2x^2+3y^2-5z^2=1$ samt a) planen $z=0$ och $z=2$, b) planen $y=2z+1$ och $y=2z-1$.

5) I en kub inskrifvas tvenne skilda cylindrar, hvilkas axlar således skära hvarandra vinkelrätt. Beräkna volymen af den del af kuben som tillhör båda dessa cylindrar. (Denna uppgift löstes af ARCHIMEDES).

82. **Approximativ beräkning af bestämda integraler.** — Enligt satsen s. 426 kunna vi omedelbart angifva värdet af en bestämd integral $\int_a^b f(x)\,dx$ i händelse integralfunktionen till $f(x)$ kan uttryckas genom elementära funktioner[1]) (om nämligen dessa funktioners värden äro oss bekanta). Är detta icke fallet, måste man för att beräkna integralen tillgripa ett approximationsförfarande, eller s. k. *mekanisk kvadratur*.

Integralens definition ger oss en första metod för dess beräkning. För att erhålla integralens värde med ett fel $<\varepsilon$

---

[1]) Vi hafva i n° 77 sett att hvarje kontinuerlig funktion $f(x)$ har en kontinuerlig integralfunktion, hvilken, frånsedt en additiv konstant, representeras af den bestämda integralen $\int_a^x f(x)\,dx$, uppfattad såsom funktion af dess öfre gräns. Denna integral kan i vissa fall återföras till kända funktioner, men i allmänhet är detta icke möjligt och integralen definierar då en ny transcendent funktion. Exempel härpå gifva oss den s. k. *elliptiska* integralen

$$\int_a^u \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,du,$$

hvilken uppträder i uttrycket för ellipsbågens längd om den excentriska anomalin u väljes till parameter, samt integralen

$$\int_a^x \frac{dx}{\log x},$$

hvilken benämnes *integrallogaritmen*.

behöfva vi nämligen endast (jmf. s. 416) dela intervallen (a, b) i så små delar att oscillationen af $f(x)$ inom hvarje del är mindre än $\frac{\varepsilon}{|b-a|}$, samt för denna indelning bilda en summa af formen (41) s. 412, där talen ξ äro godtyckligt valda inom resp. delintervaller.

Beräkningen förenklas om delintervallerna väljas lika stora, i hvilket fall nämnda summa antar utseendet

$$h\big(f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)\big),$$

där $h=\frac{b-a}{n}$ och ξ_1 tillhör intervallen $(a, a+h)$, ξ_2 intervallen $(a+h, a+2h), \ldots, \xi_n$ intervallen $(a+(n-1)h, b)$. Vidare ligger det nära tillhands att välja dessa tal ξ så att

$$f(\xi_1)=\frac{f(a)+f(a+h)}{2}, \ldots, \quad f(\xi_n)=\frac{f(a+(n-1)h)+f(b)}{2},$$

hvilket är möjligt enär funktionen $f(x)$ antagits kontinuerlig (jmf. s. 38). Vi erhålla då såsom närmevärde för den gifna integralen följande uttryck:

$$(80) \quad h\Big(\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+(n-1)h)+\tfrac{1}{2}f(b)\Big).$$

Låtom oss antaga $b>a$ samt funktionen $f(x)$ positiv för $a<x<b$. Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ representerar då arean af den yta som begränsas af x-axeln, kurvan $y=f(x)$ samt dess ordinator i punkterna a och b. Närmevärdet (80) åter är lika med summan af alla de trapeziers areor hvilka begränsas af x-axeln, nämnda kurvas ordinator i punkterna $a, a+h, \ldots, a+(n-1)h, b$, samt de kordor som sammanbinda dessa ordinators ändpunkter. Ofvan angifna beräkningsmetod kan därför kort benämnas *trapezregeln*.

Såsom af denna geometriska tolkning framgår, erhålla vi närmevärdet (80) för integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ då vi dela (a, b) i n lika delar och inom hvarje delintervall ersätta kurvan $y=f(x)$ med dess motsvarande korda, eller, analytiskt uttryckt, om vi ersätta funktionen $f(x)$ med det polynom af

första graden hvilket antar samma värden som $f(x)$ i ändpunkterna af ifrågavarande delintervall.

Detta interpolationsförfarande kan tydligen generaliseras, och vi ledas härvid närmast till följande beräkningsmetod (jmf. n⁰ 11). Vi dela intervallen (a, b) i ett jämnt antal $2n$ delar, enhvar af längden $h = \frac{b-a}{2n}$, samt ersätta funktionen $f(x)$ inom intervallen $(a, a+2h)$ med det polynom $\varphi_1(x)$ af andra graden hvilket antar samma värden som $f(x)$ för $x = a, a+h, a+2h$[1]), inom intervallen $(a+2h, a+4h)$ med det polynom $\varphi_2(x)$ af andra graden hvilket antar samma värden som $f(x)$ för $x = a+2h$, $a+3h$, $a+4h$, o. s. v. Härigenom erhålla vi såsom närmevärde för den gifna integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ uttrycket

$$\int_a^{a+2h} \varphi_1(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} \varphi_2(x)\,dx + \cdots + \int_{a+(2n-2)h}^{b} \varphi_n(x)\,dx .$$

För att enklast beräkna detta uttrycks värde, göra vi i den första integralen substitutionen $x = a + h + ht$, i den andra substitutionen $x = a + 3h + ht$, o. s. v. Vid förstnämnda substitution motsvaras värdena $x = a, a+h, a+2h$ af värdena $t = -1, 0, 1$, och vi erhålla (jmf. s. 422)

$$\int_a^{a+2h} \varphi_1(x)\,dx = h \int_{-1}^{+1} \varphi_1(a+h+ht)\,dt .$$

Om funktionen $\varphi_1(a+h+ht)$ veta vi att den har formen

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

samt att den för $t = -1$ antar värdet $f(a)$, för $t = 0$ värdet $f(a+h)$ och för $t = 1$ värdet $f(a+2h)$. Dessa villkor gifva oss för koefficienterna α, β, γ värdena

$$\alpha = \frac{1}{2}\Big(f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h)\Big),$$

$$\beta = \frac{1}{2}\Big(f(a+2h) - f(a)\Big),$$

$$\gamma = f(a+h),$$

[1]) Geometriskt uttryckt, innebär detta att kurvan $y = f(x)$ inom nämnda intervall ersättes med den parabel, hvars axel är parallell med y-axeln och som går genom de punkter af kurvan hvilkas abskissor äro a, $a+h$, $a+2h$.

hvarur följer

$$\int_a^{a+2h} \varphi_1(x)\,dx = h\int_{-1}^{+1} (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\,dt = h\left(\frac{2}{3}\alpha + 2\gamma\right)$$

$$= \frac{h}{3}\Big(f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h)\Big) + 2hf(a+h)$$

$$= \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\Big).$$

På analogt sätt finner man

$$\int_{a+2h}^{a+4h} \varphi_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big(f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)\Big),$$

. . . . ,

$$\int_{a+(2n-2)h}^{b} \varphi_n(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big(f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h) + f(b)\Big).$$

Då dessa resultat sammanslås, erhålla vi för $\int_a^b f(x)\,dx$ följande approximativa värde:

$$\frac{h}{3}\left\{\Big(f(a)+f(b)\Big) + 4\Big(f(a+h)+f(a+3h)+\cdots+f(a+(2n-1)h)\Big) + 2\Big(f(a+2h)+f(a+4h)+\cdots+f(b)\Big)\right\}.$$

Denna beräkningsmetod benämnes SIMPSON's *regel*.

Öfningsuppgifter: Hvilka närmevärden erhållas för integralerna

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2 \quad \text{och} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

enligt trapezregeln och enligt SIMPSON's regel, om integrationsintervallerna successivt delas i 2, 4, 6, 10 lika stora delar?

Åttonde kapitlet.

Det reella talområdet.
Bevis för några tidigare använda hjälpsatser.

83. **Det irrationella talets definition.** — Utgående från de positiva hela talen eller de s. k. *naturliga* talen, utsträckes talbegreppet successivt i det man efterhand inför talet 0, de positiva brutna talen, samt de negativa hela och brutna talen. Dessa tal kallas med ett gemensamt namn *rationella* tal, och sammanfattningen af alla rationella tal benämnes *det rationella talområdet*. Vi förutsätta de rationella talen och operationerna med dessa tal såsom kända, och visa i detta och följande kapitel huru man vidare utsträcker talbegreppet genom att införa först de *irrationella* och därefter de *komplexa* talen.

Införandet af de s. k. irrationella talen framstår såsom nödvändigt redan på matematikens elementäraste stadier. Vi sågo sålunda i n⁰ 25 att diagonalen och sidan i en kvadrat icke hafva något gemensamt mått, och att det följaktligen icke finnes något rationellt tal som uttrycker dessa sträckors förhållande. Vilja vi icke, i likhet med EUKLIDES[1]), stanna vid att förklara att nämnda förhållande öfverhufvud icke kan uttryckas genom ett tal, måste vi utvidga det rationella talområdet, och i förevarande fall skapa ett nytt tal hvilket tilldelas egenskapen att, multipliceradt med sig själft, gifva till produkt talet 2, eller m. a. o. att satisfiera ekvationen

$$(1) \qquad x^2 = 2\,.$$

Vi skola här införa de irrationella talen på en rent logisk väg, utan att vädja till konkreta storheter, och ansluta

---

[1]) Jmf. EUKLIDES' *Elementa*, tionde boken, sjunde propositionen.

oss härvid till ett betraktelsesätt som först angifvits af DEDEKIND[1]) och senare självständigt utvecklats af J. TANNERY[2]).

Till grund för våra betraktelser lägga vi ekvationen (1). Denna har, såsom redan påpekades, ingen lösning inom det rationella talområdet. Om vi för x insätta ett godtyckligt rationellt tal, blir således ekvationens venstra membrum antingen mindre än eller större än dess högra membrum, och vi ledas sålunda helt naturligt till att dela de rationella talen, eller närmast de positiva rationella talen, i två klasser, sålunda att vi till den ena klassen föra de positiva rationella tal hvilkas kvadrater äro mindre än 2, till den andra klassen de hvilkas kvadrater äro större än 2. Vi komplettera ännu den förra klassen med talet 0 och de negativa rationella talen, och hafva härmed fördelat samtliga tal inom det rationella talområdet på två klasser, hvilka kort må benämnas den *undre* och den *öfre* klassen. Dessa klasser besitta följande karaktäristiska egenskaper:

(I). *Hvarje tal i den undre klassen är mindre än hvilket tal som helst i den öfre klassen.*

(II). *Det finnes icke något största tal i den undre klassen och icke något minsta tal i den öfre klassen.*

Riktigheten af det första påståendet inses omedelbart. Ty om b är ett godtyckligt tal i den öfre klassen och a ett positivt tal i den undre, är, enligt grunden för vår klassindelning, $a^2 < 2, b^2 > 2$, och således $a^2 < b^2$, hvaraf, då talen a och b båda äro positiva, följer $a < b$. Å andra sidan äro de tal i den undre klassen som äro < 0 självfallet mindre än talen i den öfre klassen, hvilka alla äro positiva.

Egenskapen (II) är likaledes lätt att påvisa. Vi betrakta först den undre klassen och välja i denna ett godtyckligt tal a. Det gäller att visa att det i samma klass finnes tal som äro större än a. Då vi veta att den undre klassen innehåller jämväl positiva tal, t. ex. talet 1, kunna vi antaga $a > 0$.

---

[1]) R. DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). Andra rent logiska teorier för de irrationella talen gåfvos omkring samma tid af GEORG CANTOR och WEIERSTRASS.

[2]) JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* (1886).

Vi välja ett positivt tal Δ som är < 1, och hafva då

$$(a+\Delta)^2 = a^2 + (2a+\Delta)\Delta < a^2 + (2a+1)\Delta.$$

Högra membrum är mindre än 2 så snart $\Delta < \frac{2-a^2}{2a+1}\cdot$ Om åt Δ gifves ett positivt rationellt värde som samtidigt uppfyller detta villkor och villkoret $\Delta < 1$, är alltså $(a+\Delta)^2 < 2$ och talet $a+\Delta$ hör till den undre klassen. Denna innehåller följaktligen tal större än a, h. s. b.

Vi betrakta nu den öfre klassen och välja i denna ett godtyckligt tal b. För $\Delta \neq 0$ är

$$(b-\Delta)^2 = b^2 - 2b\Delta + \Delta^2 > b^2 - 2b\Delta,$$

och $b^2 - 2b\Delta > 2$ så snart $\Delta < \frac{b^2-2}{2b}\cdot$ Om åt Δ gifves ett positivt rationellt värde som uppfyller detta villkor, hör således talet $b-\Delta$ till den öfre klassen, eftersom dess kvadrat är större än 2, och är mindre än det gifna talet b. Alltså finnes det icke något minsta tal i den öfre klassen.

Vi uppställa nu följande

Definition. — *Till hvarje indelning af samtliga rationella tal i två klasser, hvilka besitta egenskaperna (I) och (II), tillordnas ett nytt tal. Detta benämnes ett irrationellt tal.*

Vi beteckna allmänt med a ett tal i den undre och med b ett tal i den öfre klassen, och för själfva dessa klasser använda vi beteckningarna (a) och (b). Den klassindelning af de rationella talen, eller, för att använda DEDEKIND's eget uttryckssätt, det *snitt* af det rationella talområdet som definierar det irrationella talet, kan då åskådligt utmärkas medels symbolen

(2) $$(a)|(b).$$

Denna innebär således, om vi kort sammanfatta de ofvan gjorda förutsättningarna, 1⁰ att klasserna (a) och (b) tillsammans omfatta *alla* rationella tal, 2⁰ att hvarje tal a är mindre än hvarje tal b, samt 3⁰ att klassen (a) icke innehåller något största och klassen (b) icke något minsta tal.

Ur dessa egenskaper framgår att, om ett visst tal hör till klassen (a), hvarje mindre rationellt tal äfven ingår i

denna klass, samt att, om klassen (b) innehåller ett gifvet tal, den tillika innehåller alla större rationella tal.

För att förtydliga det ofvan sagda göra vi ännu följande anmärkning:

Om r är ett rationellt tal, kunna vi definiera ett snitt af det rationella talområdet sålunda, att vi till den undre klassen föra de rationella tal som äro mindre än r, till den öfre klassen de som äro större än r, samt talet r själft till någondera klassen, hvilket är nödvändigt om våra klasser tillsammans skola omfatta alla rationella tal. Den sålunda definierade klassindelningen besitter väl egenskapen (I), men *icke* egenskapen (II). Ty om r föres till den undre klassen, utgör r det största talet i denna klass, och föres r till den öfre klassen, har denna r såsom minsta tal.

Ett snitt af det rationella talområdet med egenskaperna (I) och (II) benämna vi kort *ett Dedekind'skt snitt.*

De rationella och de irrationella talen benämnas med ett gemensamt namn *reella* tal, och med *det reella talområdet* förstås sammanfattningen af alla reella tal.

Öfningsuppgifter:

1) Vi antaga att $(a)|(b)$ är ett Dedekind'skt snitt, och bilda en ny klassindelning af de rationella talen sålunda att vi till den undre klassen föra hvarje rationellt tal hvars motsatta tal hör till klassen (b), och till den öfre klassen hvarje tal hvars motsatta tal hör till (a). Bevisa att den sålunda erhållna klassindelningen, som kan betecknas $(-b)|(-a)$, jämväl utgör ett Dedekind'skt snitt.

2) Vi beteckna med n ett positivt helt tal och med r ett positivt rationellt tal som icke är lika med den n^{te} potensen af något rationellt tal, så att följaktligen ekvationen $x^n = r$ icke har någon lösning inom det rationella talområdet. Bevisa att den klassindelning som erhålles då man till den öfre klassen för hvarje positivt rationellt tal hvars n^{te} potens är större än r, och till den undre klassen alla öfriga rationella tal, utgör ett Dedekind'skt snitt.

84. **De reella talens inbördes ordning.** — Talen inom det rationella området hafva en bestämd inbördes ordning med afseende å storleken. Af tvenne olika rationella tal är det ena alltid *större* än det andra, som i sin tur är *mindre* än det första [1]), och för dessa begrepp *större* och *mindre* gäller

[1]) För dessa begrepp gäller inom det rationella talområdet definitionen: *a är större än b, om a är lika med summan af b och ett positivt tal.*

Om man vill uppbygga det rationella talområdet på rent logisk

den fundamentala regeln: *om a är större än b och b större än c, är äfven a större än c.* De rationella talen sägas på grund häraf bilda *en ordnad mängd.*

Vi gå nu att definiera talens inbördes ordning inom det reella talområdet, och hafva härvid främst att tilldela hvarje irrationellt tal en bestämd plats i förhållande till de rationella talen. Det betraktelsesätt som lagts till grund för de irrationella talens införande, leder helt naturligt till föjande definition.

Definition. — *Det irrationella tal, γ, som tillordnas ett Dedekind'skt snitt $(a)|(b)$, betraktas såsom större än hvarje tal i klassen (a), men mindre än hvarje tal i klassen (b).*

I enlighet härmed använda vi äfven det korta uttryckssättet: talet γ *åtskiljer* klasserna (a) och (b).

Speciellt är talet γ *positivt* eller större än noll om talet 0 hör till klassen (a), *negativt* eller mindre än noll om talet 0 hör till klassen (b).

Vi hafva vidare att definiera begreppen likhet resp. olikhet mellan tvenne irrationella tal γ och γ', definierade genom vissa Dedekind'ska snitt

$$(a)|(b) \text{ och } (a')|(b').$$

Om vi med hvarandra jämföra de undre klasserna (a) och (a') i dessa snitt, finna vi att följande tre fall kunna inträffa:

1°. Hvarje tal i klassen (a) ingår i (a'), och hvarje tal i (a') ingår omvändt i klassen (a). Klasserna (b) och (b') innehålla då äfven precis samma tal, och de två snitten äro följaktligen identiska. I detta fall definieras talen γ och γ' såsom *lika* (eller såsom samma tal).

2°. Klassen (a) innehåller ett tal r som icke ingår i (a'). Detta tal r hör då till klassen (b'), hvaraf vi sluta att talen i klassen (a') alla äro mindre än r och således alla ingå i klassen (a). Enligt den ofvan uppställda definitionen är i detta fall $\gamma > r$ och $r > \gamma'$, och om fundamentalregeln för

---

väg, återföras emellertid begreppen *större* och *mindre* till motsvarande begrepp för positiva hela tal, och dessa begrepp återföras i sin tur till *ordningsföljden* inom den naturliga talserien $1, 2, 3, \ldots$

olikheter skall bibehålla sin giltighet inom det reella talområdet, måste vi således definiera talet γ såsom *större än* γ'.

3⁰. Om fallet 2⁰ icke föreligger, och om klasserna (a) och (a') icke heller äro identiska såsom i fallet 1⁰, innehåller klassen (a') ett tal r' som icke ingår i (a) och som således hör till klassen (b). I detta fall är $\gamma' > r'$ och $r' > \gamma$, och enligt hvad ofvan framhållits böra vi alltså definiera γ' såsom *större än* γ.

Dessa tre fall äro de enda möjliga och hvart och ett af dem *utesluter* de två öfriga, d. v. s. två af nämnda fall kunna icke samtidigt inträffa, såsom af ofvanstående diskussion tydligt framgår.

Vi sammanfatta kort det sagda i följande

Definition. — *Två irrationella tal äro lika, om de snitt som definiera dem äro identiska.*

Ett irrationellt tal γ är större än ett annat γ', om det finnes ett rationellt tal som hör till den undre klassen i det snitt som definierar talet γ, men till den öfre klassen i det snitt som definierar talet γ'.

Vi hafva härmed definierat begreppen lika stor, större och mindre för hvilka två reella tal som helst, och skola nu visa att fundamentalregeln för olikheter, som ledde oss vid uppställandet af ofvanstående definitioner, på grund af dessa samma definitioner undantagslöst gäller inom det reella talområdet, och att de reella talen således bilda *en ordnad mängd* i samma mening som de rationella talen.

Vi hafva alltså att bevisa satsen:

Om $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ äro reella tal, och om $\gamma_1 > \gamma_2$ och $\gamma_2 > \gamma_3$, är äfven $\gamma_1 > \gamma_3$.

Vi utföra beviset för det fall att $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ alla äro irrationella tal, definierade genom vissa Dedekind'ska snitt, $(a_1)|(b_1)$, $(a_2)|(b_2)$ och $(a_3)|(b_3)$. Antagandet $\gamma_1 > \gamma_2$ innebär då att det finnes ett tal i klassen (a_1) som innehålles i klassen (b_2), eller m. a. o. att ett visst tal a_1 är lika med ett tal b_2; antagandet $\gamma_2 > \gamma_3$ åter innebär att det finnes ett visst tal a_2 som är lika med ett tal b_3. Vi hafva alltså

$$a_1 = b_2 > a_2 = b_3,$$

eller $a_1 > b_3$. Det betraktade talet a_1 ingår således i klassen (b_3), òch enligt vår definition är följaktligen $\gamma_1 > \gamma_3$, h. s. b.

Läsaren uppmanas att kontrollera riktigheten af ofvanstående sats i de fall då ett eller två af talen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ äro rationella, hvarvid definitionerna strängt böra fasthållas.

Mellan tvenne olika rationella tal finnes det alltid en oändlig mängd andra rationella tal. Ty om r_1 och r_2 äro tvenne olika rationella tal, utgör t. ex. deras aritmetiska medeltal $r_3 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ ett rationellt tal som ligger mellan dem; mellan r_1 och r_3 kunna vi likaså inskjuta dessa tals aritmetiska medeltal, mellan talen r_3 och r_2 deras medeltal, o. s. v. in infinitum.

För det reella talområdet kunna vi bevisa satsen:

Mellan två olika reella tal finnes det alltid såväl en oändlig mängd rationella tal som en oändlig mängd irrationella tal.

De gifna talen må vara γ_1 och $\gamma_2 (> \gamma_1)$. Mellan dessa tal kunna vi till en början inskjuta två rationella tal, r_1 och r_2, så att

$$\gamma_1 < r_1 < r_2 < \gamma_2.$$

Detta har redan visats för det fall att talen γ_1 och γ_2 båda äro rationella. Är det ena af dem rationellt och det andra irrationellt, följer riktigheten af vårt påstående omedelbart ur egenskapen (II) hos det Dedekind'ska snitt som definierar det senare talet. Om slutligen γ_1 och γ_2 båda äro irrationella, innebär antagandet $\gamma_2 > \gamma_1$ att det finnes ett rationellt tal r_1 som hör till den öfre klassen med afseende å γ_1 men till den undre klassen med afseende å γ_2, så att följaktligen $\gamma_1 < r_1 < \gamma_2$, och enligt nyssnämnda egenskap hos det Dedekind'ska snittet kunna vi vidare inskjuta ett rationellt tal r_2 mellan r_1 och γ_2.

Enligt hvad ofvan visats, finnes det en oändlig mängd rationella tal mellan r_1 och r_2. Alla dessa tal äro, enligt fundamentalregeln för olikheter, större än γ_1 men mindre än γ_2, och härmed är den förra delen af ofvanstående sats bevisad.

För att bevisa satsens senare del, är det enligt det sagda tillräckligt att ådagalägga att mellan två olika rationella tal, r och r', ligger *åtminstone ett* irrationellt tal.

Vi antaga r och r' positiva samt $r' > r$ (jmf. nedanstående öfningsuppgift (1)), och kunna då skrifva $r = \frac{m}{n}$, $r' - r = \frac{p}{q}$, där m, n, p, q äro positiva hela tal. Härur följer $r' = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$, samt vidare

$$r^2 = \frac{m^2q^2}{n^2q^2} < \frac{m^2q^2+1}{n^2q^2} < \left(\frac{mq+1}{nq}\right)^2 = \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{nq}\right)^2 \leqq r'^2.$$

Det rationella talet $\frac{m^2q^2+1}{n^2q^2}$, hvilket sålunda ligger mellan r^2 och r'^2, utgör icke kvadraten af något rationellt tal. Ty om så vore, kunde det sättas under formen $\left(\frac{s}{t}\right)^2$, där s och t äro hela tal, hvaraf skulle följa

$$m^2q^2 + 1 = \left(\frac{nqs}{t}\right)^2.$$

$\left(\frac{nqs}{t}\right)^2$ vore således ett helt tal, hvilket åter är möjligt blott om $\frac{nqs}{t}$ reducerar sig till ett dylikt tal, och m^2q^2+1 skulle följaktligen utgöra kvadraten af ett helt tal. Men detta är icke fallet, ty nämnda tal ligger mellan kvadraterna af de på hvarandra följande hela talen mq och $mq+1$.

Ekvationen

$$x^2 = \frac{m^2q^2+1}{n^2q^2}$$

har alltså icke någon lösning inom det rationella talområdet, och vi kunna följaktligen med stöd af densamma definiera ett Dedekind'skt snitt (jmf. uppgiften (2) s. 463), i det vi till den öfre klassen föra hvarje positivt rationellt tal hvars kvadrat är större än ekvationens högra membrum, och till den undre klassen alla öfriga rationella tal. Enligt ofvanstående olikheter hör talet r till den undre och talet r' till den öfre klassen, och det irrationella tal som definieras genom det betraktade snittet ligger således mellan r och r'.

Satsen s. 466 är härmed fullständigt bevisad. Ur det ofvan sagda kunna vi ännu härleda följande enkla sats, som vi flere gånger komma att använda:

Om två gifna reella tal, γ_1 *och* γ_2, *kunna inneslutas mellan två rationella tal hvilkas skillnad kan göras så liten man vill, äro de sinsemellan lika.*

Ty i annat fall kunde vi, enligt föregående sats, mellan γ_1 och γ_2 inskjuta två olika rationella tal, r_1 och $r_2 (> r_1)$. På grund af vårt antagande är det å andra sidan möjligt att innesluta γ_1 och γ_2 mellan två rationella tal, a och $b (> a)$, hvilkas skillnad $b - a$ är mindre än $r_2 - r_1$. Då r_1 och r_2 ligga mellan talen γ_1 och γ_2 och dessa i sin tur mellan a och b, följer emellertid ur fundamentalregeln för olikheter att r_1 och r_2 jämväl ligga mellan a och b, och att således $b - a > r_2 - r_1$, tvärt emot vår förutsättning. Denna motsägelse bevisar riktigheten af vårt påstående.

Öfningsuppgifter:

1) Bevisa att, om det irrationella tal som definieras genom snittet $(a)|(b)$ ligger mellan de rationella talen r och r', det genom snittet $(-b)|(-a)$ definierade irrationella talet ligger mellan $-r'$ och $-r$.

2) Vi beteckna med r_1 och $r_2 (> r_1)$ tvenne positiva rationella tal hvilka icke utgöra n^{te} potenser af rationella tal, så att ekvationerna $x^n = r_1$ och $x^n = r_2$ följaktligen icke hafva några lösningar inom det rationella talområdet, och bilda med stöd af dessa ekvationer tvenne Dedekind'ska snitt, $(a_1)|(b_1)$ och $(a_2)|(b_2)$ (jmf. uppgiften (2) s. 463), hvilka definiera hvar sitt irrationella tal, γ_1 och γ_2. Bevisa att $\gamma_1 < \gamma_2$.

85. **Additionen och subtraktionen inom det reella talområdet.** — Vi antaga reglerna för räkneoperationerna inom det rationella talområdet såsom bekanta, och föresätta oss att definiera operationerna inom vårt utvidgade reella talområde på sådant sätt, att nämnda regler såvidt möjligt komma att bibehålla sin giltighet.

1°. Vi göra början med additionen, och betrakta först det fall då den ena addenden är ett irrationellt tal γ, definieradt genom det Dedekind'ska snittet $(a)|(b)$, och den andra addenden ett rationellt tal r.

Talet γ är, enligt våra definitioner, större än hvarje tal

i klassen (a) men mindre än hvarje tal i klassen (b). Nu gäller för additionen inom det rationella talområdet följande sats: *om* $r_1 > r_2$, *är äfven* $r_1 + r > r_2 + r$. Skall denna sats bibehålla sin giltighet inom vårt utvidgade talområde, böra vi alltså uppställa en sådan definition för summan $\gamma + r$ att dess värde kommer att vara större än $a + r$ men mindre än $b + r$, huru än talen a och b väljas inom sina resp. klasser.

Vi ledas således till att betrakta de rationella talklasserna

$$(a + r) \text{ och } (b + r),$$

af hvilka den förra innehåller hvarje tal som erhålles genom addition af ett tal i klassen (a) och talet r, den senare hvarje tal som är lika med summan af ett tal i klassen (b) och talet r.

Dessa klasser omfatta tillsammans *alla* rationella tal. Ty om r' är ett godtyckligt valdt rationellt tal, är skillnaden $r' - r$ äfven ett rationellt tal och innehålles således antingen i klassen (a) eller i klassen (b); i förra fallet har talet r' formen $a + r$, i senare fallet formen $b + r$.

Då vidare hvarje tal a är mindre än hvarje tal b, är enligt den ofvan citerade satsen hvarje tal i klassen $(a + r)$ mindre än hvilket tal som helst i klassen $(b + r)$.

Slutligen finnes det intet största tal i klassen $(a + r)$ och intet minsta tal i klassen $(b + r)$, eftersom klassen (a) icke innehåller något största och klassen (b) icke något minsta tal.

Alltså utgör klassindelningen

$$(3) \qquad (a + r) \,|\, (b + r)$$

ett Dedekind'skt snitt och definierar följaktligen ett irrationellt tal, och detta tal är, enligt våra definitioner, större än hvarje tal $a + r$ och mindre än hvarje tal $b + r$. Enligt hvad ofvan sagts, böra vi således för summan $\gamma + r$ uppställa följande

Definition. — *Med summan af det irrationella tal,* γ, *som definieras genom snittet* $(a)|(b)$, *och det rationella talet* r, *förstås det genom snittet* (3) *definierade irrationella talet.*

Ett analogt resonemang leder oss till att definiera sum-

man $r+\gamma$ genom snittet $(r+a)|(r+b)$. Men detta är identiskt med snittet (3), och vi erhålla således $r+\gamma=\gamma+r$.

Enligt ofvanstående definition är speciellt $\gamma+0=0+\gamma=\gamma$.

2°. Vi gå till additionen af tvenne irrationella tal, γ och γ', definierade genom de Dedekind'ska snitten

$$(a)|(b) \text{ och } (a')|(b').$$

Genom att resonera såsom ofvan finna vi att summan $\gamma+\gamma'$, såvida tidigare regler skola bibehålla sin giltighet, bör definieras så att dess värde kommer att vara större än hvarje tal af formen $a+a'$ men mindre än hvarje tal af formen $b+b'$. Vi hafva således här att betrakta de rationella talklasserna

$$(a+a') \text{ och } (b+b'). \tag{4}$$

Man konstaterar omedelbart att hvarje tal i den förra klassen är mindre än hvarje tal i den senare, samt att den förra klassen icke innehåller något största och den senare icke något minsta tal. Men vi böra främst undersöka om klasserna (4) tillsammans omfatta *hela* det rationella talområdet, eller om det finnes rationella tal som icke ingå i någon af dem.

Om det finnes ett dylikt rationellt tal, r, är detta säkert större än hvarje tal i klassen $(a+a')$. Ty vore r mindre än ett visst tal $a+a'$ i denna klass, kunde man skrifva

$$r=a+a'-\Delta=(a-\Delta)+a',$$

där Δ betecknar ett positivt rationellt tal. Då talet $a-\Delta$ hör till klassen (a), vore r således lika med summan af ett tal i denna klass och ett tal i klassen (a'), hvilket strider mot vårt antagande. På analogt sätt inses att talet r är mindre än hvilket tal som helst i klassen $(b+b')$.

Vi sluta häraf att det på sin höjd kan finnas *ett* rationellt tal som icke ingår i någon af klasserna (4). Om det funnes två sådana tal, r_1 och r_2 $(>r_1)$, skulle man nämligen enligt det ofvan sagda hafva $a+a'<r_1<r_2<b+b'$, och således $(b+b')-(a+a')>r_2-r_1$, eller ännu

$$(b-a)+(b'-a')>r_2-r_1,$$

hvilken olikhet skulle bestå huru än talen a, b, a', b' valdes inom sina resp. klasser. Denna slutsats innebär emellertid en motsägelse, ty vi kunna välja nämnda tal så att differenserna $b-a$ och $b'-a'$ båda äro mindre än $\frac{r_2-r_1}{2}$, och deras summa är då mindre än r_2-r_1 [1]).

Följande enkla exempel visar oss att det verkligen kan finnas ett rationellt tal som icke ingår i någon af klasserna (4). Om γ är ett irrationellt tal, definieradt genom snittet $(a)|(b)$, uppfyller såsom vi sett jämväl klassindelningen

$$(-b)|(-a)$$

villkoren för ett Dedekind'skt snitt och definierar således ett irrationellt tal, hvilket tillsvidare må betecknas med $\bar{\gamma}$. Då ofvanstående betraktelser tillämpas på talen γ och $\bar{\gamma}$, antaga klasserna (4) formen $(a-b)$ och $(b-a)$. Hvarje tal i den förra klassen är negativt, hvarje tal i den senare klassen positivt, och talet 0 ingår således icke i någondera klassen.

I det vi återvända till våra allmänna betraktelser, kunna vi således utsäga följande resultat:

Antingen finnes det *ett* rationellt tal r som icke hör till någon af klasserna (4), och detta tal är då större än hvarje tal i klassen $(a+a')$ och mindre än hvarje tal i klassen $(b+b')$; eller finnes det intet dylikt rationellt tal, och i detta fall uppfyller klassindelningen (4) villkoren för ett Dedekind'skt snitt och definierar således ett irrationellt tal, γ'', hvilket på grund af våra definitioner är större än hvarje tal $a+a'$ och mindre än hvarje tal $b+b'$.

---

[1]) Om $(a)|(b)$ är ett Dedekind'skt snitt, kan man alltid välja ett tal a och ett tal b så att skillnaden $b-a$ är lika med ett gifvet, godtyckligt litet positivt rationellt tal Δ. För detta ändamål kan man t. ex. bland de heltaliga multiplerna af talet Δ,

$$\ldots, -3\Delta, -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots,$$

hvilka höra dels till klassen (a), dels till klassen (b), utvälja den sista som ingår i klassen (a). Betecknas denna med $n\Delta$, hör den följande multipeln $(n+1)\Delta$ till klassen (b), och skillnaden mellan dessa tal är lika med Δ.

För att tidigare regler skola bibehålla sin giltighet, böra vi således i förra fallet definiera summan $\gamma + \gamma'$ genom det rationella talet r, i senare fallet genom det irrationella talet γ''. I båda fallen åtskiljer talet $\gamma + \gamma'$ klasserna (4) och är entydigt bestämdt genom detta villkor.

Vi sammanfatta det sagda i följande

Definition. — *Med summan af de irrationella tal som definieras genom de Dedekind'ska snitten*

$$(a)|(b) \quad och \quad (a')|(b')$$

förstås det entydigt bestämda reella tal som åtskiljer talklasserna $(a + a')$ *och* $(b + b')$.

Vi göra ännu en anmärkning som är af vikt för den följande framställningen. Om γ_1 och γ_2 äro godtyckliga reella tal och a_1, b_1, a_2, b_2 rationella tal som uppfylla villkoren

$$a_1 < \gamma_1 < b_1, \quad a_2 < \gamma_2 < b_2,$$

gäller för summan $\gamma_1 + \gamma_2$ olikheterna

$$a_1 + a_2 < \gamma_1 + \gamma_2 < b_1 + b_2.$$

Om talen γ_1 och γ_2 båda äro rationella, följer detta ur reglerna för olikheter inom det rationella talområdet. Har det ena af talen, t. ex. γ_2, ett rationellt värde r medan det andra γ_1 är irrationellt, är summan $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + r$ enligt sin definition större än $a_1 + r$ och mindre än $b_1 + r$, och således *a fortiori* större än $a_1 + a_2$ och mindre än $b_1 + b_2$, eftersom enligt antagandet $a_2 < r < b_2$. Om slutligen talen γ_1 och γ_2 båda äro irrationella, följer vårt påstående direkt ur definitionen för deras summa.

3°. Vi skola främst kontrollera att den regel för olikheter, som ledde oss vid uppställandet af ofvanstående definitioner, numera är allmänt tillämplig inom det reella talområdet, eller att således följande sats gäller:

Om $\gamma, \gamma', \gamma''$ *äro godtyckliga reella tal och om* $\gamma' > \gamma''$, *är äfven* $\gamma + \gamma' > \gamma + \gamma''$.

Mellan γ' och γ'' inskjuta vi två rationella tal, r_1 och r_2 $(< r_1)$, så att

$$\gamma' > r_1 > r_2 > \gamma'',$$

samt välja härefter två andra rationella tal, a och b, så att $a < \gamma < b$ samt $b - a < r_1 - r_2$ (jmf. noten s. 471). Denna sista olikhet kan skrifvas $a + r_1 > b + r_2$.

Ur olikheterna $\gamma > a$ och $\gamma' > r_1$ sluta vi, enligt anmärkningen på föregående sida, att $\gamma + \gamma' > a + r_1$. Då $b > \gamma$ och $r_2 > \gamma''$, är likaså $b + r_2 > \gamma + \gamma''$. Vi hafva således

$$\gamma + \gamma' > a + r_1, \quad a + r_1 > b + r_2, \quad b + r_2 > \gamma + \gamma'',$$

och enligt den s. 465 bevisade fundamentalregeln för olikheter följer härur $\gamma + \gamma' > \gamma + \gamma''$, h. s. b.

Ur ofvanstående sats följer speciellt att, om talet γ' är positivt, man har $\gamma + \gamma' > \gamma + 0$, eller $\gamma + \gamma' > \gamma$.

4⁰. För additionen inom det rationella talområdet gäller såsom kändt den viktiga satsen, att en summa af ett ändligt antal termer icke ändrar sitt värde om termernas ordning godtyckligt förändras, eller om de sammanfattas i grupper och termerna inom hvarje enskild grupp hopadderas. Vi skola visa att, enligt de definitioner vi uppställt, denna sats allmänt gäller inom det reella talområdet.

För detta ändamål är det tillräckligt om vi bevisa giltigheten af följande speciellare satser, af hvilka den ofvanstående som kändt utgör en följd [1]):

---

[1]) För att bevisa att värdet af summan

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

är oberoende af termernas ordning, är det tillräckligt att visa att summans värde icke förändras om man låter två godtyckliga på hvarandra följande termer byta plats. Ty genom att upprepadt använda detta förfarande kan man få termerna att intaga hvilken föreskrifven ordning som helst.

För att t. ex. visa att värdet af S icke förändras om a_μ och $a_{\mu+1}$ byta plats, betrakta vi summan af de $\mu + 1$ första termerna i S. Om vi allmänt sätta $a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu = S_\nu$, kan nämnda summa skrifvas

$$S_{\mu+1} = S_{\mu-1} + a_\mu + a_{\mu+1}.$$

(I). *Additionens kommutationslag*: $a+b=b+a$.

(II). *Additionens associationslag*: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Vi påpekade redan s. 470 att kommutationslagen gäller om den ena addenden är ett rationellt och den andra ett irrationellt tal. Denna lag är äfven giltig om båda addenderna äro irrationella tal. Ty om vi beteckna dessa tal med γ och γ' och de Dedekind'ska snitt hvilka definiera dem med $(a)|(b)$ och $(a')|(b')$, utgör enligt våra definitioner $\gamma+\gamma'$ det entydigt bestämda reella tal som åtskiljer klasserna $(a+a')$ och $(b+b')$, och $\gamma'+\gamma$ det tal som åtskiljer klasserna $(a'+a)$ och $(b'+b)$. Men $a'+a=a+a'$ och $b'+b=b+b'$, då ju kommutationslagen gäller för rationella tal; klasserna $(a'+a)$ och $(b'+b)$ äro således identiska med klasserna $(a+a')$ och $(b+b')$, och $\gamma'+\gamma$ är följaktligen samma tal som $\gamma+\gamma'$.

Vi skola nu visa att associationslagen gäller allmänt, d. v. s. att

$$(\gamma+\gamma')+\gamma''=\gamma+(\gamma'+\gamma''),$$

$\gamma, \gamma', \gamma''$ må vara hvilka reella tal som helst.

Vi beteckna med a, b, a', b', a'', b'' godtyckliga rationella tal som uppfylla villkoren

$$a<\gamma<b, \quad a'<\gamma'<b', \quad a''<\gamma''<b''.$$

Enligt associationslagen, som vi antaga giltig, följer härur

$$S_{\mu+1}=S_{\mu-1}+(a_\mu+a_{\mu+1}).$$

Om äfven kommutationslagen gäller, är $a_\mu+a_{\mu+1}=a_{\mu+1}+a_\mu$, och således, om vi än en gång tillämpa associationslagen,

$$S_{\mu+1}=S_{\mu-1}+(a_{\mu+1}+a_\mu)=S_{\mu-1}+a_{\mu+1}+a_\mu.$$

Härur följer, då vi till båda membra efterhand addera $a_{\mu+2}, a_{\mu+3}, \ldots, a_n$,

$$S=a_1+\cdots+a_{\mu-1}+a_{\mu+1}+a_\mu+a_{\mu+2}+\cdots+a_n,$$

hvilket är den sökta likheten.

Att värdet af summan S icke ändras om en viss grupp termer adderas, inses nu omedelbart om man ordnar termerna i S så, att de termer hvilka ingå i den betraktade gruppen komma att stå främst.

Enligt den anmärkning vi s. 472 gjorde beträffande summan af två reella tal, följer härur

$$a + a' < \gamma + \gamma' < b + b'$$

och vidare

$$(a + a') + a'' < (\gamma + \gamma') + \gamma'' < (b + b') + b'',$$

och på samma sätt erhålles

$$a + (a' + a'') < \gamma + (\gamma' + \gamma'') < b + (b' + b'').$$

Men $a + (a' + a'') = (a + a') + a''$ och $b + (b' + b'') = (b + b') + b''$, eftersom associationslagen gäller för rationella tal, och talen

$$(\gamma + \gamma') + \gamma'' \quad \text{och} \quad \gamma + (\gamma' + \gamma'')$$

ligga således båda mellan gränserna

$$a + a' + a'' \quad \text{och} \quad b + b' + b''.$$

Då nu talen a, b, a', b', a'', b'' kunna väljas så att differenserna $b - a, b' - a', b'' - a''$ blifva godtyckligt små (jmf. noten s. 471), kan äfven skillnaden mellan nyssnämnda gränser göras så liten man vill, och enligt den s. 468 bevisade satsen är således $(\gamma + \gamma') + \gamma'' = \gamma + (\gamma' + \gamma'')$, h. s. b.

5°. Vi gå till *subtraktionen*, och skola visa att skillnaden mellan tvenne gifna reella tal, γ' och γ, alltid är fullt bestämd, d. v. s. att det finnes ett och endast ett reellt tal som, adderadt till γ, ger till summa γ', eller m. a. o. som satisfierar ekvationen

(5) $$\gamma' = \gamma + x.$$

Att denna ekvation icke kan hafva flere lösningar, följer omedelbart ur den under momentet 3° bevisade satsen. Ty om x_1 och x_2 äro två olika reella tal, hafva enligt nämnda sats jämväl summorna $\gamma + x_1$ och $\gamma + x_2$ olika värden och kunna således icke båda vara lika med γ'.

För att visa att det verkligen finnes en lösning till

ekvationen (5), betrakta vi först det fall då $\gamma' = 0$ och ekvationen således har formen

$$(5)' \qquad \gamma + x = 0 .$$

Vi antaga härvid att γ är ett irrationellt tal, definieradt genom ett Dedekind'skt snitt $(a)|(b)$.

Klassindelningen $(-b)|(-a)$ utgör då äfven ett Dedekind'skt snitt, såsom redan framhållits, och definierar alltså ett irrationellt tal $\bar{\gamma}$. Detta tal ger oss lösningen till ekvationen $(5)'$. Ty med summan $\gamma + \bar{\gamma}$ förstås, enligt vår definition, det reella tal som åtskiljer talklasserna $(a-b)$ och $(b-a)$. Då nu hvarje tal i den förra klassen är negativt och hvarje tal i den senare positivt, åtskiljas dessa klasser af talet 0, och således är $\gamma + \bar{\gamma} = 0$.

Talet $\bar{\gamma}$, som är tillordnadt snittet $(-b)|(-a)$, utgör således det *motsatta* talet till det genom snittet $(a)|(b)$ definierade talet γ, och betecknas på grund häraf med $-\gamma$. Omvändt utgör γ det motsatta talet till $-\gamma$, ty enligt kommutationslagen är $(-\gamma) + \gamma = \gamma + (-\gamma) = 0$.

Vi kunna nu äfven lösa ekvationen (5) för godtyckliga reella värden af γ och γ'. Ty då $\gamma + (-\gamma) = 0$, är enligt additionens associationslag

$$\gamma + ((-\gamma) + \gamma') = (\gamma + (-\gamma)) + \gamma' = 0 + \gamma' = \gamma',$$

och ekvationen (5) satisfieras följaktligen af talet

$$x = (-\gamma) + \gamma' = \gamma' + (-\gamma).$$

Skillnaden $\gamma' - \gamma$ mellan de reella talen γ' och γ är således entydigt bestämd, och lika med summan af minuenden γ' och subtrahendens motsatta tal $-\gamma$.

Öfningsuppgifter. — Bevisa följande satser, med strängt fasthållande vid de ofvan uppställda definitionerna:

1) Om additionens kommutationslag och associationslag antagas giltiga, gälla äfven likheterna

$$a + b + c + d = d + b + a + c,$$

$$a + b + c + d = (c + b) + (d + a).$$

2) Om $\gamma' > \gamma$, är skillnaden $\gamma' - \gamma$ positiv och talet γ' således lika med summan af talet γ och ett positivt tal (jmf. noten s. 463).

3) $-(\gamma + \gamma') = -\gamma - \gamma'$.

4) Om γ och γ' äro reella tal, och om med (a) och (b) betecknas de rationella talklasser som åtskiljas af γ samt med (a') och (b') de klasser som åtskiljas af γ', är skillnaden $\gamma' - \gamma$ större än hvarje tal af formen $a' - b$ men mindre än hvarje tal af formen $b' - a$, och är entydigt bestämd genom dessa villkor.

86. **Multiplikationen och divisionen inom det reella talområdet.** — Efter den utförliga framställning vi gifvit af additionen och subtraktionen, kunna vi i det följande fatta oss kortare och åt läsaren öfverlemna att utföra detaljerna i bevisen.

1°. För att förenkla framställningen betrakta vi först en produkt af tvenne positiva tal, och uppställa åter skilda definitioner för de fall då endast ett af talen eller båda två äro irrationella.

Definition. — *Om γ är ett positivt irrationellt tal, definieradt genom det Dedekind'ska snittet $(a)|(b)$, och r ett positivt rationellt tal, förstås med produkten $\gamma r = r\gamma$ det genom snittet*

$$(ar)|(br)$$

definierade irrationella talet.

Läsaren bör bevisa att nämnda klassindelning verkligen utgör ett Dedekind'skt snitt, hvartill erfordras 1° att klasserna (ar) och (br) tillsammans omfatta *alla* rationella tal, 2° att hvarje tal ar är mindre än hvarje tal br, samt 3° att det icke finnes något största tal i klassen (ar) och icke något minsta tal i klassen (br).

Definition. — *Om γ och γ' äro tvenne positiva irrationella tal, definierade genom snitten*

$$(a)|(b) \quad och \quad (a')|(b'),$$

i hvilkas undre klasser vi denna gång medtaga endast dithörande positiva tal, förstås med produkten $\gamma\gamma'$ det entydigt bestämda reella tal som åtskiljer talklasserna

$$(aa') \quad och \quad (bb').$$

Man har här att visa att nämnda klasser tillsammans omfatta alla positiva rationella tal, möjligen med undantag af *ett* tal, som då är större än hvarje tal aa' och mindre än hvarje tal bb'. Om det finnes ett dylikt rationellt tal r, är enligt vår definition $\gamma\gamma' = r$; i annat fall definierar klassindelningen $(aa')|(bb')$ ett irrationellt tal, som då utgör vår definition för produkten $\gamma\gamma'$.

2°. Vi utsträcka härefter multiplikationen till negativa tal i det vi låta de kända teckenreglerna fortfarande gälla, och uppställa således följande *definitioner*:

(6) $\gamma(-\gamma') = -\gamma\gamma', (-\gamma)\gamma' = -\gamma\gamma', (-\gamma)(-\gamma') = \gamma\gamma'.$

Härvid beteckna $\gamma, \gamma', \gamma''$ positiva reella tal, men man kontrollerar omedelbart att likheterna (6) gälla oberoende af dessa tals tecken.

Slutligen hafva vi ännu att betrakta produkten af ett irrationellt tal γ och talet 0, för hvilken vi uppställa *definitionen*:

(7) $$\gamma . 0 = 0, \quad 0 . \gamma = 0.$$

Härmed hafva vi entydigt definierat produkten af hvilka två reella tal som helst. Ur våra definitioner framgår att *produkten har värdet noll blott om en af faktorerna är* 0.

3°. Vi veta att, inom det rationella talområdet, en produkt af ett ändligt antal faktorer bibehåller sitt värde oförändradt om man ändrar faktorernas ordning, eller om man sammanför dem i grupper och hopmultiplicerar faktorerna inom hvarje enskild grupp. Vidare får, inom nämnda talområde, produkten af tvenne summor med ett ändligt antal termer bildas sålunda, att hvarje term i den ena summan multipliceras med hvarje term i den andra och alla sålunda erhållna partialprodukter adderas.

Dessa viktiga egenskaper hos multiplikationen återföras som kändt till följande enkla satser:

(I). *Multiplikationens kommutationslag*: $ab = ba$.

(II). *Multiplikationens associationslag*: $(ab)c = a(bc)$.

(III). *Multiplikationens distributionslag*: $a(b + c) = ab + ac$.

Om vi bevisat att dessa satser bibehålla sin giltighet inom det reella talområdet, kunna vi således omedelbart sluta att multiplikationen inom detta område äfven besitter ofvannämnda allmänna egenskaper.

Ur de ofvan gifna definitionerna följer direkt att kommutationslagen allmänt gäller inom det reella talområdet. För att bevisa de två senare lagarnas giltighet, är det enklast att stödja sig på följande hjälpsats, som omedelbart framgår ur våra definitioner: Om γ och γ' äro godtyckliga positiva reella tal och a, b, a', b' positiva rationella tal som uppfylla villkoren $a < \gamma < b, a' < \gamma' < b'$, gäller för produkten $\gamma\gamma'$ olikheterna $aa' < \gamma\gamma' < bb'$.

Vi skola här kontrollera giltigheten af distributionslagen:

$$(8) \qquad \gamma(\gamma' + \gamma'') = \gamma\gamma' + \gamma\gamma''.$$

Vi antaga först att talen $\gamma, \gamma', \gamma''$ alla äro positiva och beteckna med a, b, a', b', a'', b'' godtyckliga positiva rationella tal som uppfylla villkoren

$$a < \gamma < b, \quad a' < \gamma' < b', \quad a'' < \gamma'' < b''.$$

Ur ofvananförda hjälpsats och den analoga satsen för additionen (jmf. s. 472) kunna vi då successivt sluta:

$$a' + a'' < \gamma' + \gamma'' < b' + b'',$$

$$a(a' + a'') < \gamma(\gamma' + \gamma'') < b(b' + b''),$$

och likaså

$$aa' < \gamma\gamma' < bb', \quad aa'' < \gamma\gamma'' < bb'',$$

$$aa' + aa'' < \gamma\gamma' + \gamma\gamma'' < bb' + bb''.$$

Då distributionslagen gäller för rationella tal, är $a(a' + a'') = aa' + aa''$ och $b(b' + b'') = bb' + bb''$, och vi se således att talen $\gamma(\gamma' + \gamma'')$ och $\gamma\gamma' + \gamma\gamma''$ båda ligga mellan gränserna $a(a' + a'')$ och $b(b' + b'')$. Men då, såsom redan flere gånger framhållits, skillnaderna $b - a$, $b' - a'$, $b'' - a''$ kunna väljas godtyckligt små, kan man äfven göra skillnaden mellan nämnda gränser mindre än hvilket föreskrifvet positivt tal som helst, och enligt den s. 468 bevisade satsen är således $\gamma(\gamma' + \gamma'') = \gamma\gamma' + \gamma\gamma''$, h. s. b.

Med stöd definitionerna (6) och (7) samt öfningssatsen (3) s. 477, kan man nu vidare sluta att likheten (8) gäller i alla de fall då talen γ' och γ'' hafva samma tecken eller något af dem har värdet 0, hvilket läsaren bör kontrollera.

Det återstår således endast att visa att ifrågavarande likhet består jämväl om γ' och γ'' hafva motsatta tecken. Genom att, om så behöfves, ändra tecknen för båda membra, kan man i detta fall bringa likheten under formen

$$(8)' \qquad \gamma_1(\gamma_2-\gamma_3)=\gamma_1\gamma_2-\gamma_1\gamma_3,$$

där $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ äro positiva reella tal och $\gamma_2>\gamma_3$. Vi sätta $\gamma_2-\gamma_3=\gamma_4$ eller $\gamma_2=\gamma_3+\gamma_4$, hvarvid γ_4 är ett positivt tal (jmf. uppgiften (2) s. 477), och erhålla då

$$\gamma_1(\gamma_2-\gamma_3)=\gamma_1\gamma_4,$$

samt å andra sidan, då distributionslagen redan bevisats för det fall att alla tre talen äro positiva,

$$\gamma_1\gamma_2-\gamma_1\gamma_3=\gamma_1(\gamma_3+\gamma_4)-\gamma_1\gamma_3=\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4-\gamma_1\gamma_3=\gamma_1\gamma_4.$$

Likheten (8)′ är således riktig, och distributionslagen är härmed allmänt bevisad.

4⁰. Med stöd af distributionslagen bevisas följande sats:

Om $\gamma_2>\gamma_3$ *och* $\gamma_1>0$, *är äfven* $\gamma_1\gamma_2>\gamma_1\gamma_3$.

Ty vi kunna skrifva $\gamma_2=\gamma_3+\gamma_4$, där γ_4 är ett positivt tal, och erhålla då enligt nämnda lag

$$\gamma_1\gamma_2=\gamma_1(\gamma_3+\gamma_4)=\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4,$$

hvaraf, då $\gamma_1\gamma_4>0$, följer $\gamma_1\gamma_2>\gamma_1\gamma_3$.

Härur erhålles vidare följande korollarium, af hvilket vi redan tidigare gjort bruk (jmf. s. 280):

Om Δ *och* M *äro positiva reella tal, af hvilka* Δ *kan väljas så litet och* M *så stort man vill, finnes det alltid ett sådant positivt helt tal* n, *att*

$$n\Delta>M.$$

Vi välja ett positivt rationellt tal r som är mindre än Δ, samt ett helt tal N som är större än M. Talet r kan skrifvas under formen $\frac{p}{q}$, där p och q äro positiva hela tal. Om vi då sätta $n = qN$, erhålla vi med stöd af ofvanstående sats

$$n\Delta > nr = qN \cdot \frac{p}{q} = Np \geqq N > M,$$

hvarmed påståendet är bevisadt.

5⁰. Vi gå till uppgiften att *dividera* ett gifvet reellt tal γ' med ett annat reellt tal γ, d. v. s. att söka ett tredje tal som, multipliceradt med γ, ger till produkt γ', eller m. a. o. som satisfierar ekvationen

$$\gamma' = \gamma x. \tag{9}$$

Om $\gamma = 0$, har högra membrum alltid värdet noll, x må vara hvilket reellt tal som helst, och ekvationen har således icke någon lösning såframt icke samtidigt $\gamma' = 0$, i hvilket fall den är satisfierad för hvarje reellt tal x. Divisionen är således icke möjlig om divisorn är 0, utom då dividenden samtidigt försvinner, i hvilket fall kvoten är alldeles obestämd.

Vi antaga härefter $\gamma \neq 0$, och anmärka främst att ekvationen (9) då icke kan hafva mer än en lösning. Ty om x_1 och x_2 äro två olika reella tal och $\gamma \neq 0$, kunna vi ur den på föregående sida bevisade satsen sluta att jämväl produkterna γx_1 och γx_2 hafva olika värden.

För att visa att det, då $\gamma \neq 0$, verkligen finnes en lösning till ekvationen (9), är det enklast att först betrakta det fall då $\gamma' = 1$ och γ är ett positivt irrationellt tal, definieradt genom ett Dedekind'skt snitt $(a)|(b)$. Nämnda ekvation antar då formen

$$\gamma x = 1. \tag{9'}$$

I det vi i klassen (a) medtaga endast de positiva tal som höra till densamma, bilda vi de rationella talklasserna

$$\left(\frac{1}{b}\right) \text{ och } \left(\frac{1}{a}\right),$$

och komplettera den förra klassen med talet 0 och de negativa rationella talen. Den sålunda erhållna klassindelningen utgör ett Dedekind'skt snitt, hvilket läsaren bör kontrollera, och definierar alltså ett irrationellt tal, som tillsvidare må betecknas med $\bar{\gamma}$. Detta tal är positivt, ty talet 0 hör till den undre klassen.

Produkten af talen γ och $\bar{\gamma}$ utgöres, enligt definitionen s. 477, af det entydigt bestämda reella tal som åtskiljer talklasserna $\left(\frac{a}{b}\right)$ och $\left(\frac{b}{a}\right)$. Men detta tal är 1, ty hvarje tal a är mindre än hvarje tal b, och då endast de positiva talen i klassen (a) medtagits, är således hvarje tal i klassen $\left(\frac{a}{b}\right)$ mindre än 1 och hvarje tal i klassen $\left(\frac{b}{a}\right)$ större än 1. Alltså är $\gamma . \bar{\gamma} = 1$, och talet $\bar{\gamma}$ utgör följaktligen rot till ekvationen (9)', hvarför vi härefter för detta tal använda beteckningen $\frac{1}{\gamma}$, i analogi med det beteckningssätt som användes inom det rationella talområdet.

Vi antaga nu att γ och γ' i ekvationen (9) äro godtyckliga positiva reella tal. I detta fall utgör

$$x = \gamma' \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \cdot \gamma'$$

en lösning till ekvationen, ty enligt associationslagen är

$$\gamma x = \gamma\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \gamma'\right) = \left(\gamma \cdot \frac{1}{\gamma}\right)\gamma' = 1 . \gamma' = \gamma'.$$

Kvoten $\frac{\gamma'}{\gamma}$ af talen γ' och γ är således lika med produkten $\gamma' \cdot \frac{1}{\gamma}$, där $\frac{1}{\gamma}$ är det ofvan definierade talet.

Med stöd af multiplikationens teckenregler utsträckes divisionen härefter omedelbart till de fall då det ena af talen γ och γ' eller båda två äro negativa. Man finner sålunda, om γ_1 och γ_2 beteckna positiva reella tal, att kvoten $\frac{\gamma_2}{-\gamma_1}$, d. v. s. roten till ekvationen $(-\gamma_1)x = \gamma_2$, är lika med $-\left(\gamma_2 \cdot \frac{1}{\gamma_1}\right) = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, ty enligt nämnda teckenregler är

$$(-\gamma_1)\cdot\left(-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)=\gamma_1\cdot\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\gamma_2.$$

På samma sätt erhålles $\frac{-\gamma_2}{\gamma_1}=-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ samt $\frac{-\gamma_2}{-\gamma_1}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.

Vi hafva härmed visat att divisionen alltid är möjlig och kvoten entydigt bestämd, såframt divisorn är skild från 0.

I det vi sammanfatta de i denna och i föregående paragraf bevisade resultaten, kunna vi således säga att inom det reella talområdet, hvilket omfattar alla rationella och irrationella tal, de *rationella operationerna*, d. v. s. additionen, subtraktionen, multiplikationen och divisionen, alltid äro möjliga och entydigt bestämda, så när som på divisionen med talet 0, samt att för dessa operationer, äfvensom för kalkyl med olikheter, gälla precis samma regler som inom det rationella talområdet.

Öfningsuppgifter:

1) Genomför beviset för att multiplikationens associationslag allmänt gäller inom det reella talområdet.

2) Bevisa likheterna $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ och $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ med stöd af kvotens definition samt multiplikationens grundegenskaper.

3) Bevisa att det irrationella tal, som definieras af det s. 461 betraktade Dedekind'ska snittet, satisfierar ekvationen $x^2=2$.

4) Bevisa att det i uppgiften (2) s. 463 betraktade Dedekind'ska snittet definierar en rot till ekvationen $x^n=r$.

5) Bevisa att summan $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, där a och b beteckna positiva rationella tal, har ett irrationellt värde såframt icke nämnda tal båda utgöra kvadrater af rationella tal.

6) Vi betrakta uttrycket

$$\frac{a\,\Theta+b}{c\,\Theta+d},$$

där Θ är ett irrationellt tal och a, b, c, d äro rationella tal. Hvilket villkor måste sistnämnda tal uppfylla för att uttryckets värde må vara rationellt?

87. **Det irrationella talet såsom gränsvärde för en räcka rationella tal.** — Om γ är ett gifvet irrationellt tal, definieradt genom ett Dedekind'skt snitt $(a)|(b)$, kan man på olika sätt bilda räckor af rationella tal hvilka hafva detta tal γ såsom gränsvärde. Dylika räckor erhållas t. ex. genom följande förfarande.

Vi välja först, enligt någon bestämd lag, en obegränsad följd af positiva hela tal hvilka ständigt växa:

$$(10) \qquad n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$$

Härefter utvälja vi bland de heltaliga multiplerna af bråket $\frac{1}{n_0}$ de två på hvarandra följande, $\frac{m_0}{n_0}$ och $\frac{m_0+1}{n_0}$, mellan hvilka talet γ faller (jmf. noten s. 471); $\frac{m_0}{n_0}$ utgör sålunda den största bland alla de multipler af $\frac{1}{n_0}$ som äro mindre än γ, och $\frac{m_0+1}{n_0}$ den minsta bland alla de multipler som äro större än γ.

På samma sätt utvälja vi bland de heltaliga multiplerna af $\frac{1}{n_1}$ de två på hvarandra följande hvilka mellan sig innesluta talet γ, och beteckna dem med $\frac{m_1}{n_1}$ och $\frac{m_1+1}{n_1}$.

Genom att fortgå på detta sätt, erhålla vi två entydigt bestämda räckor af rationella tal,

$$(11) \qquad \frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_\nu}{n_\nu}, \ldots$$

och

$$(12) \qquad \frac{m_0+1}{n_0}, \frac{m_1+1}{n_1}, \frac{m_2+1}{n_2}, \ldots, \frac{m_\nu+1}{n_\nu}, \ldots,$$

hvilka hafva de gifna hela talen (10) till nämnare och heltaliga täljare, och hvilka uppfylla villkoren

$$(13) \qquad \frac{m_\nu}{n_\nu} < \gamma < \frac{m_\nu+1}{n_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Talen i räckan (11) utgöra sålunda *undre närmevärden*, talen i räckan (12) *öfre närmevärden* för det gifna talet γ.

Enligt olikheterna (13) äro differenserna

$$\gamma - \frac{m_\nu}{n_\nu} \text{ och } \frac{m_\nu+1}{n_\nu} - \gamma$$

positiva och mindre än $\frac{m_\nu+1}{n_\nu}-\frac{m_\nu}{n_\nu}=\frac{1}{n_\nu}\cdot$ Då nu talen (10) enligt antagandet obegränsadt växa, närma sig således dessa differenser med växande index gränsvärdet 0, eller m. a. o. *talräckorna (11) och (12) konvergera båda mot det gifna irrationella talet γ.*

Om vi välja de hela talen (10) så att hvart och ett af dem är divisibelt med det föregående, utgör (11) en *stigande* och (12) en *fallande* talräcka, d. v. s. man har

$$\frac{m_0}{n_0}\leqq\frac{m_1}{n_1}\leqq\frac{m_2}{n_2}\leqq\cdots\leqq\frac{m_\nu}{n_\nu}\leqq\cdots,$$

$$\frac{m_0+1}{n_0}\geqq\frac{m_1+1}{n_1}\geqq\frac{m_2+1}{n_2}\geqq\cdots\geqq\frac{m_\nu+1}{n_\nu}\geqq\cdots.$$

Ty enligt antagandet är $n_1=n_0p_0$, där p_0 är ett helt tal, och bråken $\frac{m_0}{n_0}$ och $\frac{m_0+1}{n_0}$ kunna alltså skrifvas under formen

$$\frac{m_0}{n_0}=\frac{m_0p_0}{n_1},\quad\frac{m_0+1}{n_0}=\frac{(m_0+1)p_0}{n_1},$$

och utgöra följaktligen heltaliga multipler af $\frac{1}{n_1}\cdot$ Då nu $\frac{m_1}{n_1}$ är den största af alla de multipler af $\frac{1}{n_1}$ hvilka äro mindre än γ, och då jämväl $\frac{m_0}{n_0}<\gamma$, är med nödvändighet $\frac{m_0}{n_0}\leqq\frac{m_1}{n_1}$, och då å andra sidan $\frac{m_1+1}{n_1}$ utgör den minsta bland de multipler af $\frac{1}{n_1}$ som äro större än γ, och då äfven $\frac{m_0+1}{n_0}$ är större än γ, erhålles likaså $\frac{m_0+1}{n_0}\geqq\frac{m_1+1}{n_1}\cdot$ På enahanda sätt inses riktigheten af de följande olikheterna.

Vi specialisera ytterligare vårt antagande, i det vi välja

$$n_0=1,n_1=n,n_2=n^2,\ldots,n_\nu=n^\nu,\ldots,$$

där n är ett positivt helt tal (>1). Vi erhålla då en stigande räcka af undre närmevärden för talet γ af formen

(11)' $$m_0, \frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n^2}, \ldots, \frac{m_\nu}{n^\nu}, \ldots,$$

samt en fallande räcka af öfre närmevärden,

(12)' $$m_0+1, \frac{m_1+1}{n}, \frac{m_2+1}{n^2}, \ldots, \frac{m_\nu+1}{n^\nu}, \ldots,$$

hvilka räckor båda hafva talet γ såsom gränsvärde.

Ofvanstående närmevärden kunna bringas under en form som tydligare anger lagen för deras bildande. För hvarje värde ν gälla olikheterna

$$\frac{m_{\nu-1}}{n^{\nu-1}} \leqq \frac{m_\nu}{n^\nu} < \gamma < \frac{m_{\nu-1}+1}{n^{\nu-1}},$$

ur hvilka, genom multiplikation med n^ν, följer

$$m_{\nu-1}\, n \leqq m_\nu < m_{\nu-1}\, n + n.$$

Vi kunna således skrifva

$$m_\nu = m_{\nu-1}\, n + a_\nu,$$

där a_ν är ett af talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$, och om vi åter dividera med n^ν, antar denna likhet formen

$$\frac{m_\nu}{n^\nu} = \frac{m_{\nu-1}}{n^{\nu-1}} + \frac{a_\nu}{n^\nu}.$$

Likaså erhålles, då ν efterhand ersättes med $\nu-1, \ldots, 2, 1,$

$$\frac{m_{\nu-1}}{n^{\nu-1}} = \frac{m_{\nu-2}}{n^{\nu-2}} + \frac{a_{\nu-1}}{n^{\nu-1}}, \ldots, \frac{m_2}{n^2} = \frac{m_1}{n} + \frac{a_2}{n^2}, \quad \frac{m_1}{n} = m_0 + \frac{a_1}{n},$$

och genom successiv insättning följer härur, för hvarje värde ν,

(11)'' $$\frac{m_\nu}{n^\nu} = m_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}}{n^{\nu-1}} + \frac{a_\nu}{n^\nu},$$

samt

(12)'' $$\frac{m_\nu+1}{n^\nu} = m_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}}{n^{\nu-1}} + \frac{a_\nu+1}{n^\nu},$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ äro vissa af de hela talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$, och m_0 det hela tal som är närmast mindre än γ.

Vi veta att $\frac{m_\nu}{n^\nu}$ med växande ν konvergerar mot gränsvärdet γ. Detta resultat kan, enligt likheten (11)″, utsägas i följande form: *Den oändliga serien*

$$(14) \qquad m_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{n^\nu} + \cdots$$

är konvergent och dess summa är lika med det gifna irrationella talet γ.

Antaga vi speciellt $n = 10$ och $\gamma > 0$, ger oss (14) utvecklingen af talet γ i ett oändligt decimalbråk, medan (11)″ och (12)″ utgöra detta tals undre och öfre närmevärden på $\frac{1}{10^\nu}$ när (jmf. s. 111—112).

Vi påminna slutligen om att vi i det tredje kapitlet bildat en räcka rationella närmevärden för ett irrationellt tal hvilka utmärka sig genom en särskildt hög grad af noggrannhet, nämligen de successiva konvergenterna för talets kedjebråksutveckling.

88. **Begreppen öfre gräns och undre gräns för en oändlig talmängd.** — Vi hafva i det föregående särskilda gånger, och senast vid införandet af de irrationella talen, varit i tillfälle att se att en oändlig talmängd, hvars samtliga tal äro mindre än ett visst ändligt tal, icke med nödvändighet innehåller ett största tal, och likaså att det icke alltid finnes ett minsta tal i en mängd hvars tal alla äro större än ett visst ändligt tal. Däremot existerar det, såsom vi nu skola visa, i förra fallet alltid en bestämd *öfre gräns* och i senare fallet en bestämd *undre gräns* för den gifna mängden. Dessa begrepp definieras genom följande satser:

Om (t) *är en oändlig mängd af reella tal hvilka alla äro mindre än ett gifvet tal* M, *finnes det ett entydigt bestämdt reellt tal* G *med följande egenskaper:*

(I). *Intet tal i mängden* (t) *är större än* G.

(II). *Huru litet det positiva talet* ε *än valts, kan man i mängden* (t) *finna ett tal som är större än* $G - \varepsilon$.

Talet G benämnes den öfre gränsen för mängden (t); dess värde är $\leqq M$.

För begreppet *undre gräns* gäller den analoga satsen:

Om (t) är en oändlig mängd af reella tal hvilka alla äro större än ett gifvet tal m, finnes det ett entydigt bestämdt reellt tal g med följande egenskaper:

(I). *Intet tal i mängden (t) är mindre än g.*

(II). *Huru litet man än valt det positiva talet ε, kan man i mängden (t) finna ett tal som är mindre än $g + \varepsilon$.*

Talet g, hvars värde är $\geqq m$, benämnes den gifna talmängdens undre gräns.

Exempelvis har mängden af alla positiva egentliga bråk talet 1 såsom öfre gräns och talet 0 såsom undre gräns. Ty denna mängd innehåller icke något tal som är större än 1 eller mindre än 0, men väl tal som äro större än $1 - \varepsilon$ och tal som äro mindre än ε, huru litet man än fixerat det positiva talet ε.

Vi bevisa utförligt den förra af ofvanstående satser, och uppmana läsaren att själf utföra beviset för den senare.

Vi betrakta således en oändlig mängd (t) af reella tal hvilka alla äro mindre än talet M, och vilja bevisa att det existerar ett och endast ett tal G med de ofvan angifna egenskaperna.

Det är till en början klart att det icke kan finnas flere dylika tal. Ty antag att villkoren (I) och (II) vore uppfyllda för tvenne olika tal, G och $G' (> G)$. Vi kunde då ur villkoret (I) sluta att hvarje tal t är $\leqq G$. Men å andra sidan skulle ur villkoret (II) följa, då vi tillämpa det på talet G', att åtminstone ett tal i mängden (t) vore större än $G' - (G' - G) = G$. Nämnda antagande leder således till en motsägelse.

Man inser vidare omedelbart att, *om i talmängden (t) finnes ett största tal, utgör detta tillika öfre gräns för mängden.* Ty om vi beteckna ifrågavarande tal med G, är ju intet tal i (t) större än G, medan det säkert finnes ett tal i mängden, nämligen talet G själft, som är större än $G - \varepsilon$.

Vi kunna således härefter inskränka oss till det fall då mängden (t) icke innehåller något största tal. Vi indela då

samtliga rationella tal i tvenne klasser, (a) och (b), enligt följande grunder.

Om ett gifvet rationellt tal r jämföres med talen i mängden (t), inträffar det ena eller det andra af följande två fall:

1°. Talet r är större än hvarje tal i mängden (t). Detta villkor är t. ex. uppfylldt för alla de rationella tal som äro större än M.

2°. Talet r är icke större än hvarje tal t, eller m. a. o. det finnes i mängden (t) något tal som är $\geq r$.

Om fallet 1° inträffar föra vi talet r till klassen (b), om fallet 2° inträffar till klassen (a).

Hvarje tal i klassen (a) *är mindre än hvarje tal i klassen* (b). Ty till hvarje gifvet tal a kunna vi, enligt grunden för vår indelning, finna ett tal t som är $\geq a$, och å andra sidan är t mindre än hvarje tal b.

Vi kunna vidare visa att *klassen* (a) *innehåller intet största tal*. Ty om vi valt ett godtyckligt tal a, finnes det, såsom redan sades, ett tal $t \geq a$. Då vi antagit att det icke finnes något största tal i mängden (t), kunna vi vidare i denna mängd finna ett tal t' som är större än nämnda tal t och således äfven större än a. Hvarje rationellt tal mellan a och t' hör då till klassen (a), eftersom det är $< t'$, och är större än det gifna talet a, hvarmed vårt påstående är bevisadt.

Med afseende å klassen (b) äro två fall möjliga:

1°. Det finnes ett minsta tal b_0 i klassen (b).

2°. Klassen (b) innehåller icke något minsta tal. Klassindelningen $(a)|(b)$ utgör i detta fall ett Dedekind'skt snitt och definierar således ett irrationellt tal γ.

Vi sätta i det förra fallet $G = b_0$, i det senare fallet $G = \gamma$, och skola visa att det sålunda definierade talet G uppfyller villkoren (I) och (II) i vår sats.

Ur definitionen för talet G följer till en början att, hvilket af ofvannämnda fall än inträffar, hvarje rationellt tal som är mindre än G hör till klassen (a) och hvarje rationellt tal som är större än G till klassen (b).

Häraf sluta vi att mängden (t) icke innehåller något tal som är större än G, och att talet G således uppfyller villkoret (I). Ty funnes det ett tal t större än G, kunde

vi mellan t och G inskjuta ett rationellt tal, r, och skulle då hafva $t > r > G$. Dessa olikheter innebära emellertid en motsägelse, ty om talet r engång är större än G, hör det enligt det nyss sagda till klassen (b) och är således större än hvarje tal i mängden (t).

För att visa att vårt tal G äfven uppfyller villkoret (II), inskjuta vi ett rationellt tal r mellan $G - \varepsilon$ och G, så att $G - \varepsilon < r < G$. Då $r < G$, hör r till klassen (a), enligt hvad ofvan framhållits, och det finnes följaktligen i mängden (t) ett tal som är $\geq r$ och således större än $G - \varepsilon$.

Det ofvan definierade talet G utgör således den öfre gränsen för mängden (t).

Det återstår endast att visa att $G \leq M$. Detta är omedelbart klart, ty då enligt antagandet hvarje tal t är mindre än M, är hypotesen $M < G$ icke förenlig med villkoret (II).

Härmed är vår sats fullständigt bevisad.

Om det icke existerar något ändligt tal som är större än hvarje tal i mängden (t), så att man följaktligen, huru stort talet M än väljes, i (t) kan finna tal som äro större än M, säges denna mängd hafva ∞ såsom öfre gräns. Likaså säges en oändlig talmängd hafva $-\infty$ såsom undre gräns, om man, huru stort det positiva talet M än valts, i densamma kan finna tal som äro mindre än $-M$.

Öfningsuppgifter:

1) Sök den öfre och den undre gränsen för de värden funktionen $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ antar för reella värden af x, äfvensom för de värden hvilka funktionen $2x - x^4$ antar för rationella värden af x.

2) Genomför i detalj beviset för satsen om existensen af en undre gräns för en oändlig talmängd hvars samtliga tal äro större än ett gifvet tal m.

3) Talen i en gifven oändlig mängd, (t), hvars öfre gräns är G och undre gräns g, delas i tvenne klasser, (t_1) och (t_2). Bevisa att den öfre gränsen för åtminstone en af dessa talklasser är lika med G, och den undre gränsen för åtminstone en af dem lika med g.

89. **Bevis för en i det föregående flere gånger använd hjälpsats.** — Sedan vi uppställt precisa definitioner för de irrationella talen och för operationerna med dessa tal, äro vi numera i stånd att enkelt bevisa särskilda satser på hvilka

vi i det föregående upprepade gånger stödt oss. Vi göra början med följande sats (jmf. s. 87):

Vi betrakta tvenne oändliga mängder af reella tal, (t) och (T), hvilka besitta följande egenskaper:

(I). *Hvarje tal i mängden (t) är mindre än hvarje tal i mängden (T).*

(II). *I mängden (t) finnes intet största tal och i mängden (T) intet minsta tal.*

(III). *Om ε är ett föreskrifvet positivt tal, huru litet som helst, kan man alltid välja ett tal t ur mängden (t) och ett tal T ur mängden (T) på sådant sätt att $T - t < \varepsilon$.*

Under dessa förutsättningar finnes det ett och endast ett reellt tal som åtskiljer ifrågavarande talmängder, d. v. s. som är större än hvarje tal i mängden (t) och samtidigt mindre än hvarje tal i mängden (T).

Existensen af ett dylikt tal följer omedelbart ur hvad vi i n⁰ 88 bevisat. Ty då hvarje tal i mängden (t) är mindre än ett godtyckligt tal T i mängden (T), kunna vi ur satsen s. 487 sluta, 1⁰ att mängden (t) har en ändlig öfre gräns γ, samt 2⁰ att γ är $\leq$ hvilket tal T som helst i mängden (T). Enligt den öfre gränsens definition är talet γ å andra sidan $\geq$ hvarje tal i mängden (t). Men då denna mängd icke innehåller något största tal, kan γ icke vara lika med något tal t, och på samma sätt kan γ icke vara lika med något tal i mängden (T), då denna icke innehåller något minsta tal. Alltså är γ större än hvarje tal i mängden (t) och mindre än hvarje tal i mängden (T).

Detta tal γ, som sålunda uppfyller satsens fordringar, utgör öfre gräns för talmängden (t) och tillika undre gräns för talmängden (T).

Att det icke finnes mer än ett tal som besitter de erfordrade egenskaperna följer omedelbart ur villkoret (III), såsom vi redan förut framhållit (jmf. noten (2) s. 87).

Vi påminna om de användningar vi tidigare gjort af ofvanstående sats vid exponentialfunktionens utsträckning till irrationella argumentvärden (s. 86—87), i teorin för oändliga kedjebråk (s. 184), vidare i det sjette kapitlet då vi definierade längden af en konvex kurvbåge (s. 317), arean af en

godtyckligt begränsad plan yta (s. 334) och volymen af en godtyckligt begränsad kropp (s. 352), samt slutligen i det sjunde kapitlet vid den bestämda integralens definition (s. 416).

90. **Bevis för satsen om existensen af ett gränsvärde för en stigande eller fallande talräcka.** — En annan viktig sats, af hvilken vi flere gånger gjort bruk i vår framställning, är den följande (jmf. s. 206):

Om i en stigande talräcka samtliga tal äro mindre än ett gifvet ändligt tal M, konvergerar räckan mot ett bestämdt gränsvärde, som är $\leqq M$.

Likaså har en fallande talräcka, hvars samtliga tal äro större än ett visst ändligt tal m, ett bestämdt gränsvärde, hvilket är $\geqq m$.

Den gifna stigande talräckan må vara

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \cdots \leqq u_n \leqq \cdots$$

Då talen u enligt antagandet alla äro mindre än M, hafva de en ändlig öfre gräns, G, och dennas värde är $\leqq M$. Vi skola visa att *talet G utgör gränsvärde för vår talräcka*, eller att

$$\lim_{n=\infty} u_n = G.$$

Enligt den öfre gränsens definition är hvarje tal $u_n \leqq G$, medan man å andra sidan, huru litet det positiva talet ε än valts, kan finna ett tal u_{n_0} som är $> G - \varepsilon$. Men på grund af ofvanstående olikheter är då äfven

$$G - \varepsilon < u_n \leqq G \quad \text{eller} \quad 0 \leqq G - u_n < \varepsilon$$

för hvarje n som är större än n_0, hvilket innebär att talen u_n med växande index konvergera mot gränsvärdet G.

Satsens senare del bevisas lika lätt med stöd af begreppet undre gräns.

Vi uppmana läsaren att i detta sammanhang ånyo genomgå användningen af ofvanstående sats vid definitionen af det Neperska talet e (s. 213) samt i teorin för seriers konvergens (s. 223 och s. 228).

Vi påminna vidare om följande korollarium af ofvanstående sats, hvilket härleddes s. 207—208:

Om man har en oändlig följd af intervaller, af hvilka enhvar utgör en del af den föregående eller sammanfaller med denna, och hvilkas längder obegränsadt närma sig noll, så finnes det ett och endast ett tal som är gemensamt för dem alla.

Ifrågavarande tal utgör den öfre gränsen för de betraktade intervallernas begynnelsevärden och tillika den undre gränsen för deras slutvärden.

Detta korollarium hafva vi jämväl särskilda gånger användt, t. ex. i teorin för seriers konvergens (s. 231) samt i det senare beviset för integralkalkylens fundamentalsats (s. 371).

91. **Bevis för några satser om kontinuerliga funktioner.** — I det föregående hafva vi oupphörligt stödt oss på särskilda egenskaper hos kontinuerliga funktioner, hvilka vi nu gå att bevisa.

1°. Vi göra början med satsen: *en kontinuerlig funktion kan icke ändra tecken utan att gå genom noll*, hvilken i precisare formulering lyder (jmf. s. 37):

Om funktionen $f(x)$ *är kontinuerlig inom en intervall* (a, b) *och i dess ändpunkter, och om dess värden för* $x = a$ *och för* $x = b$ *hafva motsatta tecken, finnes det mellan* a *och* b *åtminstone en punkt i hvilken funktionen antar värdet* 0.

Vi antaga $b > a$, samt $f(a) < 0$ och $f(b) > 0$, hvilket icke utgör någon väsentlig inskränkning.

För bevisets skull dela vi intervallen (a, b) midt itu i punkten $x = c$, och betrakta värdet af funktionen $f(x)$ i denna punkt. Om $f(c) = 0$, är vårt påstående riktigt. I annat fall välja vi af de två delintervallerna (a, c) och (c, b) den i hvars ändpunkter $f(x)$ har motsatta tecken, alltså intervallen (a, c) om $f(c) > 0$, intervallen (c, b) om $f(c) < 0$. För likformighetens skull beteckna vi den sålunda bestämda delintervallens begynnelsepunkt med a_1 och dess slutpunkt med b_1, och hafva då

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Vi tillämpa nu samma förfarande på intervallen (a_1, b_1). Vi dela den således i två lika delar och välja, såframt icke värdet af $f(x)$ i delningspunkten är lika med noll, i hvilket fall vårt påstående är riktigt, af de två delintervallerna den i hvars ändpunkter $f(x)$ har motsatta tecken. Om den sålunda bestämda intervallen betecknas med (a_2, b_2), är

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

Vi fortgå på detta sätt, och härvid inträffar det ena eller det andra af följande två fall:

Antingen råka vi vid någon af de successiva delningarna på en punkt i hvilken funktionen $f(x)$ antar värdet 0, och då är vårt påstående riktigt; eller råka vi icke på någon dylik punkt, och i detta fall kan det ofvan skildrade förfarandet fortsättas in infinitum och ger oss en obegränsad följd af fullt bestämda intervaller,

$$(a, b), \; (a_1, b_1), \; (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots,$$

af hvilka enhvar utgör hälften af den närmast föregående, och i hvilkas ändpunkter funktionen $f(x)$ har motsatta tecken, sålunda att för hvarje index n

$$(15) \qquad f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0.$$

Enligt korollariet s. 493 finnes det en entydigt bestämd punkt ξ som är gemensam för alla dessa intervaller. Vi skola visa att denna punkt ligger mellan a och b, samt att $f(\xi) = 0$.

Då $f(a) < 0$ och $f(b) > 0$, och då funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $x = a$ och för $x = b$, är dess värde negativt för $a \leqq x \leqq a + \Delta$ och positivt för $b - \Delta \leqq x \leqq b$, om åt Δ gifves ett tillräckligt litet positivt värde[1]). Vi sluta häraf, enligt olikheterna (15), att talen i räckan $b_1, b_2, \ldots$ alla äro större än $a + \Delta$ och talen i räckan $a_1, a_2, \ldots$ alla mindre än $b - \Delta$.

---

[1]) Detta följer omedelbart ur kontinuitetsdefinitionen s. 35. Ty enligt denna kunna vi välja talet Δ så litet att den tillväxt, $f(x) - f(a)$, som funktionen $f(x)$ erhåller då argumentet varierar från värdet a till ett godtyckligt värde x inom intervallen $(a, a + \Delta)$, är numeriskt mindre än $|f(a)|$, och då är inom hela denna intervall $f(x) < f(a) + |f(a)| = 0$.

Talet ξ, som utgör det gemensamma gränsvärdet för nämnda talräckor, är således, enligt satsen s. 492, $\geqq a + \Delta$ och $\leqq b - \Delta$, och ligger följaktligen mellan a och b, såsom vi påstodo.

Enligt vårt antagande är funktionen $f(x)$ kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b) och således äfven i punkten ξ. Vore $f(\xi) \gtrless 0$, kunde man följaktligen kring nämnda punkt afgränsa en intervall, $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$, inom hvilken funktionen $f(x)$ bibehölle ett och samma tecken, nämligen det tecken den har för $x = \xi$. Denna slutsats innebär emellertid en motsägelse, ty då $\lim a_n = \lim b_n = \xi$, innehåller nämnda intervall alla de punkter a_n och b_n hvilkas indices öfverskrida en viss gräns, och $f(x)$ antar följaktligen inom densamma såväl positiva som negativa värden. Alltså är $f(\xi) = 0$, och vår sats är härmed fullständigt bevisad.

Bland tidigare användningar af denna sats må här särskildt framhållas beviset för att hvarje algebraisk ekvation af udda grad har åtminstone en reell rot (s. 61—62), samt den första satsen på s. 38, hvilken ligger till grund för den inversa funktionens teori (jmf. n⁰ 14).

2⁰. Vi gå till beviset för följande viktiga sats (jmf. s. 38):

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a \leqq x < b$, finnes det bland de mot dessa argumentvärden svarande funktionsvärdena ett största och ett minsta värde, förutsatt att funktionen icke är konstant inom den betraktade intervallen.

Mot hvarje värde x som tillhör intervallen (a, b) svarar enligt antagandet ett ändligt bestämdt funktionsvärde $f(x)$. Vi beteckna med G den öfre gränsen för mängden $(f(x))$ af alla dessa funktionsvärden, och skola bevisa, 1⁰ att *G är ett ändligt tal*, samt 2⁰ att *det finnes ett värde ξ som tillhör intervallen (a, b) och för hvilket funktionen $f(x)$ antar värdet G.* Enligt den öfre gränsens definition kunna vi då sluta att G är det största värde $f(x)$ antar för $a \leqq x \leqq b$.

För bevisets skull dela vi åter intervallen (a, b) i två lika delar, (a, c) och (c, b). Vi beteckna med G_1 den öfre gränsen för de värden funktionen $f(x)$ antar inom intervallen $a \leqq x \leqq c$, med G_2 den öfre gränsen för dess värden inom intervallen $c < x < b$, och skola närmast visa att *åtminstone det ena af talen G_1 och G_2 är lika med G.*

Om $G = \infty$, d. v. s. om det i mängden $(f(x))$ finnes huru stora tal som helst, hvilken möjlighet vi tillsvidare måste taga med i räkningen, är åtminstone den ena af gränserna G_1 och G_2 oändlig. Ty vore de båda ändliga, skulle man enligt den öfre gränsens definition hafva $f(x) \leqq G_1$ för $a \leqq x \leqq c$, $f(x) \leqq G_2$ för $c \leqq x \leqq b$, och således, om med G' betecknas det större af talen G_1 och G_2, $f(x) \leqq G'$ för $a \leqq x \leqq b$, hvilket strider mot att mängden $(f(x))$ antogs innehålla huru stora tal som helst.

Om vi åter antaga att G är ett ändligt tal, kan till en början intet af talen G_1 och G_2 vara större än G. Ty vore t. ex. $G_1 > G$, skulle det, enligt egenskapen (II) hos den öfre gränsen (jmf. s. 487), bland de värden $f(x)$ antar för $a \leqq x \leqq c$ finnas något som är större än $G_1 - (G_1 - G) = G$, hvilket emellertid icke är fallet då G är den öfre gränsen för $f(x)$ inom hela intervallen (a, b). Men å andra sidan kunna talen G_1 och G_2 icke heller båda vara mindre än G. Ty om så vore, skulle man inom hela intervallen $a \leqq x \leqq b$ hafva $f(x) \leqq G' < G$, där G' betecknar det större af talen G_1 och G_2, men denna slutsats strider mot egenskapen (II) hos den öfre gränsen. Följaktligen är åtminstone det ena af talen G_1 och G_2 lika med G, h. s. b.

Vi utvälja nu af intervallerna (a, c) och (c, b) den inom hvilken den öfre gränsen för $f(x)$ har värdet G, eller, om den öfre gränsen är lika med G inom båda dessa intervaller, den första af dem, alltså (a, c). Vi erhålla sålunda en fullt bestämd intervall, hvilken vi för likformighetens skull beteckna med (a_1, b_1).

Härefter dela vi intervallen (a_1, b_1) midt itu, och sluta medels samma resonemang som ofvan att åtminstone inom den ena delen den öfre gränsen för $f(x)$ är lika med G. Vi välja den del inom hvilken detta äger rum, eller, om den öfre gränsen inom båda delarna är lika med G, den första af dessa delar, och beteckna med (a_2, b_2) den sålunda bestämda intervallen.

Detta förfarande kan fortsättas in infinitum och ger oss en obegränsad följd af entydigt bestämda intervaller,

(16) $\quad (a, b),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots\ldots,$

af hvilka enhvar utgör hälften af den närmast föregående. Den öfre gränsen för de värden $f(x)$ antar inom hvilken som helst af dessa intervaller är lika med G, alltså lika med den öfre gränsen för funktionens värden inom hela intervallen (a, b).

Enligt korollariet s. 493 kunna vi således här åter sluta att det finnes en punkt $x = \xi$ som är gemensam för samtliga intervaller i räckan (16). Då denna punkt tillhör intervallen (a, b), antar funktionen $f(x)$ i densamma ett ändligt värde $f(\xi)$ och är kontinuerlig, och vi kunna således, för hvarje gifvet positivt ε, afgränsa en omgifning $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ kring punkten ξ[1]) inom hvilken $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ eller

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon. \tag{17}$$

Då man för hvarje index n har $a_n \leqq \xi \leqq b_n$ och $|\xi - a_n|$ och $|\xi - b_n|$ således äro $\leqq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, faller intervallen (a_n, b_n) helt och hållet inom $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ om n har ett så stort värde att $\frac{b-a}{2^n} < \Delta$. Då är äfven den ofvanstående olikheten $f(x) < f(\xi) + \varepsilon$ uppfylld i hvarje punkt af (a_n, b_n) och funktionen $f(x)$ har således inom denna intervall en ändlig öfre gräns. Men denna öfre gräns är lika med den öfre gränsen G för $f(x)$ inom hela intervallen (a, b), och härmed är ådagalagdt att *G är ett ändligt tal.*

Det återstår att bevisa att $f(\xi) = G$. Man kan icke hafva $f(\xi) > G$, eftersom G är den öfre gränsen för $f(x)$ inom (a, b). Vore åter $f(\xi) < G$, kunde vi välja ett så litet positivt tal ε att $f(\xi) < G - 2\varepsilon$ eller $f(\xi) + \varepsilon < G - \varepsilon$, och härefter ett annat positivt tal Δ så att olikheterna (17) vore uppfyllda inom $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$. Om talet n tages tillräckligt stort, skulle man då äfven inom intervallen (a_n, b_n) hafva $f(x) < f(\xi) + \varepsilon < G - \varepsilon$, hvaraf skulle följa att den öfre gränsen för $f(x)$ inom denna intervall vore $< G - \varepsilon$, medan den i själfva verket är lika med G. Alltså kan man icke heller

[1]) Om ξ sammanfaller med a, välja vi en intervall $(a, a + \Delta)$, om ξ sammanfaller med b en intervall $(b - \Delta, b)$ inom hvilken olikheterna (17) äro uppfyllda.

hafva $f(\xi) < G$, och som enda möjlighet återstår således att $f(\xi) = G$, hvarmed beviset är slutfördt.

På alldeles liknande sätt bevisas att den undre gränsen g för de värden $f(x)$ antar inom intervallen (a, b) är ett ändligt tal, samt att det finnes åtminstone en punkt af nämnda intervall i hvilken funktionens värde är lika med g, hvaraf följer att g är det minsta af alla de värden $f(x)$ antar för $a \leqq x \leqq b$.

Ofvanstående sats har i det föregående upprepade gånger kommit till användning, och speciellt bör ihågkommas att beviset för ROLLE's sats helt och hållet grundar sig på densamma (jmf. s. 289).

3°. Vi skola slutligen bevisa den s. 39 anförda satsen, hvilken spelade en viktig roll i teorin för bestämda integraler (jmf. s. 416).

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $a \leqq x \leqq b$, är det alltid möjligt, sedan man fixerat ett positivt tal ε, huru litet som helst, att finna ett annat positivt tal δ, sådant att oscillationen af $f(x)$ är mindre än ε inom hvarje del af intervallen (a, b) hvars längd är mindre än δ.

Speciellt är det möjligt att dela (a, b) i ett ändligt antal delar så att oscillationen af $f(x)$ inom hvarje del är mindre än ε.

Vi bevisa först satsens senare del. Vi börja åter med att dela intervallen (a, b) i två lika delar, tudela härefter båda hälfterna, dela så enhvar af de härvid erhållna fyra delarna midt itu, o. s. v. Då vi fortgå på detta sätt måste det engång inträffa att, efter en viss delning, oscillationen af $f(x)$ inom hvarje del är mindre än det föreskrifna talet ε.

Ty antag att detta aldrig inträffar, och att således, huru långt indelningen än drifves, oscillationen af $f(x)$ är $\geqq \varepsilon$ inom åtminstone en af de erhållna delarna. Om vi komma öfverens om att, efter hvarje delning, utvälja den första från punkten a räknadt af de delar inom hvilka nämnda förhållande äger rum, erhålla vi en obegränsad räcka af fullt bestämda intervaller,

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots,$$

hvilka besitta egenskapen att oscillationen af funktionen $f(x)$ inom enhvar af dem är $\geqq \varepsilon$. Dessa intervallers längder aftaga mot 0, ty man har $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ för hvarje n.

Bland de delar i hvilka (a, b) sönderfaller vid den n^{te} delningen utgör, enligt vårt antagande, (a_n, b_n) den första inom hvilken oscillationen af $f(x)$ är $\geqq \varepsilon$. Inom hvar och en af de föregående delarna är funktionens oscillation således mindre än ε, och detsamma gäller följaktligen äfven om dessa delars hälfter. Vi sluta häraf att intervallen (a_{n+1}, b_{n+1}), inom hvilken oscillationen enligt antagandet är $\geqq \varepsilon$, utgör en hälft af (a_n, b_n) eller af någon af de delar som följa efter (a_n, b_n), och att således $a_{n+1} \geqq a_n$. Detta resonemang gäller för hvarje värde n, och vi erhålla alltså

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots < b.$$

Häraf följer, enligt satsen s. 492, att

$$\lim_{n=\infty} a_n = \xi, \tag{18}$$

där ξ betecknar ett värde som tillhör intervallen (a, b), och då $b_n - a_n$ med växande n konvergerar mot 0, är likaledes

$$\lim_{n=\infty} b_n = \xi. \tag{19}$$

Nu är funktionen $f(x)$ enligt antagandet kontinuerlig i hvarje punkt af intervallen (a, b) och således äfven för $x = \xi$. På grund häraf kan man finna ett sådant positivt tal Δ att $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ för hvarje värde x som tillhör intervallen $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$[1]. Om x_1 och x_2 äro tvenne godtyckliga värden inom denna intervall, är då

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq |f(x_1) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

och således är äfven oscillationen af $f(x)$ inom $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ mindre än ε.

---

[1]) Om $\xi = a$ kunna vi välja en intervall $(a, a + \Delta)$, om $\xi = b$ en intervall $(b - \Delta, b)$ inom hvilken nämnda olikhet är uppfylld.

Vi stöta emellertid här på en motsägelse. Ty enligt (18) och (19) utgör, om n väljes tillräckligt stort, intervallen (a_n, b_n) en del af $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$, och oscillationen af funktionen $f(x)$ inom (a_n, b_n) borde på grund häraf vara lika med eller mindre än dess oscillation inom $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ och således mindre än ε, hvilket strider mot det föregående. Vår antites var således oriktig, och den senare delen af vår sats är härmed bevisad.

Riktigheten af satsens förra del inses nu enkelt som följer. Enligt det sagda kan n väljas så stort att oscillationen af $f(x)$ inom enhvar af intervallerna

$$(20) \quad (a, a+\delta),\ (a+\delta, a+2\delta), \ldots, (a+(n-1)\delta, b),$$

hvilka hafva längden $\delta = \frac{b-a}{n}$, är mindre än $\frac{\varepsilon}{2}$. Vi betrakta en godtycklig del Δ af (a, b) hvars längd är mindre än δ, och beteckna med x_1 och x_2 de punkter af Δ i hvilka $f(x)$ uppnår sitt största och sitt minsta värde, hvarvid således $f(x_1) - f(x_2)$ utgör oscillationen af $f(x)$ inom Δ. Dessa punkter x_1 och x_2 höra antingen till en och samma af intervallerna (20), och då är $f(x_1) - f(x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, eller höra de till hvar sin af två på hvarandra följande af dessa intervaller, t. ex.

$$(a+(\nu-1)\delta, a+\nu\delta) \text{ och } (a+\nu\delta, a+(\nu+1)\delta),$$

och i detta fall erhålles

$$f(x_1) - f(x_2) = (f(x_1) - f(a+\nu\delta)) + (f(a+\nu\delta) - f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Inom hvarje del af (a, b) hvars längd är mindre än δ är således oscillationen af $f(x)$ mindre än det föreskrifna talet ε, och vår sats är härmed fullständigt bevisad.

92. **Motsvarigheten mellan de reella talen och punkterna på en rät linie.** — Såsom en afslutning på detta kapitel skola vi, med stöd af det irrationella talets definition, bevisa följande viktiga sats, hvilken ligger till grund för den analytiska geometrin (jmf. s. 7):

Om en godtycklig sträcka e väljes till längdenhet, tillkommer hvarje gifven sträcka ett bestämdt mätetal i förhållande till e,

och omvändt svarar mot hvarje gifvet positivt tal en sträcka, hvars mätetal i förhållande till e är lika med detta tal.

1°. Vi taga en obegränsad rät linie till *x-axel*, välja en punkt O på densamma till *origo*, och fastställa en viss riktning af linien, hvilken vi beteckna såsom riktningen *åt höger*.

Utgående från origo afsätta vi härefter på x-axeln, till en början endast åt höger, alla möjliga sträckor som äro kommensurabla med längdenheten e, och hvilka alltså erhållas genom addition af ett antal sträckor lika med e, eller genom delning af e i lika stora delar och addition af ett antal dylika delar. Dessa sträckors högra ändpunkter bilda en oändlig punktmängd på x-axeln, hvilken vi beteckna med (R).

Till hvarje punkt R i denna mängd tillordna vi mätetalet för den motsvarande sträckan OR i förhållande till e. Vi hafva härmed definierat *en entydig motsvarighet* mellan punkterna i mängden (R) och de positiva rationella talen: mot hvarje punkt R svarar ett fullt bestämdt positivt rationellt tal, och omvändt hör hvarje gifvet positivt rationellt tal till en och endast en punkt i mängden (R). Om R_1 och R_2 äro tvenne olika punkter i denna mängd, äro äfven de mot dem svarande rationella talen r_1 och r_2 olika, och härvid gäller att, om punkten R_1 ligger till höger om punkten R_2, talet r_1 är större än talet r_2, och omvändt.

2°. Vi skola nu närmast visa att, *om P_1 och P_2 äro två olika punkter på x-axeln till höger om origo, så finnes mellan dem en oändlig mängd punkter som tillhöra mängden (R).*

Riktigheten af detta påstående bevisas med stöd af följande geometriska sats[1]):

Om α och β äro tvenne gifna sträckor, af hvilka α kan väljas så liten och β så stor man vill, finnes det ett sådant positivt helt tal n att $n\alpha > \beta$.

Enligt denna sats kunna vi nämligen välja ett sådant

[1]) Ifrågavarande sats benämnes vanligen ARCHIMEDES' *axiom*, emedan ARCHIMEDES konsekvent stödde sig på densamma i sina undersökningar. Den finnes emellertid redan upptagen bland förutsättningarna i EUCLIDES' *Elementa* (jmf. t. ex. den femte bokens femte definition).

helt tal n att $n \,.\, \overline{P_1P_2} > e$ eller $\frac{e}{n} < \overline{P_1P_2}$, samt härefter ett annat helt tal m, så att $m \cdot \frac{e}{n}$ är större än sträckan $\overline{OP_1}$ (hvilken vi antaga mindre än sträckan $\overline{OP_2}$). Om med ν betecknas det minsta hela tal för hvilket olikheten $\nu \cdot \frac{e}{n} > \overline{OP_1}$ äger rum, är då

$$(\nu - 1)\frac{e}{n} \leqq \overline{OP_1}, \quad \frac{e}{n} < \overline{P_1P_2},$$

hvarur genom addition följer $\nu \cdot \frac{e}{n} < \overline{OP_2}$. Om vi från origo åt höger afsätta en sträcka af längden $\nu \cdot \frac{e}{n}$, kommer dess ändpunkt R således att ligga till höger om P_1 men till venster om P_2, hvarmed är visadt att mellan dessa punkter ligger åtminstone en punkt som tillhör mängden (R).

Samma bevis lär oss att mellan punkten R och enhvar af punkterna P_1 och P_2 faller åtminstone en punkt i mängden (R), och då detta resonemang kan tillämpas huru många gånger som helst, inses att mellan P_1 och P_2 ligger ett oändligt antal punkter som tillhöra nämnda mängd, h. s. b.

3^0. Vi veta emellertid att det på x-axeln finnes punkter till höger om origo hvilka icke ingå i mängden (R). Till en sådan punkt kommer man t. ex. om man från origo åt höger afsätter diagonalen i en kvadrat hvars sida är lika med längdenheten e (jmf. s. 154).

Låt P vara en godtycklig punkt af detta slag. Densamma delar punkterna i mängden (R) i två klasser

$$(A) \quad \text{och} \quad (B),$$

af hvilka (A) omfattar de punkter R som ligga till venster om P, (B) de som ligga till höger om P. Dessa punktklasser besitta följande tvenne egenskaper:

(I). Hvarje punkt A ligger till venster om hvarje punkt B.

(II). I klassen (A) finnes icke någon punkt som ligger till höger om hvarje annan punkt i samma klass, och i klassen (B) icke någon punkt som ligger till venster om hvarje annan punkt B.

Riktigheten af (I) följer omedelbart däraf att hvarje punkt A ligger till venster om punkten P och denna i sin tur till venster om hvarje punkt B.

För att uppvisa den senare egenskapen, betrakta vi först en godtycklig punkt A i klassen (A). Mellan A och P kunna vi inskjuta en punkt R ur mängden (R). Då A ligger till venster om P, ligger äfven punkten R till venster om P och hör således till klassen (A), medan den å andra sidan ligger till höger om den punkt A vi betraktat. I klassen (A) finnes det således icke någon punkt som ligger mest åt höger, och på analogt sätt visas att det i klassen (B) icke finnes någon punkt som ligger mest åt venster.

Mot snittet $(A)|(B)$ af punktmängden (R) svarar nu en indelning af de positiva rationella talen i tvenne klasser, (a) och (b), då vi nämligen komma öfverens om att till klassen (a) föra de tal hvilka, enligt den i momentet 1^0 uppställda motsvarigheten, höra till punkterna i (A), till klassen (b) de tal som höra till punkterna i (B). Ur de egenskaper vi påvisat hos punktklasserna (A) och (B) följer omedelbart att de sålunda definierade rationella talklasserna (a) och (b) besitta följande egenskaper:

(I). Hvarje tal a är mindre än hvarje tal b.

(II). I klassen (a) finnes icke något tal som är större än hvarje annat tal i samma klass, och i klassen (b) icke något tal som är mindre än hvarje annat tal b.

Alltså utgör klassindelningen $(a)|(b)$, om vi komplettera klassen (a) med talet 0 och de negativa rationella talen, ett Dedekind'skt snitt, och definierar följaktligen ett irrationellt tal γ, hvilket är positivt eftersom talet 0 hör till den undre klassen.

Sträckan $\overline{OP}$, från origo O till den ofvan betraktade punkten P, innehåller såsom en del hvarje sträcka $\overline{OA}$, medan den själf utgör en del af hvarje sträcka $\overline{OB}$. I enlighet härmed bör mätetalet för sträckan $\overline{OP}$ i förhållande till längdenheten e vara större än mätetalet för hvarje sträcka $\overline{OA}$ men mindre än mätetalet för hvarje sträcka $\overline{OB}$, eller m. a. o. större än hvarje tal i klassen (a) men mindre än hvarje tal

i klassen (b). Nu finnes det ett och endast ett reellt tal som uppfyller dessa villkor, nämligen det genom snittet $(a)|(b)$ definierade irrationella talet γ. Vi böra således tilldela sträckan $\overline{OP}$ mätetalet γ i förhållande till längdenheten e, och i enlighet härmed låta talet γ svara mot punkten P på x-axeln.

Vi hafva härmed visat att hvarje gifven sträcka har ett bestämdt mätetal, och att således mot hvarje gifven punkt P på x-axeln till höger om origo svarar ett bestämdt positivt reellt tal, nämligen mätetalet för sträckan $\overline{OP}$. Mot två olika punkter P_1 och P_2 svara olika tal γ_1 och γ_2, sålunda att, om punkten P_1 ligger till höger om punkten P_2, talet γ_1 är större än talet γ_2. Ty mellan P_1 och P_2 kunna vi inskjuta en punkt R ur mängden (R), hvilken då ligger till venster om P_1 men till höger om P_2. Mot R svarar ett rationellt tal r, och af det ofvan sagda kunna vi sluta att detta tal r, vare sig punkterna P_1 och P_2 höra till mängden (R) eller icke, är mindre än γ_1 men större än γ_2, och att således $\gamma_1 > \gamma_2$.

4°. Vi fråga oss nu om äfven omvändt mot hvarje gifvet positivt reellt tal γ svarar en sträcka hvars mätetal är lika med γ, och således en bestämd punkt på x-axeln till höger om origo. Vi veta att detta äger rum om talet γ är rationellt, och hafva här således att betrakta endast det fall då γ är ett positivt irrationellt tal, definieradt genom ett Dedekind'skt snitt $(a)|(b)$.

Vi beteckna allmänt med A den punkt af x-axeln som enligt momentet 1° svarar mot ett positivt tal a i klassen (a), med B den punkt som svarar mot talet b i klassen (b), och erhålla sålunda en indelning af punktmängden (R) i två klasser, (A) och (B), hvilka tydligen besitta de s. 502 anförda egenskaperna (I) och (II).

Om det på x-axeln finnes en punkt P som motsvaras af det gifna talet γ, så att följaktligen mätetalet för sträckan $\overline{OP}$ är lika med γ, måste denna punkt P, enligt hvad i momentet 3° visats, ligga till höger om hvarje punkt A men till venster om hvarje punkt B, eftersom talet γ är större än hvarje tal a men mindre än hvarje tal b. Det frågas om en dylik punkt P existerar.

Att så verkligen är fallet kan bevisas med stöd af följande geometriska *axiom*, som uppställts af Dedekind[1]) och benämnes efter honom, och hvilket utgör det matematiska uttrycket för den *kontinuitet* hvilken enligt vår åskådliga föreställning tillkommer den räta linien:

Om samtliga punkter af en rät linie delats i två klasser, sålunda att hvarje punkt i den ena klassen ligger till venster om hvarje punkt i den andra, finnes det antingen i den förra klassen en punkt som ligger till höger om hvarje annan punkt i denna klass, eller i den senare klassen en punkt som ligger till venster om hvarje annan punkt i samma klass.

För att bevisa existensen af en punkt P med de erfordrade egenskaperna, indela vi samtliga punkter på x-axeln i två klasser, (α) och (β), enligt följande grunder. Om en gifven punkt Q på nämnda axel jämföres med punkterna i den ofvan definierade klassen (A), inträffar det ena eller det andra af följande två fall: 1⁰ Q ligger till höger om hvarje punkt A; 2⁰ Q ligger icke till höger om hvarje punkt A, eller m. a. o. det finnes någon punkt i klassen (A) som ligger till höger om Q eller sammanfaller med Q. I förra fallet föra vi punkten Q till klassen (β), i senare fallet till klassen (α). Till klassen (α) höra speciellt alla punkter A, till klassen (β) alla punkter B.

Den sålunda definierade klassindelningen af den räta liniens punkter besitter egenskapen att hvarje punkt i klassen (α) ligger till venster om hvarje punkt i klassen (β). Ty om vi fixerat en godtycklig punkt α, kunna vi, enligt grunden för vår indelning, finna en punkt A som ligger till höger om α eller sammanfaller med α, och å andra sidan ligger A till venster om hvarje punkt β.

Då det i klassen (A) icke finnes någon punkt som ligger

---

[1]) Se det i noten (1) s. 461 citerade arbetet.

Vi kunna här icke närmare ingå på de geometriska axiomen och deras inbördes förhållande, utan måste åtnöja oss med att i sådant afseende hänvisa läsaren till något arbete öfver geometrins grunder. Dock bör framhållas att den s. 501 anförda satsen, hvilken vanligen benämnes Archimedes' *axiom*, kan bevisas med stöd af Dedekind's axiom, och därför icke behöfver upptagas bland axiomen.

till höger om hvarje annan punkt A, inses vidare att denna samma egenskap jämväl tillkommer klassen (α). Ty till en gifven punkt α kunna vi som sagdt finna en punkt A som ligger till höger om α eller sammanfaller med α, och därefter kunna vi i (A) välja en punkt A' som ligger till höger om A. Denna punkt A' hör till klassen (α) och ligger till höger om den gifna punkten α.

Enligt Dedekind's axiom kunna vi följaktligen sluta att det i klassen (β) finnes en punkt, β_0, som ligger till venster om hvarje annan punkt i samma klass. Då punkterna B alla höra till klassen (β) och då bland dem icke finnes någon som ligger mest åt venster, kan punkten β_0 icke höra till (B) och ligger följaktligen till venster om hvarje punkt B. Enligt grunden för vår klassindelning ligger β_0 å andra sidan till höger om hvarje punkt A. Denna punkt β_0 uppfyller således de fordringar som ofvan ställdes på punkten P, och enligt den i momentet 3^0 definierade motsvarigheten svarar följaktligen mot densamma det gifna irrationella talet γ, som sålunda utgör mätetal för sträckan $\overline{O\beta_0}$. Härmed är den i början af denna paragraf formulerade satsen fullständigt bevisad.

5^0. Vi hafva erhållit en entydig motsvarighet mellan punkterna af x-axeln till höger om origo och de positiva reella talen. Vi utsträcka nu denna motsvarighet, i det vi till en punkt P af x-axeln till venster om origo tillordna mätetalet för sträckan $\overline{OP}$ i förhållande till längdenheten e, taget med *negativt* tecken, och slutligen till origo självt talet 0. *Vi hafva sålunda definierat en entydig motsvarighet mellan samtliga punkter på x-axeln å ena sidan och samtliga tal inom det reella talområdet å den andra,* och denna motsvarighet är sådan att, om punkten P_1 ligger till höger om punkten P_2, det mot P_1 svarande talet är större än det tal som svarar mot P_2, och omvändt.

Om vi nu betrakta alla punkter i ett gifvet plan och i detta införa ett rätlinigt koordinatsystem samt bestämma läget af en punkt genom dess koordinater x, y i förhållande till detta system, kunna vi af det ofvan bevisade sluta att *det existerar en entydig motsvarighet mellan samtliga punkter i planet å ena sidan och samtliga reella värdepar (x, y) å den*

andra. Och om vi öfvergå till rymden och bestämma läget af en punkt genom dess koordinater x, y, z i förhållande till ett visst rätlinigt koordinatsystem, erhålla vi likaså *en entydig motsvarighet mellan rymdens samtliga punkter och alla möjliga reella värdesystem* (x, y, z).

Öfningsuppgift. — Bevisa, med stöd af de i n° 83 och n° 84 uppställda definitionerna, följande sats om de reella talen, hvilken motsvarar det Dedekind'ska axiomet för den räta liniens punkter:

Om samtliga reella tal delats i två klasser, (α) *och* (β), *på sådant sätt att hvarje tal* α *är mindre än hvarje tal* β, *finnes det antingen ett största tal i klassen* (α) *eller ett minsta tal i klassen* (β).

Nionde kapitlet.

Det komplexa talområdet.

Några användningar på algebran.

93. **Den imaginära enheten och de komplexa talen.** — Genom införandet af de irrationella talen blef det oss möjligt att lösa flere uppgifter hvilka icke hade någon lösning inom det rationella talområdet, samt att uppställa särskilda allmänna satser som äro af grundläggande betydelse för Analysen. Hvad speciellt algebran beträffar, erhöllo vi sålunda den viktiga satsen att, inom det reella talområdet, hvarje algebraisk ekvation af udda grad har åtminstone en rot.

Emellertid anträffa vi redan på de elementäraste stadierna af algebran uppgifter hvilka icke hafva någon lösning, så länge vi icke känna andra tal än de reella. Vi behöfva icke gå längre än till ekvationen af andra graden

$$x^2 + px + q = 0\,.$$

Identiteten

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

visar oss omedelbart att, om koefficienterna p och q hafva godtyckliga reella värden som uppfylla villkoret $\frac{p^2}{4} < q$, ekvationens venstra membrum är positivt för hvarje reellt värde af x och att ekvationen således i detta fall icke har någon rot. Är däremot $\frac{p^2}{4} > q$, kunna vi skrifva

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

$$= \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

där kvadratroten har ett reellt värde, hvaraf framgår att polynomet försvinner för

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Den betraktade ekvationen har således i detta fall två rötter, hvilkas värden sammanfalla om $\frac{p^2}{4} = q$.

Sålänge vi röra oss inom det reella talområdet, kunna vi således icke utsäga något enhetligt resultat beträffande rötterna till en ekvation af andra graden, och detta gäller än mer om ekvationer af högre grad. En ekvation af tredje graden har sålunda antingen en rot eller tre rötter (hvilkas värden i speciella fall kunna sammanfalla), en ekvation af fjärde graden har antingen ingen rot eller två rötter eller fyra rötter, o. s. v.

Om man vill ernå en enhetlig och harmonisk lärobyggnad — hvilken sträfvan i alla tider utgjort en af de ledande och mest fruktbringande principerna i Matematikens utveckling — är endast en utväg möjlig, nämligen en ny utvidgning af talbegreppet. Det är denna utväg Matematiken tillgripit i det den skapat *de komplexa talen*.

Vi utgå från den enklaste ekvation som icke har någon lösning inom det reella talområdet, nämligen ekvationen $x^2+1=0$ eller

(1) $$x^2 = -1,$$

och införa en ny symbol eller ett nytt tal hvilket vi tillägga egenskapen att satisfiera denna ekvation, eller m. a. o. att, multipliceradt med sig själft, gifva till produkt -1. Med användande af rotbeteckningen kunde detta tal skrifvas $\sqrt{-1}$. För att framhäfva dess symboliska karaktär har man emellertid, enligt EULER's och GAUSS' förslag, för detsamma infört ett särskildt tecken, nämligen bokstafven i.

Med i förstås således ett nytt tal hvilket tillägges egenskapen

$$i \, . \, i = -1 \quad \text{eller} \quad i^2 = -1 \, .$$

Detta tal benämnes *den imaginära enheten.*

För att de vanliga räkneoperationerna må kunna utföras inom det utvidgade talområdet, erfordras främst att den nya enheten i skall kunna förbindas med de reella talen genom addition och multiplikation, och vi ledas sålunda till att, samtidigt med i, såsom nya tal införa alla uttryck af formen

(2) $$a + ib,$$

där a och b äro godtyckliga reella tal. Hvarje dylikt uttryck benämnes *ett komplext tal*; a kallas talets *reella del*, ib dess *imaginära del.* I stället för ib skrifves äfven bi, och denna ordningsföljd för faktorerna användes i regel om b har ett numeriskt värde.

Om $a = 0$, har det komplexa talet formen $0 + ib$ och betecknas enklare med ib. Talet säges i detta fall vara *rent imaginärt.*

Är åter $b = 0$, antar talet (2) formen $a + i \, . \, 0$. Vi införa *definitionen*

(3) $$i \, . \, 0 = 0 \, , \quad 0 \, . \, i = 0 \, ,$$

och erhålla då $a + i \, . \, 0 = a$. Talet (2) reducerar sig således i detta fall till ett reellt tal.

Två komplexa tal

$$a + ib \text{ och } a - ib,$$

hvilkas reella delar äro lika medan de imaginära delarna hafva motsatta tecken, benämnas *konjugeradt komplexa tal*, eller kortare *konjugerade tal* eller *konjugattal*. Det konjugerade talet till ett reellt tal är identiskt med detta tal.

Sedan vi infört de nya talen, är vår första uppgift att bestämma när två af dem skola anses såsom lika. Vi uppställa i sådant afseende följande allmänna

Definition. — *De komplexa talen* $a + ib$ *och* $a' + ib'$ *äro lika blott om man samtidigt har* $a = a'$ *och* $b = b'$.

Speciellt är $a + ib$ *lika med* 0 *blott i det fall då* a *och* b *samtidigt försvinna.*

Sammanfattningen af alla komplexa tal benämnes *det komplexa talområdet*. Detta innehåller det reella talområdet såsom en del.

94. **De rationella operationerna inom det komplexa talområdet.** — Vi gå nu att definiera räkneoperationerna med komplexa tal, och låta härvid åter leda oss af den s. k. *principen om de formella räknelagarnas permanens*, d. v. s. vi söka uppställa våra definitioner så att de egenskaper, hvilka tillkommo de rationella operationerna inom vårt tidigare talområde, såvidt möjligt bibehålla sin giltighet inom det utvidgade området. Tillämpningen af denna princip ställer sig i förevarande fall synnerligen enkel, ty vi hafva endast att undersöka hvilken form resultatet af den betraktade operationen skulle erhålla i händelse tecknet i för den imaginära enheten representerade ett reellt tal, samt att härefter se till om definitionslikheten $i^2 = -1$ möjligen medför någon reduktion af det erhållna uttrycket.

1°. För *additionen* ger oss ofvannämnda princip omedelbart följande

Definition. — *Med summan af tvenne komplexa tal,*

$$a + ib \text{ och } a' + ib',$$

förstås det tal,

$$(a+a')+i(b+b'),$$

i hvilket den reella delen är lika med summan af de gifna talens reella delar och koefficienten för enheten i lika med summan af motsvarande koefficienter i de gifna talen.

Exempelvis är

$$(1-3i)+(-4+i)=-3-2i.$$

Ur vår definition följer omedelbart att additionen är *kommutativ*, d. v. s. att

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a'+ib')+(a+ib).$$

Ty med summan i venstra membrum förstås det komplexa talet

$$(a+a')+i(b+b')$$

och med summan i högra membrum talet

$$(a'+a)+i(b'+b).$$

Men då kommutationslagen gäller för reella tal, är $a+a'=a'+a$ och $b+b'=b'+b$, och enligt definitionen i slutet af föregående paragraf äro de två summorna således lika.

På analogt sätt kontrolleras giltigheten af *associationslagen*:

$$((a+ib)+(a'+ib'))+(a''+ib'')=(a+ib)+((a'+ib')+(a''+ib'')),$$

hvilket läsaren själf bör utföra.

Vi kunna häraf sluta (jmf. n⁰ 85) att *additionen med komplexa tal följer samma regler som additionen med reella tal.*

2⁰. Vi fråga oss nu om man kan *subtrahera* ett gifvet tal $a'+ib'$ från ett annat $a+ib$, d. v. s. om det inom det komplexa området finnes ett tal $x+iy$ som uppfyller villkoret

$$a+ib=(a'+ib')+(x+iy).$$

Detta villkor kan, enligt föregående definition, skrifvas

$$a+ib=(a'+x)+i(b'+y),$$

och är således, enligt definitionen i slutet af n⁰ 93, ekvivalent med ekvationssystemet

$$a = a' + x, \quad b = b' + y.$$

Härur erhålles för x och y de fullt bestämda värdena

$$x = a - a', \quad y = b - b'.$$

Subtraktionen inom det komplexa talområdet är följaktligen alltid möjlig och entydig, och verkställes enligt formeln

$$(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b').$$

Speciellt må framhållas att det *motsatta* talet till $a + ib$, d. v. s. det tal som, adderadt till $a + ib$, ger summan 0, utgöres af det komplexa talet $-a - ib$.

3⁰. Vi gå till *multiplikationen* af två komplexa tal,

$$a + ib \quad \text{och} \quad a' + ib'.$$

Om vi ett ögonblick under i tänka oss en reell kvantitet och operera enligt de regler som gälla inom det reella talområdet, erhålles för produkten $(a + ib)(a' + ib')$ uttrycket

$$aa' + i^2 bb' + i(ab' + ba'),$$

hvilket på grund af likheten $i^2 = -1$ reducerar sig till

$$(aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Vi ledas sålunda till följande

Definition. — *Med produkten af de komplexa talen*

$$a + ib \quad \textit{och} \quad a' + ib'$$

förstås talet

(4) $$(aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Exempelvis är

$$(2 - 5i)(-1 + i) = 3 + 7i.$$

Uttrycket för produkten förenklas om en af faktorerna är reell. Om vi t. ex. antaga att $b' = 0$, erhålles

$$(4)' \qquad (a + ib)\, a' = aa' + iba'.$$

Om åter $a' = a$ och $b' = -b$, d. v. s. om de gifna talen äro konjugeradt komplexa, erhålles för deras produkt den enkla formeln

$$(4)'' \qquad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Ur vår definition följer vidare att *produkten har värdet* 0 *om någon af faktorerna är lika med* 0. Ty om vi t. ex. antaga $a + ib = 0$, är samtidigt $a = 0$ och $b = 0$, och såväl den reella delen som koefficienten för i i uttrycket (4) har då värdet 0.

Vi böra nu kontrollera att, på grund af den definition vi uppställt för produkten, multiplikationens grundegenskaper allmänt gälla inom det komplexa talområdet.

Kommutationslagen gäller, d. v. s. man har

$$(a + ib)(a' + ib') = (a' + ib')(a + ib).$$

Detta följer omedelbart däraf att, om man i uttrycket (4) låter a byta plats med a' och b med b', såväl den reella delen som koefficienten för i blir till sitt värde oförändrad.

På analogt sätt kontrolleras giltigheten af *associationslagen*:

$$\big((a + ib)(a' + ib')\big)(a'' + ib'') = (a + ib)\big((a' + ib')(a'' + ib'')\big).$$

Venstra membrum är nämligen lika med produkten

$$\big((aa' - bb') + i(ab' + ba')\big)(a'' + ib''),$$

och då denna utföres enligt ofvanstående definition erhålles till resultat talet

$$(aa'a'' - ab'b'' - a'b''b - a''bb') + i(aa'b'' + a'a''b + a''ab' - bb'b'').$$

Såväl den reella delen som koefficienten för i i detta tal är symmetrisk med afseende å de tre talparen a och b, a' och b', a'' och b'', d. v. s. förändras icke om man samtidigt låter t. ex. a byta plats med a'' och b med b''. Man sluter häraf att högra

membrum i den likhet det gäller att bevisa representeras af detta samma tal, hvilket läsaren uppmanas att kontrollera jämväl genom direkt uträkning.

Slutligen gäller äfven *distributionslagen*:

$$(a+ib)\big((a'+ib')+(a''+ib'')\big)=(a+ib)(a'+ib')+(a+ib)(a''+ib''),$$

hvilket vi öfverlemna åt läsaren att verificera.

Vi sluta häraf att *de s. 478 omnämnda allmänna egenskaperna hos multiplikationen äro giltiga jämväl inom det komplexa talområdet.*

4°. Vi gå till *divisionen* af två komplexa tal, $a+ib$ och $a'+ib'$. Det gäller att finna ett sådant tal $x+iy$, att, om $a'+ib'$ multipliceras med detsamma, till produkt erhålles talet $a+ib$:

(5) $$a+ib=(a'+ib')(x+iy).$$

Om multiplikationen i högra membrum utföres, antar detta villkor formen

$$a+ib=(a'x-b'y)+i(a'y+b'x),$$

och kan således ersättas med följande ekvationssystem mellan de reella obekanta x och y:

(6) $$\begin{cases} a'x-b'y=a, \\ b'x+a'y=b. \end{cases}$$

Systemets determinant[1]) är lika med $a'^2+b'^2$ och försvinner således blott om samtidigt $a'=0$ och $b'=0$, eller m. a. o. om divisorn $a'+ib'$ är lika med 0. Om detta inträffar har ekvationssystemet ingen lösning, såframt icke samtidigt $a=0$ och $b=0$ och således dividenden $a+ib$ försvinner, i hvilket fall ifrågavarande ekvationssystem är satisfieradt för alla värden af x och y.

Om divisorn $a'+ib'$ är skild från 0 och således äfven determinanten $a'^2+b'^2$ är olika 0, ger oss däremot ekvationssystemet (6) fullt bestämda värden för x och y, nämligen

---

[1]) Jmf. den första noten i slutet af boken.

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \quad y = \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2},$$

och dessa äro, såsom af vårt resonemang framgår, de enda reella värden som satisfiera villkoret (5). Vi kunna således utsäga följande resultat:

Divisionen inom det komplexa talområdet är alltid möjlig och entydig om divisorn är skild från 0, *och kvoten erhålles då enligt formeln*

$$(7) \qquad \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\,\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

Om divisorn har värdet 0 *är däremot divisionen omöjlig, såframt icke dividenden samtidigt försvinner, i hvilket fall kvoten är alldeles obestämd.*

Om $b' = 0$ och divisorn således är reell, erhålles för kvoten den enklare formeln

$$(7)' \qquad \frac{a + ib}{a'} = \frac{a}{a'} + i\,\frac{b}{a'},$$

som äfven direkt kan verificeras med stöd af (4)′.

Sedan en gång visats att kvoten existerar och är entydigt bestämd, kan dess värde enklare erhållas om man förlänger densamma med nämnarens konjugerade tal, utför multiplikationen i täljaren och nämnaren samt härefter använder formeln (7)′:

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')} = \frac{(aa' + bb') + i(ba' - ab')}{a'^2 + b'^2}$$

$$= \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \cdot \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

Att detta förfarande måste leda till riktigt resultat inses om man multiplicerar kvotens definitionslikhet (5) med talet $a' - ib'$, hvarvid resultatet med stöd af multiplikationens egenskaper kan skrifvas

$$(a + ib)(a' - ib') = \big((a' + ib')(a' - ib')\big)(x + iy).$$

Exempelvis erhålles

$$\frac{-7+4i}{1-i} = \frac{(-7+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-11-3i}{2} = -\frac{11}{2} - \frac{3}{2}i.$$

5⁰. Sedan vi sålunda definierat operationerna med komplexa tal och visat att de följa samma lagar som gälla inom det reella talområdet, vilja vi särskildt framhålla ett par viktiga satser hvilka enkelt erhållas ur det föregående.

Vi bevisa först följande fundamentala sats:

Produkten af ett ändligt antal faktorer har värdet 0 *alltid och endast om någon faktor är lika med* 0.

Af det föregående följer omedelbart att, om en faktor är lika med 0, produkten äfven har värdet 0. Ty vi hafva s. 513 direkt konstaterat detta för en produkt af två faktorer, och om faktorerna äro flere än två, kunna vi sammanfatta alla utom den som antagits lika med 0 till en enda faktor.

Vi antaga nu omvändt att produkten har värdet 0, och utgå från formeln för en produkt af två faktorer:

$$(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+ba').$$

För att detta uttryck skall vara 0, erfordras att likheterna

$$aa'-bb' = 0 \quad \text{och} \quad ab'+ba' = 0$$

bestå samtidigt. Då vi upphöja dem i kvadrat och addera resultaten, erhålles

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = 0.$$

Men den sats vi vilja bevisa gäller för reella tal, och vi kunna således sluta att åtminstone den ena af faktorerna a^2+b^2 och $a'^2+b'^2$ är lika med 0. Om $a^2+b^2=0$, har man $a=b=0$ och således $a+ib=0$, ur antagandet $a'^2+b'^2=0$ följer åter $a'=b'=0$ och således $a'+ib'=0$. Härmed är visadt att, om en produkt af två faktorer har värdet 0, någon faktor är lika med 0.

För att bevisa satsen allmänt använda vi fullständig induktion (jmf. s. 51). Vi antaga således satsen riktig för en

produkt af n faktorer, och visa att den då äfven gäller för en produkt af $n+1$ faktorer:

(8) $$\alpha_1 . \alpha_2 . \ldots . \alpha_{n+1} .$$

För detta ändamål behöfva vi endast skrifva denna produkt under formen

$$(\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n) . \alpha_{n+1} ,$$

i det vi tänka oss de n första faktorerna sammanfattade till en enda. Vi kunna nämligen då af det ofvan bevisade sluta att, om produkten har värdet 0, åtminstone den ena af faktorerna $(\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_n)$ och α_{n+1} är lika med 0. Men om faktorn $(\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_n)$ är lika med 0, försvinner åtminstone ett af talen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, eftersom vi antagit satsen riktig för en produkt af n faktorer. Om produkten (8) har värdet 0 är alltså en af dess faktorer 0, och vår sats är således riktig för en produkt af $n+1$ faktorer, h. s. b.

Då nu satsen direkt bevisats för $n = 2$, följer ur det sagda successivt att den gäller äfven för $n = 3, 4, 5, \ldots$

6°. En annan viktig anmärkning gäller frågan huru det resultat, som erhålles då man med ett antal gifna tal utför vissa rationella operationer, modifieras om nämnda tal ersättas med de konjugerade talen.

Om α och β äro tvenne godtyckliga tal inom det komplexa området och $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ deras konjugerade tal, följer ur de definitioner vi uppställt att äfven $\alpha + \beta$ och $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\alpha - \beta$ och $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$, $\alpha \beta$ och $\bar{\alpha} \bar{\beta}$, samt slutligen $\frac{\alpha}{\beta}$ och $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ hafva konjugerade värden, hvilket läsaren bör kontrollera.

Genom kombination af dessa resultat sluter man allmänt att, om uttrycket $R(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ är bildadt medels rationella operationer af talen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, och om dessas konjugerade tal betecknas med $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots, \bar{\lambda}$, det gifna uttrycket och uttrycket $R(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots, \bar{\lambda})$ hafva konjugerade värden.

Låtom oss speciellt betrakta ett polynom af variabeln x med *reella koefficienter*:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n .$$

Ur det sagda följer att mot två konjugerade värden af varia-

beln, $a+ib$ och $a-ib$, svara konjugerade värden af polynomet, så att

$$P(a+ib)=A+iB, \quad P(a-ib)=A-iB,$$

där A och B äro reella tal. Om vi antaga att $a+ib$ utgör en rot till ekvationen $P(x)=0$, d. v. s. att $P(a+ib)=0$, är $A=B=0$, hvaraf följer $A-iB=0$ eller $P(a-ib)=0$, och $a-ib$ utgör således äfven en rot till nämnda ekvation. Vi erhålla således följande viktiga sats:

Om en algebraisk ekvation med reella koefficienter har en komplex rot $a+ib$, utgör det konjugerade talet $a-ib$ äfven en rot till ekvationen.

Öfningsuppgifter:

1) Angif följande uttrycks värden (n är ett positivt helt tal):

$$\frac{1}{i},\ i^n,\ \frac{1}{i^n},\ (1\pm 2i)^3,\ \frac{5}{-3\pm 4i},\ \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2,\ (1+i)^n+(1-i)^n.$$

2) Undersök i hvilka fall summan, skillnaden, produkten eller kvoten af två komplexa tal har ett reellt värde.

3) Bilda de reella och de imaginära delarna af funktionerna

$$z^4,\ \frac{1}{z},\ \frac{z-1}{z+1},\ \frac{1}{z^2},$$

då man sätter $z=x+iy$, där x och y äro reella variabler. Insätt härefter $z=x-iy$, och kontrollera att funktionernas uttryck förbytas i de konjugerade uttrycken.

95. **Ett komplext tals modul och argument. Moivre's formel.** — Vid multiplikation och division af komplexa tal är det i flere fall fördelaktigt att bringa dessa tal under en annan form, för hvilken vi nu gå att redogöra.

1°. Om a och b äro tvenne reella tal, af hvilka åtminstone det ena är skildt från 0, kan man sätta (jmf. s. 102—103)

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi, \tag{9}$$

där r betecknar ett positivt tal, hvars värde är entydigt bestämdt, samt φ en vinkel som är bestämd på en heltalig multipel af 2π när. Villkoren (9) gifva oss nämligen, då de upphöjas i kvadrat och adderas, $r^2=a^2+b^2$ och således

(10) $$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

hvilken kvadratrot vi taga med *positivt* tecken. Genom insättning af detta värde för r erhålles ur (9)

(11) $$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Dessa likheter äro kompatibla, ty summan af kvadraterna på deras högra membra är lika med 1, och de bestämma således vinkeln φ på en heltalig multipel af 2π när. Denna vinkel blir entydigt bestämd om man ytterligare pålägger densamma t. ex. villkoret $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Ur villkoren (11) följer äfven

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a},$$

men kvadranten för vinkeln φ är härigenom ännu icke bestämd, utan bör man tillika observera tecknet för $\cos\varphi$ eller för $\sin\varphi$, hvilka tecken enligt (11) öfverensstämma med tecknen för a och b.

Ur det sagda sluta vi omedelbart till följande resultat:

Hvarje komplext tal $a + ib$ kan bringas under formen

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

där talet r, som är $\geqq 0$, bestämmes genom likheten (10) och vinkeln φ genom likheterna (11).

Talet r benämnes det komplexa talets *absoluta belopp* eller *modul*, och betecknas

$$|a + ib| \quad \text{eller} \quad \operatorname{mod}(a + ib).$$

Vinkeln φ åter kallas det gifna talets *argument*; vi använda för densamma beteckningen

$$\arg(a + ib).$$

Moduln af talet $a + ib$ har värdet 0 blott om $a = 0$ och $b = 0$, d. v. s. om talet självt har värdet 0. I hvarje annat fall är moduln ett positivt tal.

Om talet $a+ib$ har värdet 0, är dess argument φ alldeles obestämdt; är talet skildt från 0, är däremot dess argument genom likheterna (11) bestämdt på en multipel af 2π när.

Exempelvis erhålles för talet $1-i$

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\,,\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

hvarur följer

$$\varphi=-\frac{\pi}{4}\pm\text{ en heltalig multipel af } 2\pi.$$

Vi kunna således skrifva

$$(12)\qquad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Om speciellt $b=0$, i hvilket fall $a+ib$ reducerar sig till det reella talet a, är moduln r lika med $\sqrt{a^2}$, eller lika med det numeriska värdet af a. Villkoren (11) antaga åter formen $\cos\varphi=\frac{a}{|a|}$, $\sin\varphi=0$. Om talet a är positivt är alltså $\cos\varphi=1$, om a är negativt är $\cos\varphi=-1$. Argumentet af ett positivt reellt tal är således lika med 0, argumentet af ett negativt reellt tal lika med π, på en multipel af 2π när.

Exempelvis är

$$2=2(\cos 0+i\sin 0),\quad -2=2(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Om åter $a=0$ och vi således hafva ett rent imaginärt tal ib, erhålles $r=\sqrt{b^2}=$ det numeriska värdet af talet b, och villkoren (11) reducera sig till $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=\frac{b}{|b|}$, hvarur man sluter att $\varphi=\frac{\pi}{2}$ om $b>0$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ om $b<0$, på en multipel af 2π när.

Man finner sålunda

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\quad -3i=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Vi betona ännu följande resultat, som direkt framgår ur hvad vi sagt om ekvationssystemet (9) samt ur definitionen för komplexa tals likhet:

Om två komplexa tal $a+ib$ och $a'+ib'$ äro lika, hafva deras moduler samma värde och skillnaden mellan deras argument är (om talen äro $\neq 0$) lika med en heltalig mångfald af 2π; och om dessa villkor äro uppfyllda, äro omvändt talen lika.

2°. Enligt definitionen för produkten af tvenne komplexa tal, erhålles likheten

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2),$$

hvilken på grund af de trigonometriska funktionernas additionsteorem reducerar sig till

$$(13)\qquad (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

Å andra sidan följer ur regeln för kvotens beräkning

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi},$$

eller slutligen

$$(14)\qquad \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi),$$

och med stöd af denna formel och formeln (13) erhålles

$$(15)\qquad \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\big(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\big)$$
$$= \cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Om nu z_1 och z_2 äro två gifna komplexa tal och om vi skrifva dem under formen

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

erhålles för deras produkt och kvot enligt (13) och (15) omedelbart uttrycken:

$$(16)\qquad \begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).\end{aligned}$$

Vi utsäga dessa resultat i följande satser:

Produkten af två komplexa tal har till modul produkten af faktorernas moduler och till argument summan af faktorernas argument.

Kvoten af två komplexa tal har till modul kvoten af täljarens och nämnarens moduler samt till argument skillnaden mellan täljarens och nämnarens argument.

3°. Ur likheten (13) sluter man medels fullständig induktion följande allmännare resultat:

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n).$$

Härur erhålles speciellt, om man sätter $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi$, den eleganta formeln

$$(17) \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

hvilken efter sin upptäckare benämnes Moivre'*s formel.* Densamma gäller äfven om exponenten är ett negativt helt tal, ty enligt (17) och (14) erhålles

$$(17)' \quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$
$$= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi).$$

Formeln (17) gäller slutligen äfven för $n = 0$, om vi åt a^0 gifva betydelsen 1 äfven då basen a är ett komplext tal. Moivre'*s formel är således bevisad för hvarje vinkel* φ *och för hvarje helt tal* n.

Ur formeln (17) följer för den n^{te} potensen af ett komplext tal det enkla uttrycket

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Exempelvis erhålles (jmf. likheten (12))

$$(1-i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) = -32\,i.$$

4°. Med hjälp af MOIVRE's formel ernås alldeles enkelt några viktiga transformationer af de trigonometriska funktionerna, hvilkas härledning utan användande af komplexa tal skulle erfordra en vida längre kalkyl.

Om man utvecklar venstra membrum i (17) enligt binomialsatsen, är summan af de reella termerna lika med $\cos n\varphi$, summan af de imaginära termernas koefficienter lika med $\sin n\varphi$. På detta sätt blifva $\cos n\varphi$ och $\sin n\varphi$ uttryckta såsom polynom af $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$. De erhållna uttrycken kunna ännu transformeras medels likheten $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, och man finner sålunda allmänt att

$$\cos n\varphi = P_n(\cos\varphi), \quad \sin n\varphi = Q_n(\cos\varphi)\sin\varphi,$$

där P_n och Q_n äro polynom af $\cos\varphi$, hvilket resultat läsaren bör verificera.

Exempelvis erhålles för $n = 3$:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = (4\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi.$$

Omvändt kan med stöd af MOIVRE's formel hvarje positiv heltalig potens af $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$ uttryckas såsom en lineär funktion af $\cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \ldots$ eller af $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi, \sin 3\varphi, \ldots$. Om vi för korthetens skull sätta

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = q,$$

är enligt (14)

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = \frac{1}{q},$$

och ur dessa likheter erhålles genom addition och subtraktion

$$(18) \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(q - \frac{1}{q}\right).$$

Formlerna (17) och (17)' gifva oss likaså

$$(18)' \qquad \cos n\varphi = \frac{1}{2}\left(q^n + \frac{1}{q^n}\right), \quad \sin n\varphi = \frac{1}{2i}\left(q^n - \frac{1}{q^n}\right),$$

för hvarje helt tal n. De sökta formlerna erhållas om man

utvecklar den betraktade potensen af $\cos\varphi$ eller $\sin\varphi$ efter positiva och negativa potenser af q med hjälp af likheterna (18) och reducerar resultatet enligt likheterna (18)′.

Exempelvis erhålles på detta sätt

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{16}\left(q^4 + \frac{1}{q^4}\right) + \frac{1}{4}\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{3}{8},$$

$$\sin^5\varphi = \frac{1}{32i}\left(q^5 - \frac{1}{q^5}\right) - \frac{5}{32i}\left(q^3 - \frac{1}{q^3}\right) + \frac{5}{16i}\left(q - \frac{1}{q}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\sin 5\varphi - \frac{5}{16}\sin 3\varphi + \frac{5}{8}\sin\varphi.$$

Öfningsuppgifter:

1) Härled ur formlerna (16) villkoret för att produkten eller kvoten af två komplexa tal skall hafva ett positivt eller ett negativt reellt värde.

2) Angif följande komplexa tals moduler och argument:

$$-i,\ -7,\ \frac{8}{i},\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -2-2i,\ \cos x - i\sin x,\ \sin x \pm i\cos x.$$

3) Beräkna de absoluta beloppen af följande uttryck:

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i),\quad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

4) Beräkna medels logaritmer värdena af funktionerna

$$z^8 \quad \text{och} \quad \frac{z-1}{z+1}$$

för $z = 1{,}243 + 0{,}671\,i$.

5) Uttryck $\cos 5\varphi$ och $\sin 6\varphi$ genom potenser af $\sin\varphi$ och $\cos\varphi$.

6) Uttryck $\cos^5\varphi$, $\sin^6\varphi$ samt $\cos^3\varphi\sin\varphi$ genom siner eller cosiner af heltaliga multipler af φ.

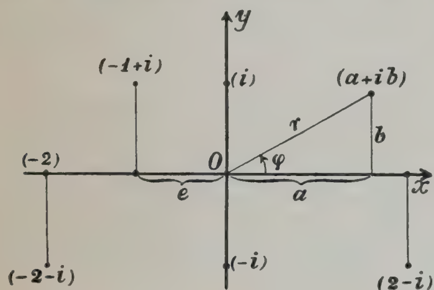
7) Bevisa medels formlerna (18)′ följande likheter:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi\nu}{n} = 0,\quad \sum_{\nu=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi\nu}{n} = 0,$$

$$1 + 2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi + \cdots + 2\cos n\varphi = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

96. **Geometrisk framställning af de komplexa talen samt af operationerna med dessa tal.** — I slutet af senaste kapitel sågo vi att man kan uppställa en entydig motsvarighet mellan de reella talen och punkterna på en rät linie. Vi skola nu visa att talen inom det komplexa området entydigt kunna afbildas på punkterna i ett plan, på sådant sätt att operationerna med nämnda tal motsvaras af alldeles enkla geometriska konstruktioner i planet.

1°. Vi välja i planet ett rätvinkligt koordinatsystem och fastställa en viss längdenhet e. Den sökta afbildningen erhålles då helt enkelt sålunda att *vi låta det komplexa talet* $a+ib$ *motsvaras af den punkt i planet hvars abskissa* x *har värdet* a *och hvars ordinata* y *har värdet* b. Mot hvarje gifven punkt (x, y) i planet svarar då omvändt ett bestämdt komplext tal, nämligen talet $x+iy$. Mot tvenne olika punkter svara tvenne olika tal, och omvändt, ty talen $a+ib$ och $a'+ib'$ äro enligt vår definition lika blott om samtidigt $a=a'$ och $b=b'$, och punkterna (a, b) och (a', b') sammanfalla å sin sida endast om dessa samma villkor äro uppfyllda. Motsvarigheten mellan talen inom det komplexa området och planets punkter är således *entydig*.



Är $b=0$ och det gifna talet således reellt, ligger den motsvarande punkten på x-axeln, hvilken därför äfven benämnes *den reella axeln*. Talet 0 motsvaras af origo, de positiva reella talen af punkter på x-axelns positiva hälft och de negativa reella talen af punkter på dess negativa hälft.

Är åter $a=0$, i hvilket fall vi hafva ett rent imaginärt tal ib, faller bildpunkten på y-axeln, i positiv eller negativ riktning från origo beroende på om $b>0$ eller $b<0$. På grund häraf benämnes y-axeln äfven *den imaginära axeln*.

Mot tvenne konjugerade tal, $a+ib$ och $a-ib$, svara punkter som ligga symmetriskt med afseende å x-axeln; tvenne motsatta tal, $a+ib$ och $-a-ib$, representeras åter af punkter som ligga symmetriskt med afseende å origo.

I vår afbildning erhålla jämväl moduln och argumentet af det komplexa talet en enkel geometrisk betydelse (jmf. figuren på föregående sida). Afståndet r från origo till *punkten* $a+ib$, såsom vi härefter kort benämna den punkt som svarar mot talet $a+ib$, har nämligen till mätetal uttrycket $\sqrt{a^2+b^2}$, hvilket utgör det komplexa talets modul. Om vi å andra sidan med φ beteckna den polära vinkeln för punkten $a+ib$, eller den vinkel dess radius-vector bildar med den positiva x-axeln, räknad så som den analytiska geometrin föreskrifver, erhålles omedelbart

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

och vid jämförelse med likheterna (11) sluta vi härur att vinkeln φ utgör det komplexa talets argument (på en multipel af 2π när).

Moduln och argumentet af ett komplext tal $a+ib$ representeras således geometriskt af de polära koordinaterna för den mot talet svarande punkten, hvars rätvinkliga koordinater äro a och b.

2°. Vi skola nu undersöka af hvilka geometriska konstruktioner operationerna med komplexa tal motsvaras i den ofvan beskrifna afbildningen.

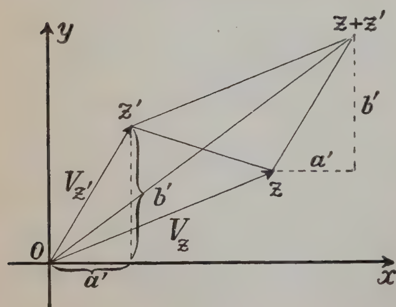
För *summan* af talen

$$z = a+ib \quad \text{och} \quad z' = a'+ib'$$

hafva vi uppställt definitionen

$$z+z' = (a+a')+i(b+b').$$

Denna summa representeras således geometriskt af den punkt i planet hvars koordinater äro $x = a+a'$ och $y = b+b'$. Om vi välja punkten z till origo för ett nytt koordinatsystem hvars axlar äro parallella med de gifna koordinataxlarna, har nämnda punkt i detta system koordinaterna $(a+a')-a = a'$ och $(b+b')-b = b'$. Häraf framgår omedelbart följande resultat:



Om från punkten z drages en sträcka som har samma längd och samma riktning som sträckan från origo till punkten z', motsvarar denna sträckas ändpunkt summan $z + z'$.

Detta resultat kan uttryckas kortare om vi göra bruk af begreppet *vektor*, hvilket definierats s. 8.

Vi införa såsom geometrisk representant för ett komplext tal $z = a + ib$, jämte punkten med koordinaterna $x = a, y = b$, vektorn från origo till denna punkt, hvilken vi beteckna med V_z. Denna vektors *längd* (d. v. s. sträckans mätetal i förhållande till längdenheten e) är, enligt hvad i slutet af momentet 1^0 visats, lika med moduln af talet z, och dess *riktningsvinkel*, d. v. s. den vinkel dess riktning bildar med x-axelns positiva riktning, är lika med argumentet af nämnda tal (på en multipel af 2π när).

Omvändt kan hvarje vektor i planet, dess begynnelsepunkt må vara hvilken som helst, betraktas såsom representerande ett komplext tal, nämligen det tal hvars modul är lika med vektorns längd och hvars argument är lika med dess riktningsvinkel. Detta tals reella del är då lika med vektorns projektion på x-axeln (uppmätt med längdenheten och tagen med behörigt tecken) och koefficienten för dess imaginära del lika med vektorns projektion på y-axeln.

I enlighet härmed representera tvenne vektorer samma tal, och betraktas alltså såsom sinsemellan *lika*, om de äro lika långa och hafva lika stora riktningsvinklar; den ena af dem kan då erhållas ur den andra genom en parallellförskjutning.

Vi hafva vidare att göra bruk af *geometrisk addition af två vektorer*, V_1 och V_2. Härmed förstås följande operation, hvilken spelar en viktig roll såväl i matematiken som i fysiken:

Utgående från slutpunkten af vektorn V_1 afsättes en ny vektor lika med V_2. Den vektor som har samma begynnelsepunkt som V_1 och samma slutpunkt som den nya vektorn, utgör då *den geometriska summan af vektorerna* V_1 *och* V_2.

Det resultat vi ofvan erhållit beträffande konstruktionen af summan $z + z'$ kan nu kort utsägas som följer:

Vektorn $V_{z+z'}$ *utgör den geometriska summan af vektorerna* V_z *och* $V_{z'}$.

Då vi låta addenderna byta plats, och således förskjuta vektorn V_z parallellt med sig själf så att dess begynnelsepunkt sammanfaller med slutpunkten af vektorn $V_{z'}$, erhålles samma resultat som i förra fallet. Om båda konstruktionerna utföras i samma figur, erhålles en parallellogram i hvilken vektorerna V_z och $V_{z'}$ utgöra två i en hörnpunkt sammanstötande sidor (jmf. figuren s. 526); den från samma hörnpunkt utgående diagonalen representerar vektorn $V_{z+z'}$.

Om vi under vektorerna V_z och $V_{z'}$ tänka oss *krafter*, föreställer vektorn $V_{z+z'}$ dessa krafters *resultant*.

Allmänt erhålles summan $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ genom geometrisk addition af vektorerna $V_{z_1}, V_{z_2}, \ldots, V_{z_n}$. Vi afsätta först från slutpunkten af V_{z_1} en vektor lika med V_{z_2}; denna vektors slutpunkt motsvarar $z_1 + z_2$. Utgående från denna punkt afsätta vi en vektor lika med V_{z_3}, hvarvid vi komma till punkten $z_1 + z_2 + z_3$. Från denna afsätta vi åter en vektor lika med V_{z_4}, o. s. v. De sålunda efter hvarandra afsatta vektorerna $V_{z_1}, V_{z_2}, \ldots, V_{z_n}$ bilda en från origo utgående polygonal linie, hvars andra ändpunkt motsvarar summan $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$. Vektorn från origo till denna ändpunkt föreställer resultanten till de krafter som kunna tänkas representerade genom vektorerna $V_{z_1}, V_{z_2}, \ldots, V_{z_n}$. Om speciellt $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$, sluter sig den polygonala linien; resultanten till de betraktade krafterna är således i detta fall lika med 0, d. v. s. krafterna hålla hvarandra i jämvikt.

3°. Sidorna i den triangel hvars hörnpunkter utgöras af origo samt punkterna z och $z + z'$ (jmf. figuren s. 526) hafva längderna $|z|, |z'|$ och $|z + z'|$. Enligt den kända satsen i elementargeometrin om triangelns sidor kunna vi härur omedelbart sluta till olikheterna

$$(19) \qquad \big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Ur den geometriska åskådningen framgår vidare omedelbart att likhetstecknet till höger gäller blott om vektorerna V_z och $V_{z'}$ hafva samma riktningsvinkel, eller m. a. o. om argumenten för talen z och z' äro lika eller skilja sig med en multipel af 2π, samt att likhetstecknet till venster gäller blott i

det fall då nämnda vektorers riktningar äro motsatta, d. v. s. då skillnaden mellan argumenten för talen z och z' är lika med π (på en multipel af 2π när).

Olikheterna (19), hvilka oupphörligt komma till användning i Analysen, erhållas äfven lätt på analytisk väg om de gifna talen skrifvas under formen

$$(20) \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi').$$

För talens summa erhålles då uttrycket

$$z + z' = (r\cos\varphi + r'\cos\varphi') + i(r\sin\varphi + r'\sin\varphi'),$$

hvarur följer

$$|z + z'|^2 = (r\cos\varphi + r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi + r'\sin\varphi')^2$$
$$= r^2 + 2rr'\cos(\varphi - \varphi') + r'^2.$$

Då $\cos(\varphi - \varphi')$ är $\leqq 1$ och $\geqq -1$, sluta vi härur

$$(r - r')^2 \leqq |z + z'|^2 \leqq (r + r')^2$$

eller

$$|r - r'| \leqq |z + z'| \leqq r + r',$$

där likhetstecknet till höger gäller om $\cos(\varphi - \varphi') = 1$, d. v. s. om $\varphi - \varphi'$ är lika med 0 eller en multipel af 2π, likhetstecknet till venster om $\cos(\varphi - \varphi') = -1$, d. v. s. om $\varphi - \varphi'$ är lika med π, på en multipel af 2π när. Vi återfinna således de tidigare resultaten.

Den senare af olikheterna (19) kan medels fullständig induktion, och äfven omedelbart med stöd af den ofvan angifna geometriska konstruktionen, generaliseras till en summa af ett godtyckligt antal termer. Man erhåller sålunda följande sats, som spelar en viktig roll i Analysen, och hvilken tidigare bevisats för reella tal (jmf. s. 42):

Det absoluta beloppet af en summa af ett ändligt antal termer är mindre än eller lika med summan af termernas absoluta belopp:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

Likhet äger rum blott i de fall då termernas argument alla äro lika eller skilja sig från hvarandra med multipler af 2π.

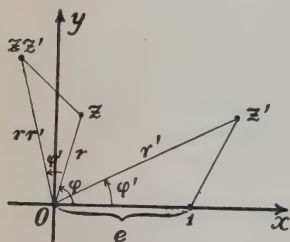
4°. *Skillnaden* mellan z och z' är det tal som, adderadt till z', ger till summa z. För att geometriskt representera $z - z'$ hafva vi således, enligt hvad i momentet 2° visats, att söka en sådan vektor att, om den geometriskt adderas till vektorn $V_{z'}$, till summa erhålles vektorn V_z. Men denna egenskap tillkommer, såsom ur figuren s. 526 omedelbart framgår, *vektorn från punkten z' till punkten z*, hvilken sammanfaller med den andra diagonalen i den tidigare betraktade parallellogrammen. Denna vektor representerar således skillnaden $z - z'$, hvilket för öfrigt direkt framgår därur att dess projektioner på koordinataxlarna hafva värdena $a - a'$ och $b - b'$. Särskildt bör observeras att *det absoluta beloppet af skillnaden $z - z'$ representeras af afståndet mellan punkterna z och z'.*

Man kommer till samma resultat om man uppfattar $z - z'$ såsom summa af talen z och $-z'$ och i enlighet härmed geometriskt adderar vektorerna V_z och $V_{-z'}$, hvilket läsaren uppmanas att själf utföra.

5°. Om talen z och z' skrifvas under formen (20), erhålles för deras *produkt* uttrycket

$$zz' = rr'\big(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\big).$$

Den motsvarande vektorn $V_{zz'}$ har således längden rr' och riktningsvinkeln $\varphi + \varphi'$, och kan följaktligen erhållas ur vektorn V_z, hvars längd är r och riktningsvinkel φ, sålunda att denna vrides kring origo om vinkeln $\varphi' = \arg z'$ och därefter förlänges i förhållandet $r' : 1$ eller $|z'| : 1$. Ur figuren framgår att den triangel hvars hörnpunkter äro $0, z$ och zz' är likformig med den triangel som har hörnpunkterna $0, 1, z'$, hvilken egenskap leder till den enklaste konstruktionen af punkten zz' då origo och punkterna $1, z, z'$ äro gifna.



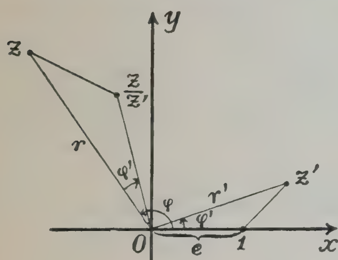
Om $\varphi' = 0$ och faktorn z' således är reell och positiv, erhålles vektorn $V_{zz'}$ genom att vektorn V_z förlänges i förhållandet $|z'| : 1$, utan att dess riktning ändras.

Är åter $r' = 1$ och således $z' = \cos\varphi' + i\sin\varphi'$, framgår vektorn $V_{zz'}$ ur V_z genom en vridning kring origo om vinkeln φ'.

6°. Vi betrakta slutligen *kvoten* af talen (20), för hvilken erhålles likheten

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')\right).$$

Ur denna framgår att vektorn från origo till punkten $\frac{z}{z'}$ kan erhållas sålunda att vektorn V_z vrides kring origo om vinkeln $-\varphi' = -\arg z'$ och därefter förlänges i förhållandet $1 : |z'|$. Konstruktionen utföres åter enklast med hjälp af likformiga trianglar, ty ur närstående figur framgår att triangeln med hörnpunkterna $0, z, \frac{z}{z'}$ är likformig med den triangel hvars hörnpunkter äro $0, z', 1$.



Öfningsuppgifter:

1) En liksidig triangel har origo till medelpunkt och punkten $z = 1$ såsom en hörnpunkt. Hvilka komplexa tal motsvara triangelns öfriga hörnpunkter?

2) Vi betrakta alla de tal z inom det komplexa området som uppfylla villkoret $|z - z_0| = r$, eller villkoret $|z - z_0| < r$, där r är ett positivt tal och z_0 ett gifvet komplext tal. Huru ligga de motsvarande punkterna i z-planet?

3) Huru konstrueras följande uttryck, då längdenheten och punkten z äro gifna:

$$1 \pm z,\ z \pm i,\ \frac{z}{5},\ -2z,\ iz,\ \frac{z}{i},\ (1+i)z,\ z^2,\ \frac{1}{z}?$$

4) Konstruera geometriskt de punkter som motsvara de heltaliga potenserna af uttrycken $\cos\varphi + i\sin\varphi$ och $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Betrakta särskildt det fall då $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, där n är ett positivt helt tal.

5) Sök den geometriska orten för den punkt i planet hvars motsvarande tal z uppfyller något af följande villkor:

$a)$ $|(z-z_1)(z-z_2)|$ = en positiv konstant;

$b)$ $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|$ = en positiv konstant;

$c)$ $\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)$ = en reell konstant.

Härvid äro z_1 och z_2 komplexa tal som representeras af två gifna punkter i planet.

97. **Ekvationen af andra graden. Speciella ekvationer af fjärde graden som kunna återföras till ekvationer af andra graden.** — Sedan vi numera behärska de komplexa talen och operationerna med dessa tal, skola vi visa att den ofullkomlighet och den brist på harmoni som kännetecknade ekvationsläran så länge vi rörde oss inom det reella talområdet (jmf. s. 508), definitivt aflägsnats genom den utvidgning af talbegreppet som vi företagit, och att denna utvidgning således medfört afsedt resultat.

1°. Vi betrakta först den speciella ekvationen

(21) $$z^2 = a + ib$$

och skola visa att, om $a + ib \neq 0$, denna ekvation alltid har två olika rötter, hvilka sammanfalla om $a + ib = 0$. Dessa rötter utgöra, enligt rotbeteckningen, värdena af uttrycket $\sqrt{a+ib}$.

Om vi sätta $z = x + iy$, där x och y beteckna reella tal, antar ekvationen (21) formen

$$x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib.$$

Densamma är således, enligt definitionen för komplexa tals likhet, uppfylld alltid och endast om x och y verificera de två ekvationerna

(22) $$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b,$$

och vi hafva följaktligen att söka de reella lösningarna x, y till detta ekvationssystem.

Då ekvationerna (22) upphöjas i kvadrat och adderas, erhålles $(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$, hvarur följer $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi böra taga det positiva värdet af denna kvadratrot, ty då

x och y enligt antagandet äro reella är $x^2 + y^2 > 0$. De sökta lösningarna till systemet (22) verificera således ekvationerna $x^2 - y^2 = a$, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, ur hvilka erhålles

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

och alltså

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Omvändt satisfiera dessa värden x, y, huru än tecknen väljas, ekvationerna $x^2 - y^2 = a$ samt $(2xy)^2 = b^2$. Men för att ekvationen $2xy = b$ skall vara uppfylld, måste tecknen kombineras så att produkten xy erhåller samma tecken som talet b har, hvilket tecken vi utmärka med sign b (af signum = tecken). Om vi i uttrycket för x välja tecknet $+$, böra vi således i uttrycket för y välja tecknet sign b, och likaså höra de motsatta tecknen tillsammans.

Systemet (22) är alltså satisfieradt för två reella värdepar x, y och den gifna ekvationen (21) har följaktligen två rötter, hvilka kunna sammanfattas i uttrycket

$$(23) \qquad z = \pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + (\operatorname{sign} b)\, i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\},$$

där alla kvadratrötter hafva positiva värden. Dessa två rötter äro motsatta, och sammanfalla således blott om de båda äro 0, hvilket inträffar om $a = b = 0$ och alltså $a + ib = 0$.

Om $b = 0$, i hvilket fall ekvationen (21) har formen $z^2 = a$, där a är ett reellt tal, är $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} =$ det numeriska värdet af a, och rötterna (23) reducera sig således till $\pm\sqrt{a}$ om $a > 0$, till $\pm i\sqrt{-a}$ om $a < 0$.

2°. Den geometriska representationen af rötterna till likheten (21) framgår enklast om vi skrifva

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

För att nämnda likhet skall bestå, erfordras (jmf. s. 521) att

talen z^2 och $a+ib$ hafva lika stora moduler samt att skillnaden mellan deras argument är lika med en heltalig multipel af 2π. Detta ger oss för ϱ och ψ villkoren

$$\varrho^2 = r, \quad 2\psi = \varphi + n \,.\, 2\pi,$$

där n är ett godtyckligt helt tal, och ur dessa erhålles

$$\varrho = \sqrt{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{2} + n\pi,$$

och således

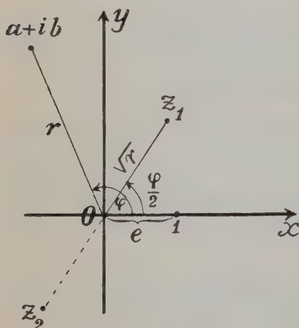
$$z = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + n\pi\right)\right).$$

För alla jämna tal n antar detta uttryck samma värde som för $n = 0$, för alla udda tal n samma värde som för $n = 1$, och vi erhålla sålunda för rötterna till (21) följande nya uttryck:

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right) = -z_1.$$

Om vi fixera argumentet φ af talet $a+ib$ genom villkoret $0 \leqq \varphi < 2\pi$, utgör φ riktningsvinkel för vektorn V_{a+ib} från origo till punkten $a+ib$. För att konstruera punkten z_1 hafva vi att halfvera denna vinkel samt att på halfveringslinien, utgående från origo, afsätta en sträcka lika med $\sqrt{r}$, eller lika med medelproportionalen mellan längdenheten e och längden r af vektorn V_{a+ib}. Punkten z_2 ligger symmetriskt till z_1 med afseende å origo.



3°. Vi kunna nu äfven lösa den allmänna ekvationen

$$(24) \qquad a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0,$$

koefficienterna a_0, a_1, a_2 må vara hvilka tal som helst inom det komplexa området. Ty man har identiskt, om $a_0 \neq 0$,

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = a_0\left(z^2 + \frac{a_1}{a_0} z + \frac{a_2}{a_0}\right)$$

$$= a_0\left(\left(z + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{(2a_0)^2}\right),$$

och (24) har således samma lösningar som ekvationen

$$\left(z + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{(2a_0)^2},$$

d. v. s. lösningarna

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0},$$

där kvadratroten beräknas såsom ofvan visats. Dessa lösningar sammanfalla om $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$.

4°. Vi skola i detta sammanhang behandla några speciella fall då ekvationen af fjärde graden

(25) $$P(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$$

låter återföra sig till kvadratiska ekvationer.

Detta inträffar främst om $a_1 = a_3 = 0$. Ty ekvationen (25) har då formen

(25)′ $$a_0 z^4 + a_2 z^2 + a_4 = 0$$

och kan följaktligen genom substitutionen $z^2 = x$ reduceras till den kvadratiska ekvationen

$$a_0 x^2 + a_2 x + a_4 = 0.$$

Om dennas rötter äro x_1 och x_2, har (25)′ till rötter uttrycken $\pm\sqrt{x_1}$ och $\pm\sqrt{x_2}$, hvilka beräknas så som i momentet 1° visats.

Andra fall då en reduktion af ekvationen (25) är möjlig framgå ur identiteten

(26) $$\frac{P(z)}{z^2} = \left(a_0 z^2 + \frac{a_4}{z^2}\right) + \left(a_1 z + \frac{a_3}{z}\right) + a_2.$$

Vi antaga först

$$a_4 = a_0, \quad a_3 = a_1;$$

nämnda identitet kan då skrifvas

$$\frac{P(z)}{z^2} = a_0\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + a_1\left(z + \frac{1}{z}\right) + a_2,$$

och om vi införa beteckningen

$$z + \frac{1}{z} = x, \text{ hvaraf följer } z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2,$$

reducerar den sig till

$$\frac{P(z)}{z^2} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 - 2a_0.$$

Vi erhålla således rötterna till ekvationen

$$(25)'' \qquad a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

om vi först söka rötterna x_1 och x_2 till

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 - 2a_0 = 0$$

och därefter lösa hvardera af ekvationerna $z + \frac{1}{z} = x_1$ och $z + \frac{1}{z} = x_2$, hvilka kunna skrifvas

$$z^2 - x_1 z + 1 = 0, \quad z^2 - x_2 z + 1 = 0.$$

Vi hafva således att lösa endast ekvationer af andra graden.

Om vi med z_1, z_2 beteckna rötterna till den förra och med z_3, z_4 rötterna till den senare af ofvanstående ekvationer, är $z_1 z_2 = 1$, $z_3 z_4 = 1$, hvaraf följer $\frac{1}{z_1} = z_2$, $\frac{1}{z_2} = z_1$, $\frac{1}{z_3} = z_4$, $\frac{1}{z_4} = z_3$. Ekvationen (25)'' har således den egenskapen att det reciproka värdet af hvilken som helst af dess rötter åter utgör en rot, hvilket för öfrigt direkt framgår därur att för ekvationens venstra membrum $P(z)$ gäller den identiska likheten

$$z^4 P\left(\frac{1}{z}\right) = P(z).$$

Hvarje ekvation som besitter sagda egenskap benämnes en *reciprok* ekvation.

Vi antaga slutligen $a_4 = a_0, a_3 = -a_1$, i hvilket fall den gifna ekvationen (25) har formen

$$(25)''' \qquad a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 - a_1 z + a_0 = 0.$$

Identiteten (26) kan då skrifvas

$$\frac{P(z)}{z^2} = a_0\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + a_1\left(z - \frac{1}{z}\right) + a_2$$

och öfvergår genom substitutionen $z - \frac{1}{z} = x$ i följande:

$$\frac{P(z)}{z^2} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + 2a_0.$$

Rötterna till (25)''' erhållas alltså om man först söker rötterna x_1, x_2 till ekvationen

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + 2a_0 = 0$$

och därefter löser ekvationen $z - \frac{1}{z} = x_1$ samt ekvationen $z - \frac{1}{z} = x_2$, hvilka kunna skrifvas

$$z^2 - x_1 z - 1 = 0, \quad z^2 - x_2 z - 1 = 0.$$

Man sluter häraf att, om z är en rot till ekvationen (25)''', $-\frac{1}{z}$ äfven är det, såsom jämväl direkt framgår ur identiteten

$$z^4 P\left(-\frac{1}{z}\right) = P(z),$$

där $P(z)$ betecknar ekvationens venstra membrum.

Öfningsuppgifter. Lös fullständigt följande ekvationer:

1) $z^2 + 2(1+i)z + 1 - i = 0$;

2) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$;

3) $2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 5z + 2 = 0$;

4) $z^5 - 1 = 0$.

98. **Binomiska ekvationer**. — Af grundläggande betydelse för algebran äro de s. k. *binomiska ekvationerna*, hvilka hafva formen

$$(27) \qquad z^n = \alpha,$$

där n är ett positivt helt tal och α ett godtyckligt tal inom det komplexa området. Om $\alpha = 0$, är $z = 0$ det enda värde som satisfierar ekvationen (27). Vi skola visa att, om $\alpha \neq 0$, denna ekvation har n olika rötter, eller, annorlunda uttryckt, att $\sqrt[n]{\alpha}$ har n olika värden.

1°. Vi skrifva högra membrum i (27) under formen

$$(28) \qquad \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

där vi kunna antaga $0 \leq \varphi < 2\pi$, och sätta likaledes

$$z = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

hvarur enligt Moivre's formel följer

$$z^n = \varrho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att talen z^n och α skola vara lika är (jmf. s. 521) att deras moduler hafva samma värde och deras argument äro lika eller skilja sig med en heltalig multipel af 2π. Vi erhålla således för ϱ och ψ likheterna

$$\varrho^n = r, \quad n\psi = \varphi + k \,.\, 2\pi,$$

där k kan vara hvilket helt tal som helst, positivt, negativt eller noll, och dessa likheter gifva oss omedelbart

$$\varrho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n},$$

där vi hafva att välja det positiva värdet af $\sqrt[n]{r}$, hvilket är entydigt bestämdt (jmf. s. 92). Ekvationen (27) satisfieras således af de värden hvilka uttrycket

$$(29) \qquad \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

antar då för k efterhand insättas alla möjliga hela tal, och endast af dessa värden. Det frågas huru många och hvilka af ifrågavarande värden äro sinsemellan olika.

Vi betrakta två olika hela tal, k och k', och de mot dem svarande värdena af uttrycket (29). Dessa värden äro enligt s. 521 lika blott om skillnaden mellan deras argument, $\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$ och $\frac{\varphi}{n} + k' \cdot \frac{2\pi}{n}$, är lika med en heltalig multipel af 2π, alltså om

$$(k - k')\frac{2\pi}{n} = h \,.\, 2\pi \quad \text{och således} \quad \frac{k - k'}{n} = h,$$

där h är ett helt tal, eller, annorlunda uttryckt, *om skillnaden $k - k'$ är exakt divisibel med n.*

Häraf följer omedelbart att de värden, hvilka uttrycket (29) antar då man för k efterhand insätter de n hela talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$, äro sinsemellan olika, ty skillnaden mellan hvilka två som helst af dessa hela tal är numeriskt mindre än n, och är således icke divisibel med n. Men härmed hafva vi äfven funnit alla de värden nämnda uttryck kan antaga för heltaliga värden af k. Ty om k_1 är ett gifvet helt tal och om vi med m beteckna det hela tal som är lika med eller närmast mindre än $\frac{k_1}{n}$, så att $m \leqq \frac{k_1}{n} < m + 1$ eller $mn \leqq k_1 < mn + n$, kunna vi skrifva $k_1 = mn + \mu$ där μ är ett af talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$; då skillnaden $k - \mu = mn$ är divisibel med n, är följaktligen värdet af uttrycket (29) för $k = k_1$ detsamma som för $k = \mu$, och således lika med ett af de ofvan betraktade n värdena.

Vi hafva härmed bevisat följande resultat:

Den binomiska ekvationen

$$z^n = \alpha = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

har, om $\alpha \neq 0$, n olika rötter, hvilka framgå ur uttrycket (29) då åt k efterhand gifvas värdena $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2°. Af speciellt intresse är det fall då $\alpha = 1$ och den binomiska ekvationen således har formen

$$(27)' \qquad z^n = 1.$$

I likheten (28) är då $r = 1$ och $\varphi = 0$, och enligt (29) erhålla vi således för ofvanstående ekvations rötter uttrycken

$$(29)' \qquad \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Men enligt MOIVRE's formel är

$$\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}\right)^k,$$

och om vi införa beteckningen

$$(30) \qquad \varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n},$$

kunna vi således utsäga följande resultat:

Rötterna till ekvationen $z^n = 1$ kunna skrifvas under formen

$$(31) \qquad 1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{n-1},$$

där ε_n betecknar uttrycket (30).

Dessa rötter utgöra de olika värdena af $\sqrt[n]{1}$, och benämnas därför *de n^{te} enhetsrötterna.* Om vi fortsätta räckan (31), upprepar den sig periodiskt, ty man erhåller successivt

$$\varepsilon_n^n = 1, \varepsilon_n^{n+1} = \varepsilon_n, \varepsilon_n^{n+2} = \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{2n-1} = \varepsilon_n^{n-1},$$

$$\varepsilon_n^{2n} = 1, \varepsilon_n^{2n+1} = \varepsilon_n, \text{ o. s. v.}$$

Vi gå tillbaka till ekvationen (27). Om denna ekvation är satisfierad för $z = z_0$, satisfieras den äfven af värdet $z = z_0 \varepsilon_n^k$, k må vara hvilket helt tal som helst, ty man har

$$(z_0 \varepsilon_n^k)^n = z_0^n . (\varepsilon_n^n)^k = \alpha .$$

Häraf sluta vi:

Om z_0 är en godtycklig rot till ekvationen $z^n = \alpha$, representeras samtliga rötter till denna ekvation af uttrycken

$$z_0, \ z_0 \varepsilon_n, \ z_0 \varepsilon_n^2, \ldots, z_0 \varepsilon_n^{n-1}.$$

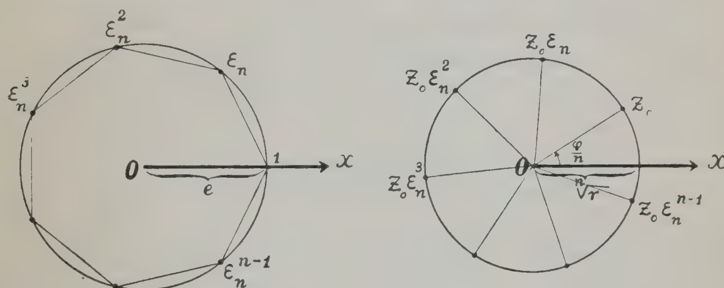
Dessa n uttryck satisfiera nämligen den gifna ekvationen, enligt hvad just visades, och äro sinsemellan olika, eftersom talen (31) äro olika och $z_0 \neq 0$.

3°. Vi skola nu geometriskt tolka de ofvan erhållna resultaten, och göra början med rötterna (31) till ekvationen $z^n = 1$. Det absoluta beloppet af enhvar af dessa rötter är lika med 1, hvilket framgår såväl ur uttrycken (29)′ som äfven direkt ur själfva ekvationen, medan deras argument i ordning hafva värdena

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot$$

Vi erhålla således följande geometriska motsvarighet:

Om periferin af enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ delas i n lika stora delar, utgående från punkten $x = 1, y = 0$, representera delningspunkterna geometriskt rötterna till ekvationen $z^n = 1$.



Vi hafva härmed ernått ett synnerligen intressant sammanhang mellan den geometriska uppgiften att i en cirkel inskrifva en reguliär n-hörning, och den algebraiska uppgiften att finna rötterna till ekvationen $z^n = 1$.

En liknande geometrisk tolkning erhålles för rötterna till den allmänna ekvationen (27). Vi utgå från roten

$$(32) \qquad z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

hvilken erhålles ur (29) för $k = 0$. Vektorn V_{z_0} från origo till den punkt i planet som representerar denna rot har längden $\sqrt[n]{r}$ och riktningsvinkeln $\frac{\varphi}{n}$. De öfriga rötterna till

(27) framgå ur z_0 genom multiplikation med faktorerna $\varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{n-1}$, hvilka alla hafva moduln 1 medan deras argument i ordning äro lika med $\frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$, och vektorerna från origo till de punkter som representera dessa rötter erhållas således ur vektorn V_{z_0} då denna vrides kring origo om nämnda vinklar (jmf. s. 531). Vi komma således till följande resultat (jmf. den senare af ofvanstående figurer):

Rötterna till ekvationen

$$z^n = \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

representeras geometriskt af hörnpunkterna i den reguliära n-hörning som är inskrifven i cirkeln med origo såsom medelpunkt och radien $\sqrt[n]{r}$, *och i hvilken en hörnpunkt sammanfaller med punkten (32).*

4°. Vi hafva ofvan erhållit rötterna till ekvationen $z^n = 1$ uttryckta medels trigonometriska funktioner. I den högre algebran visas emellertid att dessa rötter äfven kunna framställas *i algebraisk form*, d. v. s. genom uttryck bildade medels rationella operationer samt rotutdragning. Af speciellt intresse äro de fall då ifrågavarande uttryck icke innehålla andra radikaler än kvadratrötter, ty de motsvarande punkterna i planet kunna då geometriskt konstrueras medels passare och lineal. GAUSS har visat att detta inträffar, för udda värden af n, endast då n är ett primtal af formen $2^{2^k} + 1$, eller lika med produkten af två eller flere *olika* primfaktorer af denna form. De första af dessa s. k. GAUSS'iska primtal äro $3, 5, 17, 257, 65537$.

Medels passare och lineal kunna således de och endast de reguliära polygoner konstrueras, hvilkas sidoantal utgör en potens af 2, eller är lika med något af talen

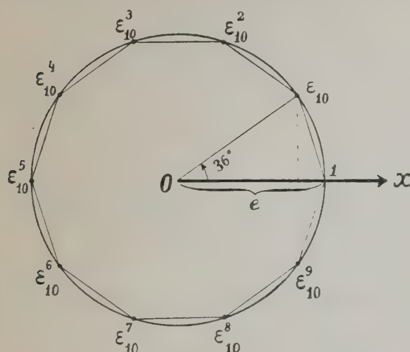
$$3,\ 5,\ 3.5 = 15,\ 17,\ 3.17 = 51,\ 5.17 = 85,$$

$$3.5.17 = 255,\ 257,\ 3.257 = 771,\ \text{o. s. v.}$$

eller lika med produkten af något af dessa tal och en potens af 2.

Vi ingå icke här på bevisen för dessa intressanta resultat, hvilka förutsätta ganska omfattande kunskaper i algebran, utan åtnöja oss med att visa huru man på algebraisk väg återfinner ett kändt resultat från elementargeometrin, nämligen den reguliära tiohörningens konstruktion.

Om enhetscirkelns periferi delas i tio lika stora delar, utgående från punkten $x = 1, y = 0$, representera delningspunkterna såsom ofvan visats rötterna till den binomiska ekvationen $z^{10} = 1$. Då



$$z^{10} - 1 = (z^5 - 1)(z^5 + 1),$$

sönderfaller denna ekvation i $z^5 - 1 = 0$ och $z^5 + 1 = 0$. Rötterna till $z^5 - 1 = 0$ representeras såsom vi veta af hörnpunkterna i den inskrifna reguliära femhörning som erhålles då man utgår från punkten $x = 1, y = 0$, och äro således lika med $1, \varepsilon_{10}^2, \varepsilon_{10}^4, \varepsilon_{10}^6, \varepsilon_{10}^8$, där

$$\varepsilon_{10} = \cos\frac{2\pi}{10} + i\sin\frac{2\pi}{10} = \cos 36^0 + i\sin 36^0.$$

Ekvationen $z^5 + 1 = 0$ har följaktligen till rötter de tal som representeras af de öfriga hörnpunkterna i den reguliära tiohörningen, alltså talen $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{10}^3, \varepsilon_{10}^5, \varepsilon_{10}^7, \varepsilon_{10}^9$. Af dessa är ε_{10}^5 lika med -1, och vi sluta häraf att $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{10}^3, \varepsilon_{10}^7, \varepsilon_{10}^9$ utgöra rötter till ekvationen

$$(33) \qquad \frac{z^5+1}{z+1} = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

Detta är en reciprok ekvation af fjärde graden, och vi kunna således genom substitutionen $z + \frac{1}{z} = x$ reducera densamma till en kvadratisk ekvation (jmf. s. 536). Denna blir

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

och dess rötter äro

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Rötterna till (33) erhållas härefter ur ekvationerna

$$z^2 - x_1 z + 1 = 0, \quad z^2 - x_2 z + 1 = 0.$$

Den första af dessa satisfieras af värdena

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

och den senares rötter äro

$$z_3 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ur de reella och de imaginära delarnas tecken sluter man att

$$z_1 = \varepsilon_{10}, \quad z_2 = \varepsilon_{10}^9, \quad z_3 = \varepsilon_{10}^3, \quad z_4 = \varepsilon_{10}^7.$$

Abskissan för punkten ε_{10} är således lika med den reella delen af roten z_1, d. v. s. lika med

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\right),$$

hvarur dess konstruktion med passare och lineal omedelbart framgår.

Ur ofvanstående resultat framgår likaledes den reguliära tiohörningens sida. Denna utgör nämligen afståndet mellan punkterna ε_{10} och 1, och dess mätetal s är alltså (jmf. s. 530) lika med det absoluta beloppet af skillnaden

$$\varepsilon_{10} - 1 = z_1 - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Vi erhålla sålunda

$$s^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

hvarur för s följer det kända uttrycket

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2},$$

hvilket leder till den kända geometriska konstruktionen.

Öfningsuppgifter:

1) Härled algebraiskt och geometriskt rötterna till följande ekvationer:

$$x^3 = 1\,,\quad x^3 = -1\,,\quad x^4 = 1\,,\quad x^4 = -1\,,\quad x^{12} = 1\,.$$

2) Angif i trigonometrisk och i algebraisk form de olika värdena af följande rotuttryck samt motsvarande punkters läge:

$$\sqrt[3]{8},\quad \sqrt[3]{-8},\quad \sqrt{-i},\quad \sqrt[4]{-4}\,,\quad \sqrt[4]{i},$$

$$\sqrt[5]{32}\,,\quad \sqrt[3]{i}\,,\quad \sqrt[3]{-1+i},\quad \sqrt[3]{1+i}\,.$$

3) Bevisa att summan af de m^{te} potenserna af rötterna till ekvationen $z^n = 1$ är lika med 0 om det hela talet m icke är divisibelt med n, men lika med n om m är divisibelt med n.

99. **Ekvationen af tredje graden.** — En ekvation af tredje graden med den obekanta x kan bringas under formen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{34}$$

där koefficienterna a, b, c kunna vara hvilka tal som helst inom det komplexa området. Såsom tidigare framhållits (jmf. s. 20), kan man förenkla ekvationen genom att substituera $x = z - \frac{a}{3}$. Härvid erhålles nämligen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = z^3 + pz + q\,,$$

där p och q hafva värdena

$$p = b - \frac{1}{3}a^2\,,\quad q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3\,.$$

Man erhåller således den gifna ekvationens rötter om man löser ekvationen

(35) $$z^3 + pz + q = 0$$

och från dennas rötter subtraherar $\frac{a}{3}$.

1°. Den klassiska metoden för lösningen af ekvationen (35) består i att ersätta den obekanta z med summan af två nya obekanta u och v:

(36) $$z = u + v\,.$$

Genom denna substitution erhålles, om termerna sammanfattas på lämpligt sätt,

$$z^3 + pz + q = u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v)\,.$$

Om u och v bestämmas så att de uppfylla de två villkoren $u^3 + v^3 + q = 0$ och $3uv + p = 0$, hvilka kunna skrifvas

(37) $$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\,, \\ uv = -\frac{p}{3}\,, \end{cases}$$

utgör således $z = u + v$ en rot till ekvationen (35).

Ur den senare af ekvationerna (37) följer

(37)′ $$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

och enligt denna likhet och den förra af ekvationerna (37) erhålles

$$(x - u^3)(x - v^3) = x^2 - (u^3 + v^3)\,x + u^3 v^3$$
$$= x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Om u och v satisfiera systemet (37), utgöra således u^3 och v^3 rötter till den kvadratiska ekvationen

(38) $$x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0\,.$$

Vi betrakta nu omvändt de binomiska likheterna

(39) $$\begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,, \\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,. \end{cases}$$

Den i dessa likheter ingående kvadratroten beräknas såsom i n^0 97 utförligt förklarats. Det är likgiltigt hvilket af dess två värden vi välja, ty om det ena värdet ersättes med det andra byta endast u och v plats, och summan $u+v$ förändras härvid icke.

Om u_0 är en godtycklig rot till den förra och v_0 en godtycklig rot till den senare af ekvationerna (39), kunna enligt n^0 98 den förra ekvationens tre rötter skrifvas under formen

(40) $$u_0\,,\quad u_0\,\varepsilon_3\,,\quad u_0\,\varepsilon_3^2\,,$$

och den senare ekvationens rötter under formen

(41) $$v_0\,,\quad v_0\,\varepsilon_3\,,\quad v_0\,\varepsilon_3^2\,,$$

där ε_3 och ε_3^2 hafva värdena

(42) $$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\ \varepsilon_3^2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\end{aligned}$$

Hvarje värdepar u, v, i hvilket u är något af talen (40) och v något af talen (41), satisfierar ekvationerna (39), och således äfven likheten (37)$'$ samt den förra af ekvationerna (37). Men vi måste se till att jämväl den senare af dessa ekvationer blir satisfierad.

För detta ändamål fixera vi först en rot u_0 till den förra af ekvationerna (39), och välja härefter v_0 så att $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$, d. v. s. vi sätta

(43) $$v_0 = -\frac{p}{3u_0}\,.$$

Då utgör v_0 en fullt bestämd rot till den senare af ekvationerna (39), ty

$$v_0^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u_0^3} = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,,$$

och om högra membrum förlänges med uttrycket

$$-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

reducerar sig denna likhet till

$$v_0^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Om u_0 och v_0 fixerats på detta sätt, kunna vi på grund af likheten $\varepsilon_3^3=1$ omedelbart sluta att de kombinationer af värdena (40) och (41), hvilka samtidigt satisfiera båda ekvationerna (37), äro följande tre:

$$u=u_0\,,v=v_0\,;\quad u=u_0\varepsilon_3\,,v=v_0\varepsilon_3^2\,;\quad u=u_0\varepsilon_3^2\,,v=v_0\varepsilon_3\,.$$

Den kubiska ekvationen (35) satisfieras således af värdena:

$$(44)\quad z_1=u_0+v_0\,,\quad z_2=u_0\varepsilon_3+v_0\varepsilon_3^2\,,\quad z_3=u_0\varepsilon_3^2+v_0\varepsilon_3\,.$$

Att vi härmed funnit alla rötter till ekvationen (35) kan lätt direkt kontrolleras med stöd af identiteten

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=$$

$$z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3\,.$$

Ty om vi för z_1, z_2, z_3 insätta uttrycken (44), erhålla vi medels en enkel kalkyl, med hjälp af relationerna $\varepsilon_3^3=1$ och $1+\varepsilon_3+\varepsilon_3^2=0$,

$$z_1+z_2+z_3=0\,,$$

$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=-3u_0v_0\,,$$

$$z_1z_2z_3=u_0^3+v_0^3\,,$$

och således, då värdena u_0, v_0 satisfiera ekvationerna (37)

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3+pz+q\,.$$

Enligt satsen s. 516 försvinner alltså polynomet z^3+pz+q för värdena (44), och endast för dessa värden.

Med användande af rotbeteckningen kunna vi skrifva

$$(45)\quad u_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad v_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

och vårt resultat kan då utsägas som följer:

Den kubiska ekvationen

$$z^3 + pz + q = 0$$

har tre rötter, och dessa representeras af uttrycken

$$(44)' \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ z_2 = \varepsilon_3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \varepsilon_3^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ z_3 = \varepsilon_3^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \varepsilon_3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \end{cases}$$

i hvilka värdena af de två kubikrötterna böra väljas så att deras produkt är lika med $-\frac{p}{3}$.

Vi skola ännu undersöka när två af dessa rötter sammanfalla. Ur (44) erhålles, då man observerar att $\varepsilon_3^2 = \frac{1}{\varepsilon_3}$,

$$z_1 - z_2 = (1 - \varepsilon_3)\, u_0 + (1 - \varepsilon_3^2)\, v_0 = (1 - \varepsilon_3)(u_0 - \varepsilon_3^2\, v_0),$$

$$z_2 - z_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_3^2)(u_0 - v_0) = \varepsilon_3\, (1 - \varepsilon_3)(u_0 - v_0),$$

$$z_3 - z_1 = (\varepsilon_3^2 - 1)\, u_0 + (\varepsilon_3 - 1)\, v_0 = \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3}(u_0 - \varepsilon_3\, v_0),$$

och således, om man åter använder relationerna $1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 = 0$ och $\varepsilon_3^3 = 1$,

$$(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = (1 - \varepsilon_3)^3 (u_0 - v_0)(u_0 - \varepsilon_3 v_0)(u_0 - \varepsilon_3^2 v_0)$$
$$= (1 - \varepsilon_3)^3 (u_0^3 - v_0^3).$$

Men $(1 - \varepsilon_3)^3 = 3\,(\varepsilon_3^2 - \varepsilon_3) = -3\sqrt{3}\,i$, och å andra sidan är, då u_0 och v_0 satisfiera ekvationerna (39), $u_0^3 - v_0^3 = 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Ofvanstående likhet ger oss alltså, då den upphöjes i kvadrat,

$$\left[(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)\right]^2 = -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right).$$

Härur framgår omedelbart att *den kubiska ekvationen (35) har lika rötter alltid och endast om villkoret*

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

är uppfylldt, och rötterna till den kvadratiska ekvationen (38) således sammanfalla.

2°. Den lösning vi funnit gäller alldeles allmänt, koefficienterna p och q må vara hvilka tal som helst inom det komplexa området. Vi skola nu närmare betrakta det fall då dessa koefficienter äro *reella* tal. Rötternas natur beror då i främsta rummet af kvantiteten $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, och vi hafva med afseende å dennas värde att särskilja tre fall.

(a) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$. Högra membra i ekvationerna (39) äro i detta fall reella och sinsemellan olika. Om vi för u_0 välja den reella roten till den förra af dessa ekvationer, utgör enligt (43) v_0 den senare ekvationens reella rot, och $u_0 \neq v_0$. Af den kubiska ekvationens rötter är således $z_1 = u_0 + v_0$ reell, medan z_2 och z_3, hvilkas uttryck enligt (44) och (42) kunna skrifvas

$$(46) \qquad \begin{aligned} z_2 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0), \\ z_3 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0), \end{aligned}$$

äro konjugeradt komplexa.

Med differentialkalkylens hjälp hade vi redan tidigare funnit att ekvationen (35) i förevarande fall har endast en reell rot (jmf. s. 303). Denna rot är positiv om $q < 0$, negativ om $q > 0$, såsom omedelbart framgår ur tecknet för ekvationens venstra membrum.

(b) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Ekvationerna (39) reducera sig till

$$u^3 = -\frac{q}{2}, \quad v^3 = -\frac{q}{2}.$$

Om vi för u_0 välja det reella värdet af $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, har enligt (43) äfven v_0 ett reellt värde och är således lika med u_0. Vi erhålla alltså (jmf. likheterna (46))

$$z_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \quad z_2 = z_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

där man har att taga det reella värdet af kubikroten[1]).

---

[1]) Den kubiska ekvationens rötter kunna i detta fall uttryckas

Den kubiska ekvationens rötter äro således i förevarande fall alla reella och två af dem äro lika.

Om speciellt $q = 0$, i hvilket fall enligt vårt antagande äfven p har värdet 0, äro ekvationens alla tre rötter lika med 0.

(c) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$. (Om detta villkor är uppfylldt är säkert $p < 0$). Alla i lösningen (44)′ ingående rotuttryck hafva komplexa värden, och icke desto mindre äro ekvationens rötter alla reella, såsom s. 303 visades med hjälp af differentialkalkylen.

För att erhålla rötternas uttryck i reell form, tillgripa vi den trigonometriska lösningen af ekvationerna (39), hvilka vi skrifva under formen

$$(39)' \quad \begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}, \\ v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}, \end{cases}$$

där kvadratroten är reell och kan antagas positiv.

Vi bringa alltså högra membrum i den första af dessa ekvationer under formen

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

hvarur då för den senare ekvationens högra membrum följer likheten

$$-\frac{q}{2} - i\sqrt{-\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Kvantiteterna r och φ bestämmas genom villkoren (jmf. s. 519)

$$(47) \quad r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{-\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}.$$

---

rationellt genom p och q, ty om man i ekvationen insätter roten $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, erhålles $\frac{q}{2} + p\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + q = 0$, hvarur följer $\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -\frac{3q}{2p}$.

Värdet för r bör tagas positivt. Likaså har $\sin\varphi$ ett positivt värde, då kvadratroten antagits positiv, medan $\cos\varphi$ har motsatt tecken mot q. Om $q > 0$ kan φ således väljas i andra kvadranten, om $q < 0$, i första kvadranten.

Rötterna till den förra af ekvationerna (39)′ kunna nu skrifvas under formen (jmf. (29) s. 538)

$$(48) \qquad \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

där k efterhand får värdena $0, 1, 2$. Rötterna till den senare af nämnda ekvationer framgå ur det konjugerade uttrycket

$$(49) \qquad \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

för samma värden af k. Ty dessa två uttrycks tredje potenser äro äfven konjugerade (jmf. s. 517), och då, för $k = 0, 1, 2$, den tredje potensen af (48) är lika med $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, är den tredje potensen af (49) således lika med $r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Enligt hvad ofvan visats, erhållas den kubiska ekvationens rötter ur uttrycket $u+v$ då för u i ordning insättas värdena (48) och för v hvarje gång väljes det af värdena (49) som uppfyller villkoret $uv = -\frac{p}{3}$. Man finner omedelbart att man bör kombinera de af nämnda värden som svara mot samma värde af k, ty dessas produkt är lika med

$$\left(\sqrt[3]{r}\right)^2 = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2 = -\frac{p}{3}.$$

Om vi för $\sqrt[3]{r}$ införa dess värde $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, erhålla vi således för den kubiska ekvationens rötter de reella uttrycken

$$(50) \qquad \begin{cases} z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\frac{\varphi}{3}, \\ z_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right), \\ z_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

i hvilka kvadratroten bör tagas med positivt tecken och vinkeln φ bestämmes genom villkoren (47).

3°. Vi skola närmare granska den analytiska karaktären af de uttryck vi erhållit för den kubiska ekvationens rötter.

Lösningen (44) eller (44)', som vanligen benämnes *den* CARDAN'*ska formeln*[1]), utgör *en algebraisk lösning* af ekvationen (35), ty för att erhålla ekvationens rötter z_1, z_2, z_3 ur koefficienterna p och q hafva vi att, förutom rationella operationer, verkställa endast rotutdragning, eller m. a. o. lösa binomiska likheter. Vi hafva sålunda först att söka ett värde af kvadratroten ur det rationella uttrycket $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$, eller m. a. o. en rot till den binomiska ekvationen

$$x^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

härefter bestämmes u_0 ur den binomiska likheten

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

och slutligen ingår ännu i uttrycket för ε_3 irrationaliteten $\sqrt{3}$, alltså en rot till den binomiska ekvationen

$$x^2=3\,.$$

Alla öfriga operationer som erfordras för rötternas bildande äro rationella, ty, sedan u_0 bestämts, erhålles enligt (43) v_0 genom en division.

Om koefficienterna p och q äro *reella* och $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$, hafva samtliga i (44)' ingående rotuttryck reella värden.

---

[1]) Lösningen (44)' upptäcktes först af SCIPIONE DEL FERRO (1496—1526), som emellertid icke offentliggjorde sin upptäckt. År 1535 återfanns densamma af TARTAGLIA, som icke heller publicerade sitt resultat, men i förtäckt form, såsom den tiden var brukligt, meddelade detsamma åt CARDANO. Denne införde ifrågavarande lösning i sitt år 1545 utgifna arbete *Artis magnae sive de regulis Algebrae Liber unus*.

Ekvationens enda reella rot z_1 är således uttryckt under *reell algebraisk form*, och detsamma gäller om de öfriga rötternas reella delar och koefficienterna för deras imaginära delar.

I det fall då $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, kunna ekvationens rötter uttryckas *rationellt* genom p och q (jmf. noten s. 550).

Om slutligen $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, hafva samtliga i (44)′ ingående radikaler komplexa värden, men ekvationens rötter äro icke desto mindre alla reella. Det lyckades oss att framställa dem under reell form, men de uttryck (50) som vi härvid erhöllo äro icke algebraiska utan innehålla trigonometriska, alltså *transcendenta* funktioner. I den högre algebran bevisas att det i förevarande fall, för allmänna värden af p och q, faktiskt icke är möjligt att reducera rötternas uttryck till reell algebraisk form. Fallet $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ har på grund häraf benämnts *casus irreducibilis*.

För Matematikens utveckling har detta sistnämnda fall varit af en utomordentlig betydelse, ty genom detsamma formligen tvungos matematikerna att införa de komplexa talen. Dessa kommo småningom allt allmännare i bruk, då de visade sig på olika områden medföra praktiska fördelar, men deras väsen förblef länge höljdt i dunkel. Till en klar insikt om de komplexa talens natur och om deras teoretiska berättigande kom man först i det nittonde århundradet, främst genom CAUCHY's och GAUSS' arbeten.

Öfningsuppgifter:

1) Lös de i n° 4 grafiskt behandlade ekvationerna

$$x^3 - 3x + 2 = 0, \quad x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

2) Vid behandlingen af problemet att tredela en vinkel v erhöllo vi (s. 22) ekvationen

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0,$$

där $a = \cos v$ och $x = \cos\frac{v}{3}$. Lös denna ekvation algebraiskt, och undersök huru lösningen gestaltar sig i de fall då $v = 180^0, 90^0, 45^0$.

3) Härled de algebraiska uttrycken för rötterna till ekvationerna

$$x^7 - 1 = 0, \quad x^9 - 1 = 0.$$

100. **Ekvationen af fjärde graden.** — Vi betrakta ännu den allmänna ekvationen af fjärde graden

$$(51) \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

där koefficienterna kunna hafva godtyckliga reella eller komplexa värden. Om vi utföra substitutionen $x = z - \frac{a}{4}$, försvinner koefficienten för z^3 och vi erhålla den enklare ekvationen

$$(52) \qquad z^4 + pz^2 + qz + r = 0,$$

i hvilken p, q, r beteckna uttrycken

$$p = b - \frac{3}{8}a^2,$$

$$q = c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3,$$

$$r = d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4.$$

Sedan man funnit rötterna till (52), har man att från enhvar af dem subtrahera $\frac{a}{4}$ för att erhålla den gifna ekvationens rötter.

1°. Ekvationen (52) kan lösas medels ett förfarande som utgör en direkt generalisering af det som ledde till den kubiska ekvationens lösning.

Vi substituera för den obekanta z en summa af *tre* nya obekanta, u, v och w:

$$(53) \qquad z = u + v + w.$$

Om vi för korthetens skull använda beteckningarna

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$\psi = uv + vw + wu,$$

$$\chi = u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2,$$

erhålles successivt

$$z^2 = \varphi + 2\psi,$$

$$z^4 = \varphi^2 + 4\varphi\psi + 4\psi^2$$

$$= \varphi^2 + 4\varphi\psi + 4\chi + 8uvw(u + v + w),$$

och ekvationen (52) öfvergår således i följande:

$$\varphi^2 + 4\chi + p\varphi + r + \psi(4\varphi + 2p) + (8uvw + q)(u + v + w) = 0.$$

Denna ekvation är säkert satisfierad om u, v, w bestämmas så att följande tre villkor samtidigt äro uppfyllda:

$$\varphi^2 + 4\chi + p\varphi + r = 0,$$

$$4\varphi + 2p = 0,$$

$$8uvw + q = 0.$$

Ur det andra af dessa villkor följer $\varphi = -\frac{p}{2}$, och det första reducerar sig alltså till $4\chi - \frac{p^2}{4} + r = 0$ eller $\chi = \frac{p^2 - 4r}{16}$. Om vi för φ och χ återinföra deras uttryck, erhålla vi således följande ekvationssystem:

$$(54) \qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}, \\ u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}, \\ uvw = -\frac{q}{8}, \end{cases}$$

och vi äro säkra om att, *så snart* u, v, w *satisfiera dessa ekvationer, utgör* $z = u + v + w$ *en rot till ekvationen (52).*

Ur den sista af ekvationerna (54) följer

$$(55) \qquad u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64},$$

och med användande af denna ekvation och de två första af ekvationerna (54) erhålles

$$(56) \qquad (x - u^2)(x - v^2)(x - w^2) =$$

$$x^3 - (u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)x - u^2v^2w^2$$

$$= x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}x - \frac{q^2}{64}.$$

Denna identiska likhet visar oss att, *om* u, v, w *satisfiera systemet (54), utgöra* u^2, v^2, w^2 *rötter till den kubiska likheten*

$$(57) \qquad x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \frac{p^2-4r}{16}x - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Låtom oss omvändt antaga att vi löst ekvationen (57) enligt den i föregående paragraf angifna metoden. Om vi med

$$x_1, \ x_2, \ x_3$$

beteckna dess rötter, tagna i en godtycklig ordning, följer ur de i n⁰ 10 uppställda satserna om polynom, hvilka, såsom s. 60 redan påpekades, allmänt gälla inom det komplexa talområdet, att likheten

$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \frac{p^2-4r}{16}x - \frac{q^2}{64} = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

består för hvarje värde x (jmf. s. 548). Om vi utveckla produkten i högra membrum till ett polynom, måste dettas koefficienter således vara lika med motsvarande koefficienter i venstra membrum (jmf. korollariet s. 60), hvilket ger oss relationerna

$$(58) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{p}{2}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{p^2-4r}{16}, \\ x_1x_2x_3 = \frac{q^2}{64}. \end{cases}$$

Om vi nu för u, v, w välja hvilka värden som helst som satisfiera ekvationerna

$$(59) \qquad u^2 = x_1, \ v^2 = x_2, \ w^2 = x_3,$$

eller m. a. o. hvilken kombination som helst af värdena

$$(59)' \qquad u = \pm\sqrt{x_1}, \ v = \pm\sqrt{x_2}, \ w = \pm\sqrt{x_3},$$

följer ur (58) att ekvationen (55) och de två första af ekvationerna (54) äro satisfierade. Men vi äro icke säkra om att den sista af dessa ekvationer är satisfierad, ty enligt (55) kan produkten uvw hafva antingen värdet $\frac{q}{8}$ eller värdet $-\frac{q}{8}$.

Sedan vi fixerat en rot u_0 till likheten $u^2 = x_1$ och en rot v_0 till likheten $v^2 = x_2$, välja vi den rot w_0 till likheten

$w^2 = x_3$ för hvilken villkoret $u_0 v_0 w_0 = -\frac{q}{8}$ är uppfylldt; w_0 beror således rationellt af u_0 och v_0:

(60) $$w_0 = -\frac{q}{8u_0 v_0}.$$

Af de ofvan betraktade värdesystemen u, v, w, uppfylla då följande fyra alla villkoren (54):

$$u_0, v_0, w_0; \quad u_0, -v_0, -w_0; \quad -u_0, v_0, -w_0; \quad -u_0, -v_0, w_0,$$

och vi sluta häraf att *den gifna ekvationen (52) satisfieras af följande värden z:*

(61) $$\begin{cases} z_1 = u_0 + v_0 + w_0, \\ z_2 = u_0 - v_0 - w_0, \\ z_3 = -u_0 + v_0 - w_0, \\ z_4 = -u_0 - v_0 + w_0. \end{cases}$$

Vi skola åter direkt kontrollera att vi härmed funnit samtliga rötter till den gifna ekvationen. För detta ändamål bilda vi produkten $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, för hvilken enligt (61) successivt erhållas följande uttryck:

$$\left[(z - u_0)^2 - (v_0 + w_0)^2\right]\left[(z + u_0)^2 - (v_0 - w_0)^2\right]$$

$$= (z^2 + u_0^2 - v_0^2 - w_0^2)^2 - 4(u_0 z + v_0 w_0)^2$$

$$= z^4 - 2(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)z^2 - 8u_0 v_0 w_0 z + (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^2$$

$$- 4(u_0^2 v_0^2 + v_0^2 w_0^2 + w_0^2 u_0^2).$$

Då u_0, v_0, w_0 satisfiera ekvationerna (54), reducerar sig detta resultat till

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + pz^2 + qz + r,$$

och denna identiska likhet visar oss (jmf. s. 516) att polynomet i högra membrum blir 0 för värdena (61), och endast för dessa värden.

Ur (61) härleda vi ännu följande viktiga relation:

$$(62)\quad (z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)(z_2-z_3)(z_2-z_4)(z_3-z_4)$$
$$= -2^6(u_0^2-v_0^2)(v_0^2-w_0^2)(w_0^2-u_0^2)$$
$$= -2^6(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).$$

Ur denna framgår omedelbart att *ekvationen (52) har lika rötter alltid och endast i det fall då den kubiska ekvationen (57) har lika rötter.*

Lösningen (61), hvilken upptäcktes af CARDANO's elev FERRARI, gäller för alla reella och komplexa värden af koefficienterna p, q, r. Densamma utgör *en algebraisk lösning*, ty rötterna x_1, x_2, x_3 till den kubiska ekvationen (57) kunna, såsom i n⁰ 99 visats, uttryckas under algebraisk form, och u_0, v_0, w_0 utgöra vissa värden af kvadratrötterna $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{x_3}$. För öfrigt uttryckes enligt (60) w_0 rationellt genom u_0 och v_0.

2⁰. Vi skola nu närmare betrakta det fall då koefficienterna p, q, r i den gifna ekvationen (52) äro *reella* tal. Den kubiska ekvationen (57) har då äfven reella koefficienter, och dess rötter x_1, x_2, x_3 äro följaktligen antingen alla reella, eller är en af dem reell och de två öfriga konjugeradt komplexa. Ur den sista af likheterna (58) följer, om vi antaga $q \neq 0$ [1]), att i förra fallet antingen alla tre rötterna äro positiva, eller en positiv och de två andra negativa.

Vi antaga först att rötterna x_1, x_2, x_3 alla äro *olika*, i hvilket fall, såsom vi sett, äfven rötterna (61) äro olika, och hafva då att särskilja följande tre fall:

(a) Rötterna x_1, x_2, x_3 äro alla positiva. — Enligt (59) hafva då u_0, v_0, w_0 reella värden, och rötterna (61) äro således alla fyra reella. För att verkligen beräkna dem måste vi i allmänhet uttrycka den kubiska ekvationens rötter x_1, x_2, x_3 under trigonometrisk form, ty vi hafva att göra med *casus*

---

[1]) Om $q = 0$, återföres ekvationen (52) omedelbart till en kvadratisk ekvation (jmf. s. 535). Läsaren uppmanas att själf undersöka hvilka olika fall kunna inträffa med afseende å rötternas realitet och deras inbördes likhet om nämnda antagande är uppfylldt.

irreducibilis, och u_0, v_0, w_0 utgöra således kvadratrötter ur trigonometriska uttryck.

(b) En af rötterna x_1, x_2, x_3 är positiv och de två andra negativa. — Vi kunna antaga $x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 < 0$. Enligt (59) har då u_0 ett reellt värde medan v_0 och w_0 äro rent imaginära. Vidare är $v_0 + w_0 \neq 0$ och $v_0 - w_0 \neq 0$, ty om något af dessa uttryck hade värdet 0 vore $v_0^2 = w_0^2$ och således $x_2 = x_3$, hvilket strider mot vårt antagande att den kubiska ekvationens rötter alla äro olika. Häraf följer att rötterna (61) i förevarande fall alla äro komplexa, samt att z_1 och z_2 hafva konjugerade värden, och likaså z_3 och z_4. För att beräkna rötternas reella och imaginära delar måste vi i allmänhet uttrycka x_1, x_2, x_3 under trigonometrisk form.

(c) En af rötterna x_1, x_2, x_3 är reell och de två andra konjugeradt komplexa. — Den reella roten, hvilken må vara x_1, är enligt den sista af likheterna (58) positiv, ty produkten af de konjugerade rötterna x_2 och x_3 har ett positivt värde. Ekvationen $u^2 = x_1$ har alltså reella rötter, medan rötterna till ekvationerna $v^2 = x_2$ och $w^2 = x_3$ äro komplexa. Då värdena af x_2 och x_3 äro konjugerade, äro äfven sistnämnda ekvationers rötter parvis konjugerade, såsom omedelbart framgår ur formeln (23) s. 533. Vi kunna således för v_0 och w_0 välja två konjugerade värden, i hvilket fall deras produkt är positiv, och villkoret $u_0 v_0 w_0 = -\frac{q}{8}$ är då uppfylldt om vi för u_0 välja den af rötterna till ekvationen $u^2 = x_1$ som har motsatt tecken mot q.

Då sålunda u_0 och summan $v_0 + w_0$ äro reella, medan skillnaden $v_0 - w_0$ har ett rent imaginärt värde, följer ur (61) att rötterna z_1 och z_2 äro reella, rötterna z_3 och z_4 konjugeradt komplexa.

Såväl de reella rötterna som de reella delarna och koefficienterna för i uti uttrycken för de komplexa rötterna innehålla i detta fall endast reella radikaler och hafva således *reell algebraisk form*. Ty enligt den CARDAN'ska formeln erhållas x_1 samt de reella delarna och koefficienterna för i uti de komplexa rötterna x_2 och x_3 uttryckta under reell algebraisk form, och enligt formeln (23) s. 533 gäller detsamma om lös-

ningarna u_0, v_0, w_0 till ekvationerna (59) och således äfven om rötterna (61).

Vi gå nu till det fall då ekvationen (52) har lika rötter, hvilket såsom vi sågo inträffar alltid och endast om den kubiska ekvationen (57) har lika rötter. Sistnämnda ekvations rötter äro då alla reella (jmf. s. 550), och om vi fortfarande antaga $q \neq 0$ kunna således, på grund af den sista af likheterna (58), endast följande olika händelser inträffa:

(α) Rötterna x_1, x_2, x_3 äro positiva och två af dem äro lika. — I detta fall äro rötterna (61) alla reella och två af dem sammanfalla.

(β) Rötterna x_1, x_2, x_3 äro alla tre lika och positiva. — Rötterna (61) äro i detta fall alla reella och tre af dem sammanfalla.

(γ) En af rötterna x_1, x_2, x_3 är positiv och de två andra negativa och sinsemellan lika. — Två af rötterna (61) äro då reella och lika, medan de två öfriga äro konjugeradt komplexa.

Läsaren bör själf öfvertyga sig om riktigheten af de resultat vi utsagt. Vi påpeka ännu att rötterna (61) i dessa fall kunna bringas under en sådan form att alla i dem ingående irrationaliteter utgöras af reella kvadratrötter.

3°. Vi skola slutligen visa huru man, då den gifna ekvationens koefficienter p, q, r äro reella tal, direkt ur dessa koefficienters värden kan sluta till hvilket af de ofvan betraktade fallen inträffar. Vi antaga härvid alltjämt att $q \neq 0$.

Om man medels substitutionen $x = y - \frac{p}{6}$ bortskaffar den andra termen från ekvationen (57), antar denna formen

$$(57)' \qquad y^3 + p'y + q' = 0,$$

där p' och q' hafva värdena

$$p' = -\frac{1}{2^4 . 3}(p^2 + 12r), \quad q' = -\frac{1}{2^6 . 3^3}(2p^3 - 72pr + 27q^2).$$

Härur erhålles efter en enkel räkning

$$(63) \qquad \left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3 = -\frac{1}{2^{14} . 3^3} D,$$

där

(64) $$D = \frac{1}{3^3}\left\{4(p^2+12r)^3-(2p^3-72pr+27q^2)^2\right\} =$$

$$16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3.$$

Enligt hvad i n⁰ 99 visats, har ekvationen (57)′, och således äfven ekvationen (57), tre reella och olika rötter om $D>0$, af hvilka åtminstone två sammanfalla om $D=0$, medan däremot, om $D<0$, endast en rot är reell och de två öfriga konjugeradt komplexa.

Om $D<0$ inträffar således alltid det s. 560 betraktade fallet (c), och ekvationen (52) har alltså två reella och två konjugeradt komplexa rötter.

Är $D>0$, inträffar något af fallen (a) och (b), hvilka det nu gäller för oss att åtskilja. I fallet (a), då rötterna x_1, x_2, x_3 alla äro positiva, är enligt de två första af likheterna (58)

(65) $$p<0,\quad p^2-4r>0.$$

Man ser lätt att dessa två olikheter icke samtidigt kunna bestå i fallet (b), då en af rötterna x_1, x_2, x_3 är positiv och de två öfriga negativa. Ty låtom oss t. ex. antaga $x_1>0$, $x_2<0, x_3<0$. Om då villkoret $p<0$ är uppfylldt och således, enligt den första af likheterna (58), $x_1+x_2+x_3>0$, är summan x_1+x_3 större än $-x_2$ och således positiv, medan produkten x_1x_3 är negativ, och vi erhålla alltså

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1<x_1x_2+x_2x_3=x_2(x_1+x_3)<0,$$

hvaraf enligt den andra af likheterna (58) följer $p^2-4r<0$.

Om $D>0$ och villkoren (65) båda äro uppfyllda, inträffar således alltid fallet (a), och rötterna (61) äro följaktligen alla fyra reella.

Om $D>0$ och villkoren (65) icke båda äro satisfierade, eller m. a. o. om något af villkoren

$$p\geq 0,\quad p^2-4r\leq 0$$

är uppfylldt, inträder däremot fallet (b), och rötterna (61) äro således alla komplexa och parvis konjugerade.

I det fall då $D=0$, har ekvationen (57) och således äfven den gifna ekvationen (52) lika rötter. Af ofvanstående diskussion, som fortfarande gäller, kunna vi sluta att, om villkoren (65) icke båda äro uppfyllda, fallet (γ) med nödvändighet inträder, medan vi däremot, om nämnda villkor bestå samtidigt, hafva att göra antingen med fallet (α) eller med fallet (β).

I fallet (β), då rötterna x_1, x_2, x_3 alla äro lika, är enligt den första af likheterna (58) enhvar af dessa rötter lika med $-\frac{p}{6}$, och de två senare likheterna reducera sig alltså till

$$(66)\qquad p^2+12r=0\,,\quad 8p^3+27q^2=0\,.$$

Om p och q uppfylla dessa två likheter, är omvändt ekvationssystemet (58) satisfieradt för $x_1=x_2=x_3=-\frac{p}{6}$, och den kubiska ekvationens rötter äro således alla lika. Likheterna (66) utgöra således det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att fallet (β) skall inträda [1]).

Öfningsuppgifter:

1) Lös fullständigt följande ekvationer och undersök noggrant framställningsformen för deras rötter:

$$x^4-4x^3+5x-1=0\,,\quad x^4-3x+1=0\,,\quad x^4-x+1=0\,.$$

2) Härled följande relation:

$$[(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)(z_2-z_3)(z_2-z_4)(z_3-z_4)]^2=D\,.$$

101. **Algebrans fundamentalsats.** — Såsom en afslutning skola vi bevisa att *hvarje algebraisk ekvation, som verkligen innehåller den obekanta, har åtminstone en rot*, hvilken sats utgör grundvalen för den högre algebran och därför erhållit benämningen *algebrans fundamentalsats*. Densamma lyder i precis formulering som följer:

Hvarje polynom,

$$(67)\qquad f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\,,$$

[1]) Ur uttrycket för D följer jämväl omedelbart att $D=0$ om villkoren (66) båda äro uppfyllda.

hvars koefficienter tillhöra det komplexa talområdet och i hvilket $a_0 \neq 0$ *och* $n \geq 1$, *antar värdet* 0 *för åtminstone ett värde* z *som hör till nämnda talområde.*

Vi anmärka genast att, om $a_n = 0$, polynomet $f(z)$ försvinner för $z = 0$ och vårt påstående således är riktigt. Vi kunna därför i det följande antaga $a_n \neq 0$.

Det bevis vi här gifva för ofvanstående sats härrör till sin idé från ARGAND, en af de förste som systematiskt undersökte de komplexa talens geometriska framställning, och har i precisare form utförts af CAUCHY.

Ifrågavarande bevis grundar sig på undersökningen af det gifna polynomets modul eller absoluta belopp. För hvarje värde $z = a + ib$ inom det komplexa området antar detta polynom ett fullt bestämdt värde, $f(a + ib)$, som tillhör samma område och således kan bringas under formen $A + iB$, där A och B äro reella tal. Enligt vår definition förstås med moduln af $f(a + ib)$ uttrycket

$$|f(a+ib)| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

där man har att taga det positiva värdet af kvadratroten. Moduln är 0 om $A = B = 0$ och således $f(a + ib) = 0$, och blott i detta fall. Om vi bevisat att $|f(z)| = 0$ för ett visst värde af z, kunna vi således sluta att $f(z)$ försvinner för detta samma värde.

Vi dela beviset i fyra delar, i det vi successivt bevisa följande satser:

(I). *Moduln* $|f(z)|$ *är en kontinuerlig funktion af* z.

(II). *Man kan med origo såsom medelpunkt slå en sådan cirkel,* C, *att i hvarje punkt* z *utom densamma eller på dess periferi värdet af moduln* $|f(z)|$ *är större än dess värde i origo, alltså större än* $|a_n|$.

(III). *Inom cirkeln* C *finnes det åtminstone en punkt,* z_0, *i hvilken värdet af moduln* $|f(z)|$ *är lika med den undre gränsen för de värden densamma öfverhufvud kan antaga.*

(IV). *Nämnda undre gräns är lika med noll, hvaraf följer* $|f(z_0)| = 0$ *och således* $f(z_0) = 0$.

1^0. Vi gifva variabeln z en tillväxt h, som kan vara reell eller komplex, och undersöka den tillväxt,

(68) $$|f(z+h)| - |f(z)|,$$

som polynomets modul härvid erhåller. Vi skola visa att denna tillväxt kan göras numeriskt mindre än hvilket föreskrifvet positivt tal ε som helst blott det absoluta beloppet af variabelns tillväxt h väljes tillräckligt litet, hvilket just innebär att $|f(z)|$ är en kontinuerlig funktion af z för det betraktade värdet af denna variabel.

Då hvarje potens af $z+h$ i uttrycket $f(z+h)$ utvecklas enligt binomialsatsen och resultatet ordnas efter stigande potenser af h, erhålles

$$f(z+h) = f(z) + \varphi(h),$$

där $\varphi(h)$ har formen

$$\varphi(h) = A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_n h^n,$$

och enligt olikheterna (19) s. 528 kunna vi således skrifva

$$|f(z)| - |\varphi(h)| \leqq |f(z+h)| \leqq |f(z)| + |\varphi(h)|,$$

hvarur framgår att det numeriska värdet af skillnaden (68) är $\leqq |\varphi(h)|$.

För $|\varphi(h)|$ erhålles enligt satsen s. 529 olikheten

$$|\varphi(h)| < M(|h| + |h|^2 + \cdots + |h|^n) = M|h| \frac{1 - |h|^n}{1 - |h|},$$

där M betecknar den största af modulerna $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$. Vi pålägga nu h till en början villkoret $|h| < \frac{1}{2}$, hvarur följer $1 - |h| \geqq \frac{1}{2}$, $1 - |h|^n < 1$, och således, om $h \neq 0$,

$$|\varphi(h)| < 2M|h|.$$

Högra membrum i denna olikhet är mindre än eller lika med det föreskrifna talet ε om $|h| \leqq \frac{\varepsilon}{2M}$. Vi sluta häraf att $|\varphi(h)| < \varepsilon$ och skillnaden (68) således är numeriskt mindre än ε för hvarje värde af h hvars modul icke öfverstiger det mindre af talen $\frac{1}{2}$ och $\frac{\varepsilon}{2M}$. Satsen (I) är härmed bevisad.

2°. För att bevisa satsen (II) skrifva vi $f(z)$ under formen

$$f(z) = a_0 z^n \big(1 + \varphi(z)\big),$$

där

$$\varphi(z) = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{z} + \frac{a_2}{a_0}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\left(\frac{1}{z}\right)^n,$$

och visa främst att man genom att välja $|z|$ tillräckligt stort kan göra $|\varphi(z)| < \frac{1}{2}$, hvaraf då följer (jmf. s. 528)

$$|1 + \varphi(z)| \geqq 1 - |\varphi(z)| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

och således

(69) $$|f(z)| > \frac{1}{2}|a_0|\,|z|^n.$$

Om vi med M denna gång beteckna den största af modulerna $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$, erhålles för $|\varphi(z)|$ olikheten

$$|\varphi(z)| \leqq M\left(\left|\frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{1}{z}\right|^n\right) = \frac{M}{|z| - 1}\left(1 - \left|\frac{1}{z}\right|^n\right).$$

För $|z| > 1$ följer härur

$$|\varphi(z)| < \frac{M}{|z| - 1},$$

och högra membrum i denna olikhet är $\leqq \frac{1}{2}$ om $|z| \geqq 2M + 1$. Då detta villkor i sig innefattar villkoret $|z| > 1$, är således olikheten $|\varphi(z)| < \frac{1}{2}$ och följaktligen äfven olikheten (69) säkert satisfierad om

$$|z| \geqq 2M + 1.$$

Ur detta villkor följer, såsom redan framhölls, $|z| > 1$ och således, då $n \geqq 1$, $|z|^n \geqq |z| > 2M$, hvarur vi enligt (69) sluta att $|f(z)| > M|a_0|$. Men $M \geqq \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$, och vi erhålla alltså slutligen $|f(z)| > |a_n|$ så snart ofvanstående villkor är uppfylldt.

Om vi med origo såsom medelpunkt slå en cirkel, C, hvars radie har längden $2M+1$, är följaktligen i hvarje punkt z utom denna cirkel eller på dess periferi värdet af moduln $|f(z)|$ större än $|a_n|$[1]), hvarmed satsen (II) är bevisad.

3°. Vi betrakta nu alla de värden hvilka moduln $|f(z)|$ antar i punkter inom cirkeln C. Då $|f(z)|$ öfverallt är ≥ 0, har (jmf. satsen s. 488) denna värdemängd en ändlig undre gräns, g, som själf är > 0. Enligt den undre gränsens definition är $g \leq$ hvarje värde som moduln $|f(z)|$ antar inom C, och således speciellt $\leq |a_n|$, som utgör dess värde i origo. På grund af hvad i föregående moment visats kunna vi härur sluta att $|f(z)|$ i hvarje punkt utom cirkeln C eller på dess periferi är större än g, och att således *g utgör den undre gränsen för de värden hvilka moduln $|f(z)|$ öfverhufvud kan antaga.*

Vi påstå att det inom C finnes åtminstone en punkt, z_0, i hvilken $|f(z)|$ antar värdet g.

Beviset är analogt med det vi utförde s. 495—498. I stället för cirkeln C betrakta vi för enkelhetens skull en kvadrat, Q, som innehåller denna cirkel och hvars sidor äro parallella med koordinataxlarna; den undre gränsen för de värden $|f(z)|$ antar inom och på perimetern af denna kvadrat är lika med g.

Vi dela Q i fyra kongruenta kvadrater, hvilka vi tänka oss ordnade i en viss följd, t. ex. den som i figuren är angifven medels siffrorna 1, 2, 3, 4, och betrakta mängderna af de värden hvilka $|f(z)|$ antar inom och på perimetern af enhvar af dessa kvadrater. Omedelbart inses (jmf. s. 496) att den undre gränsen för åtminstone en af dessa värdemängder är lika med g. Vi utvälja af de fyra kvadraterna den första för hvilken detta äger rum, och beteckna densamma med Q_1.

Härefter dela vi Q_1 i fyra kongruenta kvadrater, hvilka

---

[1]) Häraf följer att samtliga rötter till ekvationen $f(z) = 0$ representeras af punkter som falla inom cirkeln C.

vi ordna i en följd på samma sätt som ofvan, och utvälja åter af dessa kvadrater den första inom hvilken den undre gränsen för $|f(z)|$ är lika med g. Densamma må betecknas med Q_2.

Detta förfarande kan fortsättas in infinitum, och ger oss en obegränsad följd af fullt bestämda kvadrater,

$$(70) \qquad Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots,$$

inom hvilka den undre gränsen för $|f(z)|$ är lika med g, och af hvilka enhvar utgör en fjärdedel af den närmast föregående. Vi skola främst visa att *det finnes en punkt* (ξ, η) *som är gemensam för alla dessa kvadrater*.

Vi beteckna med x_n och $x_n' (> x_n)$ abskissorna för de med y-axeln parallella sidorna i kvadraten Q_n, med y_n och $y_n' (> y_n)$ ordinatorna för de sidor i samma kvadrat som äro parallella med x-axeln, samt betrakta intervallerna

$$(71) \qquad (x_1, x_1'), (x_2, x_2'), \ldots, (x_n, x_n'), \ldots,$$

och likaså intervallerna

$$(72) \qquad (y_1, y_1'), (y_2, y_2'), \ldots, (y_n, y_n'), \ldots.$$

Såväl i räckan (71) som i räckan (72) utgör hvarje intervall hälften af den närmast föregående, och enligt korollariet s. 493 finnes det således ett och endast ett värde, ξ, som är gemensamt för intervallerna (71), samt likaså ett och endast ett värde, η, som är gemensamt för intervallerna (72). För hvarje index n är sålunda

$$x_n \leq \xi \leq x_n', \; y_n \leq \eta \leq y_n',$$

hvilka olikheter geometriskt innebära att den punkt hvars abskissa har värdet ξ och hvars ordinata har värdet η hör till kvadraten Q_n. Denna punkt (ξ, η) är sålunda gemensam för alla kvadrater i räckan (70).

Vi sätta nu $z_0 = \xi + i\eta$, så att följaktligen z_0 är det komplexa tal som representeras af punkten (ξ, η), och skola visa att

$$|f(z_0)| = g.$$

Man kan icke hafva $|f(z_0)| < g$, eftersom g utgör den undre gränsen för alla värden som $|f(z)|$ öfverhufvud kan antaga.

Vore åter $|f(z_0)| > g$ och således $\Delta = |f(z_0)| - g > 0$, kunde man enligt momentet 1° finna ett sådant positivt tal, ϱ, att olikheten

$$|f(z_0 + h)| > |f(z_0)| - \frac{\Delta}{2} = g + \frac{\Delta}{2}$$

vore uppfylld för hvarje värde h hvars modul är mindre än ϱ, eller m. a. o. att $|f(z)|$ vore större än $g + \frac{\Delta}{2}$ i hvarje punkt z inom den cirkel, c, som har z_0 till medelpunkt och ϱ till radie. Den undre gränsen för de värden $|f(z)|$ antar inom denna cirkel vore i enlighet härmed $\geqq g + \frac{\Delta}{2}$.

Denna slutsats innebär emellertid en motsägelse. Ty då kvadraterna i räckan (70) alla innehålla punkten z_0 och deras sidor aftaga mot 0, ligga de samtligen, från och med en viss af dem, inom cirkeln c. Men den undre gränsen för $|f(z)|$ inom enhvar af dessa kvadrater är lika med g, och häraf följer att den undre gränsen för $|f(z)|$ inom cirkeln c äfven är lika med g.

Man kan följaktligen icke heller hafva $|f(z_0)| > g$, och såsom enda möjlighet återstår sålunda att $|f(z_0)| = g$, h. s. b.

Då s. 567 visats att värdet af moduln $|f(z)|$ i hvarje punkt utom cirkeln C eller på dess periferi är större än g, inses slutligen omedelbart att punkten z_0 ligger inom cirkeln C, och satsen (III) är härmed fullständigt bevisad.

4°. Då g är den undre gränsen för samtliga värden af moduln $|f(z)|$, och då $|f(z)|$ antar värdet g för $z = z_0$, kunna vi sluta att g *utgör det minsta af alla de värden hvilka* $|f(z)|$ *öfverhufvud kan antaga*. Vi skola visa att *detta minsta värde är lika med* 0.

Beviset är indirekt. Vi antaga således $|f(z_0)| = g > 0$, och visa att härur skulle följa att $|f(z)|$ kunde erhålla värden mindre än talet g, hvilket strider mot detta tals betydelse.

Vi sätta $z = z_0 + h$, och erhålla då

$$f(z_0+h) = f(z_0) + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_n h^n,$$

där koefficienten A_n är lika med a_0 och således säkert skild från 0. Emedan enligt antitesen $f(z_0) \neq 0$, kunna vi i högra membrum utbryta $f(z_0)$ såsom faktor; om A_p är den första af koefficienterna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ som icke är 0, och om vi införa beteckningen

$$\frac{A_\nu}{f(z_0)} = B_\nu \quad (\nu = p, p+1, \ldots, n),$$

antar härvid ofvanstående likhet formen

(73) $$f(z_0+h) = f(z_0)\big(1 + B_p h^p + \psi(h)\big),$$

där $B_p \neq 0$ och

$$\psi(h) = B_{p+1} h^{p+1} + \cdots + B_n h^n.$$

Det gäller för oss att visa, att värdet af h kan bestämmas så att moduln af den senare faktorn i högra membrum af (73) blir mindre än 1. För detta ändamål sätta vi

$$h = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad B_p = \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),$$

och välja till en början φ så att termen $B_p h^p$ erhåller ett reellt och *negativt* värde. Enligt formlerna s. 521—522 är

$$B_p h^p = \varrho r^p \big(\cos(p\varphi + \varphi_0) + i\sin(p\varphi + \varphi_0)\big),$$

och nämnda villkor är alltså uppfylldt om $p\varphi + \varphi_0 = \pi$ eller $\varphi = \frac{\pi - \varphi_0}{p}$, för hvilket värde erhålles $B_p h^p = -\varrho r^p$ och således

$$1 + B_p h^p + \psi(h) = (1 - \varrho r^p) + \psi(h).$$

Härefter pålägga vi r villkoret $\varrho r^p < 1$ eller $r < \sqrt[p]{\frac{1}{\varrho}}$, ur hvilket följer $1 - \varrho r^p > 0$. Vi kunna då skrifva (jmf. s. 529)

$$|1 + B_p h^p + \psi(h)| \leqq 1 - \varrho r^p + |\psi(h)|,$$

och uttrycket i venstra membrum blir således säkert mindre än 1 om vi göra

$$|\psi(h)| < \varrho r^p.$$

Då nu

$$|\psi(h)| < |B_{p+1}| r^{p+1} + \cdots + |B_n| r^n,$$

är sistnämnda villkor uppfylldt om

$$|B_{p+1}| r + \cdots + |B_n| r^{n-p} < \varrho,$$

och denna olikhet, hvars venstra membrum försvinner samtidigt med r, är i sin tur verificerad så snart r är mindre än ett visst positivt tal r'. Om vi med r_0 beteckna det mindre af talen $\sqrt[p]{\frac{1}{\varrho}}$ och r', kunna vi således af det ofvan sagda sluta att, för hvarje värde af h hvars argument är lika med $\frac{\pi - \varphi_0}{p}$ och hvars modul är mindre än r_0, det absoluta beloppet af den senare faktorn i högra membrum af likheten (73) är mindre än 1 och således

$$|f(z_0 + h)| < |f(z_0)| = g.$$

Vi hafva härmed ernått den motsägelse hvilken vi förutsade, och sluta af densamma att antitesen är oriktig och att således $|f(z_0)| = g = 0$ och följaktligen $f(z_0) = 0$, hvarmed beviset för algebrans fundamentalsats är slutfördt.

5⁰. Ur algebrans fundamentalsats och de i n⁰ 10 uppställda satserna om polynom, härleda vi följande viktiga resultat:

Hvarje polynom

(74) $$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

hvars koefficienter tillhöra det komplexa talområdet och i hvilket koefficienten a_0 är skild från noll, kan bringas under formen

(75) $$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

där $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *äro reella eller komplexa tal, hvilka, på ordningsföljden när, äro entydigt bestämda.*

Enligt algebrans fundamentalsats finnes det nämligen säkert *ett* värde, z_1, för hvilket polynomet $f(z)$ antar värdet 0, och med stöd af satsen s. 56, hvilken, såsom s. 60 redan framhölls, gäller jämväl inom det komplexa talområdet, kunna vi således bringa $f(z)$ under formen

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z),$$

där $f_1(z)$ är ett polynom af graden $n-1$ som börjar med termen $a_0 z^{n-1}$. Om $n > 1$, försvinner $f_1(z)$ i sin tur för åtminstone ett värde, $z = z_2$, och kan alltså skrifvas

$$f_1(z) = (z - z_2) f_2(z),$$

där $f_2(z)$ är ett polynom af graden $n-2$ hvars första term är $a_0 z^{n-2}$. Då man fortgår på detta sätt, erhålles slutligen

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{n-1}) f_{n-1}(z),$$

där $f_{n-1}(z)$ har formen $a_0 z + b = a_0 \left(z + \frac{b}{a_0}\right)$, och om vi sätta $\frac{b}{a_0} = -z_n$, följer härur för $f(z)$ likheten (75).

Att denna framställningsform för polynomet $f(z)$ är entydigt bestämd, så när som på faktorernas ordning, framgår enkelt ur korollariet s. 60 samt satsen s. 516. Ty låtom oss antaga att man för $f(z)$ på någon annan väg funnit uttrycket

$$(75)' \qquad f(z) = a_0' (z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_m').$$

Om detta utvecklas och ordnas efter fallande potenser af z, är enligt nämnda korollarium det härvid erhållna polynomet identiskt med det gifna polynomet (74), och dess första term $a_0' z^m$ är således identisk med termen $a_0 z^n$, hvarur vi sluta att $m = n$ och $a_0' = a_0$. Härur följer att man för hvarje värde z har

$$(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = (z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n').$$

Då nu venstra membrum och således äfven högra mem-

brum i denna likhet försvinner för $z = z_1$, kunna vi vidare sluta, enligt satsen s. 516, att något af talen $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ är lika med z_1. Om t. ex. $z_1' = z_1$ och om vi dividera ofvanstående likhet med $z - z_1$, erhålles till resultat

$$(z - z_2) \ldots (z - z_n) = (z - z_2') \ldots (z - z_n').$$

Denna likhet består enligt sin härledning för hvarje värde z som är skildt från värdet z_1, för hvilket faktorn $z - z_1$, med hvilken vi dividerat, försvinner. Men likheten måste då äfven vara uppfylld för $z = z_1$, ty, om dess båda membra utvecklas till polynom, äro dessa enligt korollariet s. 60 identiska. I det vi åter använda satsen s. 516, kunna vi således sluta att ett af talen $z_2', \ldots, z_n'$ är lika med z_2, och då vi fortgå på detta sätt, komma vi slutligen till det resultat att talen $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ äro lika med talen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, tagna i någon viss ordning, hvarmed den ofvan anförda satsen är fullständigt bevisad.

I likheten (75) behöfva talen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ icke alla vara olika. Om μ af dem hafva värdet z_1, så att polynomet $f(z)$ är divisibelt med $(z - z_1)^\mu$ men icke med någon högre potens af $z - z_1$, säges z_1 utgöra *ett nollställe af* μ^{te} *ordningen* för detta polynom, och ekvationen $f(z) = 0$ säges hafva μ *rötter lika med* z_1. Med användande af detta sistnämnda uttryckssätt kan den ofvan bevisade satsen kort utsägas som följer:

Hvarje algebraisk ekvation af n^{te} *graden har precis* n *rötter.*

Om produkten i högra membrum af likheten (75) utvecklas till ett polynom, måste dettas koefficienter, enligt korollariet s. 60, öfverensstämma med motsvarande koefficienter i det gifna polynomet (74). Vi erhålla sålunda följande relationer, som tidigare kommit till användning i speciellare form, och hvilka spela en fundamental roll i den högre algebran:

$$S(z_1) = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad S(z_1 z_2 \ldots z_\nu) = (-1)^\nu \frac{a_\nu}{a_0},$$

$$S(z_1 z_2) = \frac{a_2}{a_0}, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

$$S(z_1 z_2 z_3) = -\frac{a_3}{a_0}, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

I dessa likheter betyder $S(z_1)$ summan af talen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $S(z_1 z_2)$ summan af produkterna af dessa tal, tagna två och två på alla möjliga olika sätt, och allmänt $S(z_1 z_2 \ldots z_\nu)$ summan af produkterna af ν af nämnda tal, kombinerade på alla möjliga olika sätt.

6°. Om polynomet (74) har *reella koefficienter* och om detsamma försvinner för ett komplext värde $a + ib$ af z, försvinner det äfven för det konjugerade värdet $a - ib$ (jmf. s. 518). I högra membrum af likheten (75) ingå då faktorerna $z - a - ib$ och $z - a + ib$, hvilkas produkt utgör ett polynom af andra graden med reella koefficienter:

$$(z - a - ib)(z - a + ib) = z^2 - 2az + a^2 + b^2.$$

Om $f(z)$ divideras med detta polynom, erhålles till kvot ett polynom med reella koefficienter, på hvilket ofvanstående resonemang åter kan tillämpas. Vi sluta häraf att de af talen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ som hafva komplexa värden äro parvis konjugerade, och att således motsvarande faktorer i högra membrum af (75) parvis kunna sammanfattas till polynom af andra graden med reella koefficienter. I det vi förena konstanten a_0 med någon af de öfriga faktorerna, erhålla vi sålunda följande viktiga sats:

Hvarje polynom hvars koefficienter äro reella tal kan upplösas i en produkt af polynom af första eller andra graden med reella koefficienter.

Öfningsuppgifter:

1) Upplös följande polynom i reella faktorer af första eller andra graden:

$$z^4 + 1, \quad z^5 - 1, \quad z^{12} - 1, \quad z^n - 1.$$

2) Bevisa följande sats, hvilken erhålles genom en alldeles enkel modifikation af det bevis vi ofvan gifvit för algebrans fundamentalsats:

Om i z-planet är gifven en sluten kurva C som icke skär sig själf, och om moduln af polynomet $f(z)$ i någon punkt innanför denna kurva antar ett värde som är mindre än hvarje värde densamma antar på själfva kurvan, finnes det innanför C åtminstone en punkt i hvilken polynomet $f(z)$ försvinner.

Not I.

De första grunderna af läran om lineära ekvationssystem och determinanter.

1. **Två homogena ekvationer med två obekanta.** — Vi betrakta två lineära homogena funktioner af variablerna x och y,

$$L_1 = ax + by\,, \quad L_2 = cx + dy\,,$$

och söka de värdepar x, y för hvilka dessa funktioner båda antaga värdet 0, eller m. a. o. lösningarna till ekvationssystemet

$$(1) \qquad \begin{cases} L_1 = 0\,, \\ L_2 = 0\,, \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} ax + by = 0\,, \\ cx + dy = 0\,. \end{cases}$$

Vi bilda *en lineär kombination* af L_1 och L_2, d. v. s. ett uttryck af formen

$$l_1 L_1 + l_2 L_2 = (l_1 a + l_2 c)\, x + (l_1 b + l_2 d)\, y\,,$$

där l_1 och l_2 äro konstanter. Om vi speciellt sätta $l_1 = d$, $l_2 = -b$, försvinner i detta uttryck koefficienten för y, sätta vi åter $l_1 = -c$, $l_2 = a$, försvinner koefficienten för x, och vi erhålla

$$(2) \qquad \begin{aligned} dL_1 - bL_2 &= (ad - bc)\, x\,, \\ -cL_1 + aL_2 &= (ad - bc)\, y\,. \end{aligned}$$

Dessa likheter (2) äro rena identiteter, d. v. s. bestå för alla värden af x och y, och deras högra membra försvinna således för hvarje värdepar x, y som satisfierar ekvationerna (1).

Om $ad - bc \neq 0$, framgår härur omedelbart att ekvationssystemet (1) icke har någon annan lösning än den evidenta lösningen $x = 0$, $y = 0$.

Om åter $ad - bc = 0$, reducera sig identiteterna (2) till

$$(2)' \qquad dL_1 - bL_2 = 0\,, \quad -cL_1 + aL_2 = 0\,.$$

Härur följer, om vi antaga att åtminstone en af koefficienterna a, b, c, d är skild från noll, att den ena af ekvationerna (1) är satisfie-

rad för hvarje värdepar x, y som satisfierar den andra ekvationen, hvilken i sin tur bestämmer endast de obekantas förhållande, så att systemet (1) följaktligen har oändligt många lösningar. Ty om vi t. ex. antaga $a \neq 0$, kan den senare af identiteterna $(2)'$ skrifvas $L_2 = \frac{c}{a} L_1$, hvarur följer att $L_2 = 0$ så snart $L_1 = 0$, och ekvationen $L_1 = 0$ ger oss åter $x : y = -b : a$. Systemet (1) har således i detta fall lösningarna $x = -bt$, $y = at$, där t kan hafva hvilket värde som helst.

För uttrycket $ad - bc$, af hvars värde lösningen af systemet (1) sålunda väsentligen beror, användes beteckningen

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

en s. k. *determinant*. Talen a, b, c, d utgöra determinantens *element*; a och b bilda dess första *rad*, c och d dess andra rad; a och c stå i determinantens första, b och d i dess andra *kolonn*; slutligen bilda a och d determinantens *hufvuddiagonal*, b och c dess andra diagonal. För att erhålla determinantens värde har man att från produkten af hufvuddiagonalens element subtrahera produkten af den andra diagonalens element.

Vi sammanfatta de erhållna resultaten i följande sats:

Ett system af två lineära homogena ekvationer med två obekanta:

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$$

hvars determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

är skild från 0, *har ingen annan lösning än* $x = 0, y = 0$.

Om determinanten har värdet 0 *men åtminstone ett af dess element är skildt från* 0, *reducerar sig ekvationssystemet (1) till en enda ekvation hvilken bestämmer de obekantas förhållande, och har således oändligt många lösningar.*

Om slutligen samtliga element i den betraktade determinanten försvinna, satisfieras ekvationerna (1) af hvarje värdepar x, y.

Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att systemet (1) skall hafva någon annan lösning än den evidenta lösningen $x = 0, y = 0$, *är således att dess determinant försvinner.*

2. **Två allmänna lineära ekvationer med två obekanta.** — Vi betrakta nu ett system af två allmänna lineära ekvationer,

$$(3) \qquad \begin{cases} L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases}$$

för hvilkas venstra membra vi åter använda beteckningarna L_1 och L_2.

Vi bilda såsom i n° 1 af dessa membra de lineära kombinationerna:

$$(4)\quad \begin{aligned} b_2 L_1 - b_1 L_2 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) x + (c_1 b_2 - c_2 b_1), \\ -a_2 L_1 + a_1 L_2 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) y + (a_1 c_2 - a_2 c_1), \end{aligned}$$

af hvilka den ena innehåller endast variabeln x, den andra endast y.

Såsom ur (4) framgår, beror lösningen af ekvationssystemet (3) väsentligen af den determinant D som bildas af de obekantas koefficienter:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

och hvilken kort benämnes *ekvationssystemets determinant.*

Om $D \neq 0$, försvinna högra membra i de identiska likheterna (4) för värdena

$$(5)\quad x = -\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

och endast för dessa värden, hvaraf vi sluta att, om systemet (3) öfverhufvud har någon lösning, denna icke kan vara någon annan än (5). Att värdena (5) verkligen utgöra en lösning till (3) följer åter, utan någon kalkyl, däraf att de satisfiera likheterna

$$\begin{aligned} b_2 L_1 - b_1 L_2 &= 0, \\ -a_2 L_1 + a_1 L_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ty dessa likheter äro homogena med afseende å L_1 och L_2 och deras determinant

$$\begin{vmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

är identisk med D och således skild från 0, och enligt n° 1 äro de alltså satisfierade endast om samtidigt $L_1 = 0$ och $L_2 = 0$.

Om $D = 0$, reducera sig identiteterna (4) till

$$(4)'\quad \begin{aligned} b_2 L_1 - b_1 L_2 &= c_1 b_2 - c_2 b_1, \\ -a_2 L_1 + a_1 L_2 &= a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{aligned}$$

Härur framgår att, om någon af determinanterna

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

är skild från 0, L_1 och L_2 icke samtidigt kunna försvinna och ekvationssystemet (3) således icke har någon lösning.

Om såväl determinanten D som de ofvan betraktade determinanterna försvinna, erhållas ur (4) identiteterna

$$(4)'' \qquad a_1 L_2 = a_2 L_1, \quad b_1 L_2 = b_2 L_1.$$

Vi särskilja här två fall, beroende på om något af elementen i determinanten D är skildt från 0 eller om de alla äro 0.

I förra fallet är den ena af ekvationerna (3) satisfierad för alla värden x, y som satisfiera den andra ekvationen, hvilken i sin tur kan upplösas med afseende å en af de obekanta och definierar denna såsom en funktion af den andra, och systemet (3) har således oändligt många lösningar. Ty om vi t. ex. antaga $a_1 \neq 0$, visar oss den första af identiteterna (4)'', som nu kan skrifvas $L_2 = \frac{a_2}{a_1} L_1$, att hvarje värdepar x, y som satisfierar ekvationen $L_1 = 0$ äfven satisfierar ekvationen $L_2 = 0$, hvilken alltså är öfverflödig och kan bortlemnas. Ekvationen $L_1 = 0$ åter kan i förevarande fall skrifvas $x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1}$, och definierar således x såsom en funktion af y.

Om elementen a_1, b_1, a_2, b_2 i determinanten D alla försvinna, hafva ekvationerna (3) däremot ingen lösning, såframt icke samtidigt deras konstanta termer c_1 och c_2 äro noll, i hvilket fall de satisfieras af hvarje värdepar x, y.

Vi sammanfatta våra resultat i följande sats:

Ett system af två lineära ekvationer med två obekanta,

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases}$$

hvars determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

är skild från 0, *har en och endast en lösning, som kan skrifvas*

$$(5)' \qquad x = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Dessa värden x, y hafva determinanten D såsom gemensam nämnare, och till täljare, på tecknet när, de determinanter hvilka framgå ur D då koefficienterna för den ifrågavarande obekanta i de gifna ekvationerna ersättas med dessas konstanta termer c_1 och c_2.

Om $D = 0$ men någon af de i täljarena af värdena (5)' ingående determinanterna är skild från 0, *har systemet (3) ingen lösning.*

I händelse de betraktade determinanterna alla tre äro 0 *men något af elementen i determinanten D är skildt från* 0, *reducerar sig systemet (3) till*

en enda ekvation, hvilken definierar en af de obekanta såsom en funktion af den andra. Systemet (3) har således oändligt många lösningar.

Om slutligen alla element i D försvinna, har systemet (3) icke någon lösning, såframt icke samtidigt c_1 och c_2 äro 0, i hvilket fall ekvationerna (3) äro identiska och satisfieras af alla värden x, y.

3. Några egenskaper hos determinanter af andra ordningen. — De hittills betraktade determinanterna, hvilka hafva två rader, två kolonner och $2^2 = 4$ element, benämnas determinanter *af andra ordningen* eller *af andra graden*. Vi anföra här några egenskaper hos dessa determinanter, hvilka omedelbart verificeras genom uträkning.

1°. *Värdet af en determinant förändras icke om dess rader göras till kolonner och omvändt dess kolonner till rader:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

2°. *Om man i en determinant låter raderna byta plats eller kolonnerna byta plats, ändras determinantens tecken:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

3°. *Om båda raderna eller båda kolonnerna i en determinant innehålla samma element i samma ordning, är determinantens värde lika med 0:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0.$$

4°. *Om elementen i en rad eller i en kolonn hafva en gemensam faktor, kan denna utbrytas såsom faktor för determinanten:*

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

5°. *Om elementen i en rad eller i en kolonn båda utgöra summor af tvenne termer, kan determinanten skrifvas såsom en summa af två determinanter:*

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b_1 + b_2 \\ c & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}.$$

Genom upprepad användning af denna sats erhålles formeln

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

för hvilken vi snart finna användning.

6°. *Värdet af en determinant förändras icke om man till elementen i en rad eller en kolonn adderar den andra radens eller kolonnens element, multiplicerade med en och samma faktor.*

Denna sats utgör en följd af satserna 5°, 4° och 3°, ty man har t. ex.

$$\begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb & b \\ kd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Satsen 6° kan i flere fall användas för att förenkla beräkningen af en determinants värde. Exempelvis antar determinanten

$$\begin{vmatrix} 109 & 17 \\ 38 & 6 \end{vmatrix},$$

om till den första kolonnens element adderas den andra kolonnens element multiplicerade med -6, den enklare formen

$$\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 34 = 8.$$

7°. *Produkten af två determinanter kan åter skrifvas såsom en determinant, enligt formeln*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa_1+bb_1 & ac_1+bd_1 \\ ca_1+db_1 & cc_1+dd_1 \end{vmatrix}.$$

Riktigheten af denna formel följer enkelt ur likheten (6) och de ofvan bevisade satserna. För kvadraten af en determinant erhålles speciellt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{vmatrix},$$

hvilken likhet, då determinanterna utvecklas, reducerar sig till den viktiga identiteten

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

4. Två lineära homogena ekvationer med tre obekanta. — Vi skola nu söka lösningarna till ett ekvationssystem af formen

$$(7) \qquad \begin{cases} L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0. \end{cases}$$

Om vi under hvarandra uppskrifva de obekantas koefficienter:

$$(8) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|,$$

kunna vi ur denna s. k. *matris* bilda sex determinanter, i det vi för hvarje gång utvälja två af matrisens kolonner. Tre af dessa sex determinanter framgå ur de tre öfriga då man i dessa låter kolonnerna byta plats.

Vi betrakta först det allmänna fallet då nyssnämnda determinanter icke alla försvinna, och antaga t. ex.

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Enligt n° 2 satisfieras då, för hvarje gifvet värde af z, ekvationssystemet (7) af ett och endast ett värdepar x, y, nämligen:

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} c_1 z & b_1 \\ c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 z \\ a_2 & c_2 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

hvilka värden, enligt hvad i n° 3 visats, äfven kunna skrifvas:

$$(10) \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z.$$

Om vi införa beteckningen

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t,$$

kan vår lösning skrifvas under den symmetriska formen

$$(10)' \qquad x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t,$$

där t kan hafva hvilket värde som helst. Ekvationerna (7) satisfieras således i förevarande fall af hvarje värdesystem x, y, z i hvilket x, y och z äro proportionella mot determinanterna i högra membra af (10)', och endast af dessa värdesystem. Lösningen till (7) skrifves därför äfven under formen

$$(10)'' \qquad \frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} .$$

Nämnarena utgöras af de determinanter som erhållas ur matrisen (8) då man från denna successivt uttager den andra och den tredje kolonnen, den tredje och den första kolonnen, den första och den andra kolonnen.

Om determinanten (9) har värdet 0 men någon af de öfriga determinanterna som kunna bildas ur matrisen (8) är skild från 0, erhålles samma lösning (10)' som ofvan, hvarom läsaren själf bör öfvertyga sig.

Om samtliga determinanter som kunna bildas ur matrisen (8) hafva värdet 0 men något af matrisens element är skildt från 0, reducerar sig systemet (7) till en enda ekvation, hvilken definierar en af de obekanta såsom funktion af de två öfriga. Ty i detta fall har man identiteterna

$$a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0, \quad b_2 L_1 - b_1 L_2 = 0, \quad c_2 L_1 - c_1 L_2 = 0,$$

och om vi t. ex. antaga $a_1 \neq 0$, följer ur den första af dessa identiteter att hvarje värdesystem som satisfierar ekvationen $L_1 = 0$ äfven satisfierar ekvationen $L_2 = 0$, hvilken sålunda är öfverflödig och kan bortlemnas. Ekvationen $L_1 = 0$ åter kan upplösas med afseende å x, hvarvid erhålles

$$x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1} z .$$

Våra resultat kunna sammanfattas som följer:

Om någon af de determinanter som kunna bildas ur matrisen (8) är skild från 0, *bestämmer ekvationssystemet (7) entydigt förhållandena mellan de obekanta x, y, z, och samtliga lösningar till systemet innefattas i formlerna (10)', där t kan hafva hvilket värde som helst.*

Äro samtliga determinanter som innehållas i matrisen (8) lika med 0 *men något af matrisens element skildt från* 0, *reducerar sig systemet (7) till en enda ekvation. Denna definierar en af de obekanta såsom funktion af de två öfriga, hvilkas värden kunna väljas godtyckligt.*

Om slutligen samtliga element i matrisen (8) äro noll, försvinna L_1 och L_2 identiskt och systemet (7) satisfieras af alla värden x, y, z.

Ekvationssystemet (7) satisfieras således i hvarje fall af en oändlig mängd olika värdesystem x, y, z.

Vi anmärka ännu att systemet (7) för $z = 1$ reducerar sig till det i n° 2 behandlade ekvationssystemet (3). Om villkoret (9) är uppfylldt, kunna vi således enligt (10)'' skrifva lösningen till sistnämnda system under formen

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

hvilket resultat stämmer öfverens med det vi funnit i n° 2.

5. **Tre lineära homogena ekvationer med tre obekanta.** — Vi foga nu till ekvationerna (7) en tredje lineär homogen ekvation, och betrakta således ett system af formen

$$(11) \qquad \begin{cases} L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ L_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0. \end{cases}$$

Vi bilda här åter en lineär kombination af L_1, L_2, L_3:

$$(12) \qquad l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3 =$$
$$(a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3) x + (b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3) y + (c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3) z,$$

och söka bestämma konstanterna l_1, l_2, l_3 så att i detta uttryck koefficienterna för två af de obekanta x, y, z försvinna.

Vi sätta först koefficienterna för y och z lika med 0:

$$(13) \qquad \begin{matrix} b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 = 0, \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 = 0. \end{matrix}$$

Enligt föregående paragraf äro dessa ekvationer satisfierade om l_1, l_2, l_3 äro proportionella mot determinanterna

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

förutsatt att någon af dessa är skild från 0. Vi kunna således speciellt välja $l_1 = A_1$, $l_2 = A_2$, $l_3 = A_3$, hvilka värden satisfiera ekvationerna (13) äfven i det fall då ofvanstående determinanter alla försvinna. Identiteten (12) antar då formen

$$(14) \qquad A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 = (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) x.$$

På analogt sätt finner man att koefficienterna för z och x i uttrycket (12) försvinna om åt l_1, l_2, l_3 gifvas värdena

$$B_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \quad B_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$

hvarur följer

$$(14)' \qquad B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 = (b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3)\, y,$$

samt slutligen att koefficienterna för x och y i samma uttryck blifva 0 om för l_1, l_2, l_3 insättas värdena

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

hvarvid erhålles

$$(14)'' \qquad C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 = (c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3)\, z.$$

Vi skola närmare betrakta koefficienterna för x, y, z i högra membra af de identiska likheterna (14), (14)′ och (14)″:

$$(15) \qquad \begin{array}{l} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3, \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3, \\ c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3. \end{array}$$

Om vi utveckla determinanterna A_1, A_2, A_3, antar det första af ofvanstående uttryck formen

$$(16) \qquad a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Man observerar omedelbart att, om i denna summa indices $1, 2, 3$ underkastas *en cyclisk permutation*[1]), d. v. s. om 1 ersättes med 2, 2 med 3 och 3 med 1, medan bokstäfverna a, b, c få bibehålla sina platser, de tre första termerna cycliskt öfvergå i hvarandra och likaså de tre sista termerna, hvaraf följer att summan förblir densamma.

Vi ordna nu faktorerna i hvarje term af summan (16) så att deras indices komma i sin naturliga ordningsföljd $1, 2, 3$. Nämnda summa kan då skrifvas:

$$(16)' \qquad a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3,$$

och härur framgår att densamma icke heller förändras om bokstäfverna a, b, c underkastas en cyclisk permutation medan indices lemnas orörda, eller m. a. o. om talen a_1, a_2, a_3 ersättas med b_1, b_2, b_3, dessa med ta-

---

[1]) Att *cycliskt permutera* en följd af element, $e_1, e_2, \ldots, e_n$, vill säga att ersätta det första elementet med det andra, det andra med det tredje o. s. v., och slutligen det sista elementet med det första. Om vi dela en cirkels periferi i n lika delar och låta de successiva delningspunkterna representera elementen $e_1, e_2, \ldots, e_n$, kan den cycliska permutationen åstadkommas genom en vridning af cirkeln kring dess medelpunkt om vinkeln $\frac{2\pi}{n}$.

len c_1, c_2, c_3, och dessa åter med a_1, a_2, a_3; ty härvid öfvergå ånyo de tre första termerna cycliskt i hvarandra, och likaså de tre sista termerna.

Men vid en cyclisk permutation af bokstäfverna a, b, c öfvergå jämväl determinanterna A_1, B_1, C_1 cycliskt i hvarandra, och likaså determinanterna A_2, B_2, C_2 och A_3, B_3, C_3, hvaraf åter följer att äfven uttrycken (15) permuteras cycliskt, så att det första af dem öfvergår i det andra, det andra i det tredje och detta åter i det första. Då vi nu å andra sidan funnit att det första af dessa uttryck icke förändras vid nämnda permutation, kunna vi häraf sluta att *uttrycken (15) äro sinsemellan lika*, och således alla lika med summan (16) eller (16)′, hvilket man äfven direkt kan kontrollera genom att utveckla de två senare af nämnda uttryck.

För summan (16) användes den kortare beteckningen

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

en s. k. *determinant af tredje ordningen* eller *af tredje graden*. Denna innehåller $3^2 = 9$ element, ordnade i tre horisontella rader och i tre vertikala kolonner. Elementen a_1, b_2, c_3 bilda determinantens hufvuddiagonal, elementen a_3, b_2, c_1 dess andra diagonal. Determinanterna A_ν, B_ν, C_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ erhållas, på tecknet när, ur den ofvanstående determinanten då en af dennas rader och en af dess kolonner bortlemnas, och sägas därför utgöra *underdeterminanter* till densamma. Vi återkomma snart till regeln för dessas bildande.

Bland termerna i summan (16) ingå $a_1 b_2 c_3$, som utgör produkten af elementen i hufvuddiagonalen af determinanten (17), samt $-a_3 b_2 c_1$, eller produkten af den andra diagonalens element, tagen med motsatt tecken. Ur dessa två termer erhållas, såsom ofvan visats, summans öfriga termer, då man två gånger å rad cycliskt permuterar antingen indices $1, 2, 3$ eller bokstäfverna a, b, c. Men vid en cyclisk permutation af indices öfvergå den betraktade determinantens rader, och vid en cyclisk permutation af bokstäfverna dess kolonner cycliskt i hvarandra, och vi ledas sålunda till följande regel för att ur determinanten (17) bilda det uttryck, (16) eller (16)′, som densamma representerar:

Under determinanten uppskrifvas ånyo dess två första rader, eller ock uppskrifvas efter determinanten dess två första kolonner, såsom i nedanstående schemata angifves:

$$\begin{array}{|ccc|} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

Hvartdera schemat innehåller den gifna determinantens hufvuddiagonal och två med denna parallella fullständiga rader med tre element, och likaså determinantens andra diagonal samt tvenne fullständiga rader som äro parallella med denna. Vi multiplicera elementen i enhvar af dessa sex rader, addera de produkter som erhållas för de tre förstnämnda raderna och subtrahera från summan de produkter som erhållas för de tre senare raderna [1]).

Denna enkla regel för utvecklingen af en determinant af tredje ordningen benämnes, efter dess upptäckare, SARRUS' *regel*.

Vi återgå till de identiska likheterna (14), (14)' och (14)''. Dessa kunna numera skrifvas under formen

$$\begin{aligned} &A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 = Dx, \\ (18) \qquad &B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 = Dy, \\ &C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 = Dz, \end{aligned}$$

där D betecknar determinanten (17).

I händelse $D \neq 0$, sluta vi härur omedelbart att, om $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, man äfven har $x = y = z = 0$. Ekvationssystemet (11) har således i detta fall endast den självfallna lösningen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Om $D = 0$, reducera sig ofvanstående identiteter till

$$\begin{aligned} &A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 = 0, \\ (18)' \qquad &B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 = 0, \\ &C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 = 0. \end{aligned}$$

Om vi antaga $A_1 \neq 0$, kunna vi ur den första af dessa identiteter sluta att ekvationen $L_1 = 0$ är satisfierad för hvarje värdesystem x, y, z som satisfierar de två ekvationerna $L_2 = 0$ och $L_3 = 0$, hvilka i sin tur (då den af deras koefficienter bildade matrisen säkert innehåller en determinant, nämligen A_1, som är skild från 0) bestämma förhållandena mellan de obekanta x, y, z. Ett liknande resultat erhålles i hvarje fall då $D = 0$ men någon af underdeterminanterna A_ν, B_ν, C_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ är skild från 0.

Om nämnda underdeterminanter alla försvinna, har man identiskt (jmf. s. 582)

$$\begin{aligned} &a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0, \quad b_2 L_1 - b_1 L_2 = 0, \quad c_2 L_1 - c_1 L_2 = 0, \\ &a_3 L_2 - a_2 L_3 = 0, \quad b_3 L_2 - b_2 L_3 = 0, \quad c_3 L_2 - c_2 L_3 = 0, \\ &a_1 L_3 - a_3 L_1 = 0, \quad b_1 L_3 - b_3 L_1 = 0, \quad c_1 L_3 - c_3 L_1 = 0. \end{aligned}$$

Om vi antaga att $a_1 \neq 0$, följer ur identiteterna $a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0$ och $a_1 L_3 - a_3 L_1 = 0$ att, så snart $L_1 = 0$, äfven L_2 och L_3 försvinna, så att systemet (11) följaktligen reducerar sig till en enda ekvation, $L_1 = 0$,

[1]) I stället för att ånyo uppskrifva rader eller kolonner, kan man tänka sig determinanten hoprullad till en cylinder, hvars sidolinie är parallell antingen med radernas eller med kolonnernas riktning.

hvilken definierar en af de obekanta, nämligen x, såsom funktion af de två öfriga. Ett analogt resultat erhålles i hvarje annat fall då samtliga determinanter A_ν, B_ν, C_ν försvinna men någon koefficient i likheterna (11) är skild från 0.

Vi hafva sålunda erhållit följande resultat:

Ett system af tre lineära homogena ekvationer med tre obekanta,

$$(11) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0, \end{cases}$$

hvars determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

är skild från 0, *har ingen annan lösning än* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Om determinanten D *försvinner men någon af dess underdeterminanter är skild från* 0, *reducerar sig systemet (11) till två ekvationer, hvilka bestämma förhållandena mellan de obekanta* x, y, z.

Om alla underdeterminanter till determinanten D *försvinna (i hvilket fall äfven* D *försvinner) men åtminstone ett af elementen i* D *är skildt från* 0, *reducerar sig systemet (11) till en enda ekvation; denna definierar en af de obekanta såsom funktion af de två andra, hvilkas värden kunna väljas godtyckligt.*

Om slutligen samtliga element i determinanten D *äro* 0, *satisfieras ekvationerna (11) af alla värdepar* x, y, z.

Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att systemet (11) skall hafva någon annan lösning än $x = 0, y = 0, z = 0$ *är alltså att dess determinant försvinner.*

6. **Några egenskaper hos determinanter af tredje ordningen.** — De satser vi i n° 3 anfört kunna alla generaliseras till determinanter af tredje ordningen, hvilka därutöfver ännu besitta andra intressanta egenskaper. Samtliga dessa egenskaper härflyta mer eller mindre direkt ur SARRUS' regel.

1°. *En determinant blir till sitt värde oförändrad om dess rader göras till kolonner och dess kolonner till rader:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Riktigheten häraf inses enklast om man för utvecklingen af determinanten i venstra membrum använder det förra och för utvecklingen af determinanten i högra membrum det senare af de s. 585 angifna schemata.

2°. *Värdet af en determinant förändras icke om dess rader eller dess kolonner cycliskt permuteras.*

Denna sats framgår omedelbart ur SARRUS' regel (jmf. äfven noten s. 586). Genom upprepad användning af satsen kan man få hvilket element som helst att intaga det första elementets plats. Om vi sålunda i den ofvan betraktade determinanten vilja göra b_3 till första element, behöfva vi endast två gånger permutera dess rader cycliskt och därefter utföra en cyclisk permutation af dess kolonner, hvarvid successivt erhålles

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & a_3 \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

3°. Enhvar af de sex termerna i utvecklingen af en determinant af tredje ordningen utgör en produkt af tre element, hvilka tillhöra hvar sin rad och hvar sin kolonn i determinanten (jmf. (16) och (16)').

Omvändt ingår hvarje af determinantens element i två olika termer, såsom omedelbart framgår ur SARRUS' regel. Om vi sammanslå dessa termer till en, i det vi utbryta det betraktade elementet såsom faktor, kan den andra faktorn skrifvas under formen af en determinant af andra ordningen; denna benämnes *den till det gifna elementet hörande underdeterminanten.*

Exempelvis ingår, i utvecklingen af determinanten (17), elementet a_1 i de två termerna $a_1 b_2 c_3$ och $- a_1 b_3 c_2$, hvilkas summa kan skrifvas

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Den i högra membrum stående determinanten utgör således den till a_1 hörande underdeterminanten. Den är på formen när identisk med den i n° 5 betraktade determinanten A_1, och erhålles ur determinanten (17) då dennas första rad och första kolonn bortlemnas.

För att erhålla den till ett godtyckligt element hörande underdeterminanten kan man, med stöd af egenskapen 2°, först bringa detta element att intaga det första elementets plats, och från den sålunda transformerade determinanten bortlemna den första raden och den första kolonnen. Exempelvis kunna vi af likheten (19) sluta att den till elementet b_3 hörande underdeterminanten är

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Densamma är, på formen när, identisk med den i n⁰ 5 betraktade determinanten B_3.

Allmänt finner man på detta sätt att de till elementen a_ν, b_ν, c_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ i determinanten (17) hörande underdeterminanterna på formen när äro identiska med de determinanter som i n⁰ 5 betecknats med A_ν, B_ν, C_ν, hvilket läsaren i detalj bör kontrollera.

Om vi ordna termerna i utvecklingen af determinanten (17) efter elementen i dess första kolonn, sålunda att vi sammanslå de två termer som innehålla elementet a_1, därefter de som innehålla elementet a_2 och slutligen de som innehålla elementet a_3, erhålles för determinanten uttrycket $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$, som säges utgöra dess *utveckling efter den första kolonnens element*. Om determinanten utvecklas efter elementen i dess andra eller tredje kolonn, erhålles likaså $b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3$ resp. $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$. Vi återfinna sålunda uttrycken (15).

Man kan äfven utveckla determinanten efter elementen i en rad, hvarvid för densamma i ordning erhållas uttrycken

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1, \quad a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2, \quad a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3.$$

4⁰. *Om två rader eller två kolonner byta plats, ändras determinantens tecken.*

Ty härvid ändras tecknet för enhvar af de underdeterminanter som bildas af elementen i de ifrågavarande raderna eller kolonnerna, och om vi utveckla determinanten efter elementen i den återstående raden eller kolonnen, framgår häraf omedelbart att dess tecken ändras.

För öfrigt framgår direkt ur uttrycken (16) eller (16)′ att, om två af indices $1, 2, 3$ eller två af bokstäfverna a, b, c byta plats, hvilket motsvarar ett utbyte af tvenne rader resp. tvenne kolonner i determinanten (17), de tre första termerna öfvergå i de tre sista termerna, tagna med motsatta tecken, och omvändt, så att summan följaktligen ändrar tecken.

Satsen 4⁰ leder till ett nytt sätt att bilda den till ett gifvet element hörande underdeterminanten, hvilket är enklare än det vi ofvan angifvit. För att få det gifna elementet att intaga det första elementets plats kunna vi nämligen äfven förfara sålunda, att vi låta den rad och den kolonn som innehålla förstnämnda element successivt byta plats med enhvar af de föregående raderna resp. kolonnerna. Då nu determinantens tecken ändras hvarje gång två rader eller två kolonner byta plats, sluter man häraf till följande praktiska regel, hvilken läsaren uppmanas att i detalj kontrollera:

För att erhålla den till ett gifvet element hörande underdeterminanten, kan man från den förelagda determinanten utstryka den rad och den kolonn som innehålla detta element; den sökta underdeterminanten är då lika med den af de återstående fyra elementen bildade determinanten, tagen med det tecken som i nedanstående schema är utsatt på det gifna elementets plats:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Enligt denna regel är t. ex. den till elementet b_3 i determinanten (17) hörande underdeterminanten lika med

$$-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

hvilket stämmer med det tidigare erhållna resultatet.

5°. *Om två rader eller två kolonner innehålla samma element i samma ordning, har determinanten värdet* 0.

Ty om vi låta de betraktade raderna eller kolonnerna byta plats, blir ju å ena sidan determinanten oförändrad, medan å andra sidan, enligt 4°, dess tecken ändras. Betecknas determinantens värde med D, är således $D = -D$, hvaraf $D = 0$. Satsens riktighet inses lika omedelbart om man utvecklar determinanten efter elementen i den återstående raden resp. kolonnen, ty de tillhörande underdeterminanterna äro alla lika med noll.

6°. *Om samtliga element i en kolonn eller en rad hafva en gemensam faktor, kan denna utbrytas såsom faktor för determinanten.* — Man har t. ex.

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

såsom man omedelbart finner enligt SARRUS' regel, eller genom att utveckla determinanten i venstra membrum efter elementen i dess andra kolonn.

7°. *Om alla element i en rad eller en kolonn utgöra summor af två termer, kan determinanten skrifvas såsom en summa af två determinanter.*

Exempelvis är

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2' + b_2'' & c_2' + c_2'' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2'' & c_2'' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

hvilken likhet man bevisar genom att utveckla den gifna determinanten efter elementen i dess andra rad.

8°. *Värdet af en determinant ändras icke om man till elementen i en rad eller en kolonn adderar elementen i en annan rad eller kolonn, multiplicerade med en och samma faktor.*

Denna egenskap följer ur 7°, 6° och 5°. Ty enligt 7° erhålles t. ex.

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

men den senare determinanten i högra membrum har värdet 0, ty enligt 6° kunna vi ur den första kolonnens element utbryta faktorn k, och härvid erhålles en determinant i hvilken de två första kolonnerna innehålla samma element och hvars värde således, enligt 5°, är lika med 0.

Satsen 8° spelar en viktig roll vid determinanters reduktion till enklare form och vid deras beräkning. Vi tillämpa densamma på determinanten

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Om vi subtrahera den andra kolonnens element från den första kolonnens och den tredje kolonnens element från den andra kolonnens, samt utveckla den erhållna determinanten efter elementen i dess tredje rad, erhålles:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-c^2 \\ a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a+b & b+c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

9°. *För produkten af två determinanter af tredje ordningen gäller formeln:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1a_1'+b_1b_1'+c_1c_1' & a_1a_2'+b_1b_2'+c_1c_2' & a_1a_3'+b_1b_3'+c_1c_3' \\ a_2a_1'+b_2b_1'+c_2c_1' & a_2a_2'+b_2b_2'+c_2c_2' & a_2a_3'+b_2b_3'+c_2c_3' \\ a_3a_1'+b_3b_1'+c_3c_1' & a_3a_2'+b_3b_2'+c_3c_2' & a_3a_3'+b_3b_3'+c_3c_3' \end{vmatrix},$$

hvilken läsaren uppmanas att själf kontrollera genom att på determinanten i högra membrum tillämpa de ofvan bevisade satserna.

7. **Tre allmänna lineära ekvationer med tre obekanta.** — Behandlingen af systemet (11) i n° 5 kan direkt generaliseras till det fall då ekvationerna innehålla konstanta termer:

$$(20)\qquad \begin{cases} L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0\,, \\ L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0\,, \\ L_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0\,. \end{cases}$$

Vi kunna emellertid här något förkorta framställningen i det vi göra bruk af de egenskaper vi lärt känna hos determinanter af tredje ordningen.

Vi bilda åter *ekvationssystemets determinant:*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

och beteckna såsom förut med A_ν, B_ν, C_ν dennas till elementen a_ν, b_ν, c_ν hörande underdeterminanter.

Härefter multiplicera vi venstra membra i likheterna (20) i ordning med de underdeterminanter, A_1, A_2, A_3, som höra till koefficienterna för den obekanta x, och addera produkterna. Koefficienten för x i summan är lika med uttrycket

$$(21)\qquad a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3\,,$$

och således lika med D, ty detta uttryck erhålles då D utvecklas efter den första kolonnens element. Koefficienten för y åter är lika med $b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3$. Detta uttryck framgår ur (21) då a_1, a_2, a_3 ersättas med b_1, b_2, b_3 (determinanterna A_1, A_2, A_3 äro nämligen bildade af den andra och den tredje kolonnens element och innehålla således icke elementen a_1, a_2, a_3), och är alltså lika med den determinant som erhålles ur D då man i stället för den första kolonnens element skrifver b_1, b_2, b_3. Men denna determinant är lika med 0, eftersom dess två första kolonner äro identiska, och variabeln y försvinner således från den betraktade summan. På analogt sätt inses att koefficienten för z i denna summa har värdet 0. Slutligen erhålles till konstant term uttrycket $d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$, hvilket framgår ur (21) då a_1, a_2, a_3 ersättas med d_1, d_2, d_3, och således är lika med den determinant, D_1, i hvilken D öfvergår då i stället för den första kolonnens element skrifvas d_1, d_2, d_3.

Vi erhålla sålunda den första af likheterna

$$(22)\qquad \begin{aligned} A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 &= Dx + D_1\,, \\ B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 &= Dy + D_2\,, \\ C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 &= Dz + D_3\,, \end{aligned}$$

af hvilka de två senare härledas på ett i allo analogt sätt, och i hvilka D_1, D_2, D_3 beteckna determinanterna

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Determinanterna D, D_1, D_2, D_3 framgå ur den af de gifna ekvationernas koefficienter bildade *matrisen*

$$(23) \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix},$$

då man utväljer tre af dennas fyra kolonner, och hvarje determinant som kan bildas på detta sätt öfverensstämmer, på kolonnernas ordningsföljd när, med någon af nämnda determinanter.

Vi betrakta först det allmänna fallet, då $D \neq 0$. I likheterna (22), hvilka gälla identiskt, d. v. s. för alla värden x, y, z, försvinna i detta fall de högra membra för ett och endast ett värdesystem af de obekanta, nämligen

$$(24) \qquad x = -\frac{D_1}{D}, \quad y = -\frac{D_2}{D}, \quad z = -\frac{D_3}{D}.$$

Om systemet (20) öfverhufvud har någon lösning, kan denna således icke vara någon annan än (24). För att visa att dessa värden verkligen satisfiera (20), multiplicera vi identiteterna (22) med a_1, b_1, c_1 och addera resultaten. Koefficienterna för L_1, L_2, L_3 blifva då i ordning

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1, \quad a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2, \quad a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3.$$

Den första af dessa koefficienter utgör utvecklingen af determinanten D efter elementen i dess första rad. De två senare koefficienterna åter hafva värdet 0, ty de äro lika med de determinanter hvilka framgå ur D då elementen i den andra resp. den tredje raden ersättas med a_1, b_1, c_1, såsom man omedelbart finner om man utvecklar D efter elementen i nämnda rader. Vårt resultat antar således formen

$$DL_1 = a_1(Dx + D_1) + b_1(Dy + D_2) + c_1(Dz + D_3),$$

och denna identitet visar oss att DL_1 och således L_1 försvinner för värdena (24). Om man multiplicerar likheterna (22) med a_2, b_2, c_2 eller med a_3, b_3, c_3, finner man på samma sätt att nämnda värden satisfiera jämväl ekvationerna $L_2 = 0$ och $L_3 = 0$.

Om $D \neq 0$ satisfieras således det gifna ekvationssystemet af värdena (24), och endast af dessa värden.

Vi antaga nu $D = 0$, i hvilket fall identiteterna (22) reducera sig till

$$(22)' \qquad \begin{aligned} A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 &= D_1, \\ B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 &= D_2, \\ C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 &= D_3. \end{aligned}$$

Om någon af determinanterna D_1, D_2, D_3 är skild från 0, sluta vi ur (22)′ omedelbart att L_1, L_2 och L_3 icke samtidigt kunna försvinna och att det gifna ekvationssystemet (20) således icke har någon lösning.

Om åter $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, följer ur (22)′:

$$(22)'' \qquad \begin{aligned} A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 &= 0, \\ B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 &= 0, \\ C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 &= 0. \end{aligned}$$

I händelse $A_1 \neq 0$, visar oss den första af dessa identiteter att L_1 försvinner för hvarje värdesystem x, y, z som satisfierar ekvationerna $L_2 = 0$ och $L_3 = 0$. Dessa åter kunna upplösas med afseende å y och z, hvarvid enligt n⁰ 2 erhålles

$$y = -\frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} a_2 x + d_2 & c_2 \\ a_3 x + d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{B_1}{A_1} x - \frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$z = -\frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} b_2 & a_2 x + d_2 \\ b_3 & a_3 x + d_3 \end{vmatrix} = \frac{C_1}{A_1} x - \frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Allmänt inses på detta sätt att, så snart någon underdeterminant till D är skild från 0, systemet (20) reducerar sig till tvenne ekvationer hvilka definiera två af de obekanta såsom funktioner af den tredje.

Vi antaga nu att underdeterminanterna A_ν, B_ν, C_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ alla försvinna, i hvilket fall äfven $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Man har då identiskt

$$\begin{aligned} a_2 L_1 - a_1 L_2 &= a_1 d_2 - a_2 d_1, \\ a_3 L_2 - a_2 L_3 &= a_2 d_3 - a_3 d_2, \\ a_1 L_3 - a_3 L_1 &= a_3 d_1 - a_1 d_3, \end{aligned}$$

samt två andra system af identiteter hvilka framgå ur de ofvanstående då koefficienterna a_1, a_2, a_3 ersättas med b_1, b_2, b_3 eller med c_1, c_2, c_3. Högra membra i dessa identiteter utgöra determinanter af andra ordningen och framgå ur matrisen (23) då man från denna uttager de element som tillhöra två af dess rader och två af dess kolonner, däribland den sista kolonnen; och omvändt är hvarje determinant som kan bildas på detta sätt, på tecknet när, lika med högra membrum i någon af ofvannämnda identiteter. Om någon enda af dessa determinanter är skild

från 0, kunna således L_1, L_2, L_3 icke samtidigt försvinna, och systemet (20) har alltså i detta fall icke någon lösning.

Om däremot nyssnämnda determinanter alla försvinna, i hvilket fall samtliga determinanter af andra ordningen som innehållas i matrisen (23) äro lika med 0, reducera sig de ofvan betraktade identiteterna till

$$a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0, \quad a_3 L_2 - a_2 L_3 = 0, \quad a_1 L_3 - a_3 L_1 = 0,$$

$$b_2 L_1 - b_1 L_2 = 0, \quad b_3 L_2 - b_2 L_3 = 0, \quad b_1 L_3 - b_3 L_1 = 0,$$

$$c_2 L_1 - c_1 L_2 = 0, \quad c_3 L_2 - c_2 L_3 = 0, \quad c_1 L_3 - c_3 L_1 = 0,$$

och vi sluta häraf (jmf. s. 586) att, i händelse någon af koefficienterna a_ν, b_ν, c_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ är skild från 0, systemet (20) reducerar sig till en enda ekvation hvilken bestämmer en af de obekanta såsom funktion af de två öfriga.

Om slutligen koefficienterna a_ν, b_ν, c_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ alla äro 0, hafva ekvationerna (20) ingen lösning, såframt icke samtidigt $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, i hvilket fall de satisfieras af alla värden x, y, z.

Vi sammanfatta våra resultat i följande sats:

Ett ekvationssystem (20) hvars determinant D är skild från 0 har en och endast en lösning, hvilken kan skrifvas under formen

$$x = -\frac{D_1}{D}, \quad y = -\frac{D_2}{D}, \quad z = -\frac{D_3}{D},$$

där D_1, D_2, D_3 erhållas ur determinanten D då i denna koefficienterna för x, för y och för z i ordning ersättas med de gifna ekvationernas konstanta termer d_1, d_2, d_3.

Om $D = 0$ men någon af determinanterna D_1, D_2, D_3 är skild från 0, har systemet (20) ingen lösning.

Om $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ men åtminstone en af underdeterminanterna till D är skild från 0, reducerar sig systemet (20) till två ekvationer. Dessa bestämma två af de obekanta såsom funktioner af den tredje, hvars värde kan väljas godtyckligt.

Om samtliga underdeterminanter till D försvinna men någon annan af de determinanter af andra ordningen som innehållas i matrisen (23) är skild från 0, har systemet (20) ingen lösning.

Om alla determinanter af andra ordningen som innehållas i matrisen (23) försvinna men åtminstone ett af elementen i determinanten D är skildt från 0, reducerar sig systemet (20) till en enda ekvation. Denna bestämmer en af de obekanta såsom funktion af de två andra, hvilkas värden kunna väljas godtyckligt.

Om slutligen alla element i determinanten D försvinna, har systemet (20) icke någon lösning, såframt icke samtidigt $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, i hvilket fall detsamma satisfieras af alla värden x, y, z.

8. **Ekvationssystem med flere ekvationer än obekanta.** — Ett system af lineära ekvationer i hvilket antalet ekvationer är större än an-

talet obekanta har i allmänhet icke någon lösning. Vi skola, med hjälp af de egenskaper vi lärt känna hos determinanter, i några enkla fall visa huru man uppställer villkoret för att en lösning skall existera, eller, annorlunda uttryckt, för att de gifna ekvationerna skola vara *förenliga* eller *kompatibla*.

Vi behandla först ett system af tre ekvationer med två obekanta:

$$(25)\qquad \begin{cases} L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \\ L_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 = 0, \end{cases}$$

och betrakta här åter determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

för hvars underdeterminanter vi använda samma beteckningar som förut.

Om L_1, L_2, L_3 i ordning multipliceras med de till c_1, c_2, c_3 hörande underdeterminanterna C_1, C_2, C_3, erhålles

$$C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 =$$
$$(a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3) x + (b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3) y + (c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3).$$

Men $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 = D$, och koefficienterna för x och y, hvilka erhållas ur förstnämnda uttryck då c_1, c_2, c_3 ersättas med a_1, a_2, a_3 resp. b_1, b_2, b_3, hafva värdet 0, eftersom de kunna skrifvas under formen af determinanter i hvilka två kolonner äro lika. Ofvanstående identitet reducerar sig alltså till

$$(26)\qquad C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3 = D.$$

Härur framgår att L_1, L_2 och L_3 icke samtidigt kunna försvinna om $D \neq 0$, eller annorlunda uttryckt:

Ett nödvändigt villkor för att ekvationerna (25) skola vara förenliga är att determinanten D försvinner.

Men detta villkor är icke tillräckligt, d. v. s. det kan inträffa att determinanten D har värdet 0 men ekvationerna (25) det oaktadt icke hafva någon gemensam lösning. För att fullständigt utreda denna fråga har man att undersöka nämnda determinants underdeterminanter, och, i händelse dessa alla äro 0, dess element. Med stöd af identiteten (26) och de i n° 2 uppställda resultaten erhåller man följande sats, hvars bevis läsaren i detalj bör genomföra:

Ekvationerna (25) äro förenliga om determinanten D försvinner och därtill något af följande villkor är uppfylldt:

1°. *Åtminstone en af de underdeterminanter till D som bildas af de två första kolonnernas element, d. v. s. af de obekantas koefficienter, är skild från* 0.

2°. *Samtliga underdeterminanter till D försvinna, men något af elementen i de två första kolonnerna är skildt från* 0.

3°. *Alla element i determinanten D försvinna.*

Om intet af dessa fall inträffar, d. v. s. om $D \neq 0$, eller om de underdeterminanter till D som bildas af de två första kolonnernas element alla försvinna men någon annan underdeterminant är skild från 0, *eller om alla element i nämnda kolonner försvinna men något element i den tredje kolonnen är skildt från* 0, *äro däremot ekvationerna (25) inkompatibla, d. v. s. de hafva icke någon gemensam lösning.*

Vi gå till ett system af fyra lineära ekvationer med tre obekanta:

$$(27) \qquad \begin{cases} L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \\ L_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0, \\ L_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0. \end{cases}$$

I analogi med det föregående söka vi bestämma konstanterna l_1, l_2, l_3, l_4 i uttrycket $l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3 + l_4 L_4$ så att koefficienterna för de obekanta x, y, z försvinna. Vi erhålla sålunda för l_1, l_2, l_3, l_4 villkorsekvationerna:

$$(28) \qquad \begin{aligned} a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 &= 0, \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 &= 0, \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 &= 0. \end{aligned}$$

Vi betrakta den af dessa ekvationers koefficienter bildade matrisen, hvilken, om raderna göras till kolonner och omvändt, antar formen

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{matrix} \right\|.$$

Om någon af de determinanter af tredje ordningen, hvilka kunna bildas ur denna matris sålunda att man utväljer tre af dess rader, är skild från 0, kunna ekvationerna (28), såsom i n° 7 visats, upplösas med afseende å tre af de obekanta, och man finner genom att resonera såsom i n° 4 att nämnda ekvationer i detta fall äro satisfierade såsnart värdena af l_1, l_2, l_3, l_4 äro proportionella mot determinanterna

$$D_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}, \quad D_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Vi sluta häraf att ekvationerna (28) i hvarje fall, vare sig ofvanstående determinanter försvinna eller icke, äro satisfierade för värdena $l_1 = D_1$, $l_2 = D_2$, $l_3 = D_3$, $l_4 = D_4$, och vi erhålla således identiteten

(29) $$D_1 L_1 + D_2 L_2 + D_3 L_3 + D_4 L_4 = d_1 D_1 + d_2 D_2 + d_3 D_3 + d_4 D_4 .$$

Uttrycket $d_1 D_1 + d_2 D_2 + d_3 D_3 + d_4 D_4$ skrifves under formen af följande *determinant af fjärde ordningen:*

(30) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Determinanterna D_1, D_2, D_3, D_4 erhållas, på tecknet när, då man från determinanten (30) i ordning utstryker de rader som innehålla elementen d_1, d_2, d_3, d_4, samt den sista kolonnen, hvilken innehåller alla dessa element.

Vi kunna här åter ur identiteten (29) draga följande slutsats:

Ett nödvändigt villkor för att ekvationerna (27) skola vara förenliga är att den af deras koefficienter bildade determinanten (30) försvinner.

För att finna tillräckliga villkor, har man åter att betrakta de *underdeterminanter* som kunna bildas ur determinanten (30), sålunda att antingen en rad och en kolonn, eller två rader och två kolonner utelemnas från densamma. Man erhåller härvid följande resultat, hvars bevis utan svårighet framgår ur det föregående:

Ekvationerna (27) äro förenliga om determinanten (30) har värdet 0 *och dessutom något af följande villkor är uppfylldt:*

1°. *Åtminstone en af de underdeterminanter af tredje ordningen som kunna bildas af elementen i de tre första kolonnerna i determinanten (30) är skild från* 0.

2°. *Alla underdeterminanter af tredje ordningen till determinanten (30) försvinna, men bland de underdeterminanter af andra ordningen som kunna bildas ur elementen i dess tre första kolonner finnes åtminstone en som är skild från* 0.

3°. *Alla underdeterminanter af andra ordningen till determinanten (30) försvinna, men något af elementen i dess tre första kolonner är skildt från* 0.

4°. *Alla element i determinanten (30) äro noll.*

Om intet af dessa fall inträffar, d. v. s. om $D \neq 0$, eller om de underdeterminanter af tredje ordningen som kunna bildas ur de tre första kolonnernas element alla försvinna men någon annan underdeterminant af tredje ordningen är skild från 0, eller om alla de underdeterminanter af andra ordningen som innehålla element endast från de tre första kolonnerna hafva värdet 0 men någon annan underdeterminant af andra ordningen är skild från 0, eller om slutligen alla element i de tre första kolonnerna försvinna men något element i den fjärde kolonnen är skildt från 0, hafva ekvationerna (27) icke någon gemensam lösning.

Vi behandla ännu i korthet ett annat problem som enkelt löses medels determinanter, och hvilket kan återföras till det föregående.

Vi betrakta ett ekvationssystem,

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases}$$

hvars determinant $a_1 b_2 - a_2 b_1$ är skild från 0 och hvilket följaktligen har en och endast en lösning, x_0, y_0, och söka det värde, ω, som en viss lineär funktion

$$a_3 x + b_3 y + c_3$$

antar för $x = x_0, y = y_0$.

För de betraktade värdena x_0, y_0 bestå följande tre ekvationer samtidigt:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 \qquad = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 \qquad = 0,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 - \omega = 0.$$

Dessa ekvationer äro således kompatibla, och enligt satsen s. 596 är följaktligen den af deras koefficienter bildade determinanten lika med 0

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Denna likhet, som bestämmer ω, kan enligt satsen 7° s. 590 skrifvas under formen

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

och om den senare determinanten utvecklas efter elementen i dess sista kolonn, erhålles för ω det eleganta uttrycket:

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Öfningsuppgifter (samtliga uppgifter böra lösas med användande af determinanter):

1) För hvilka värden af ϱ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = \varrho x \\ 4x + \ \ y = \varrho y \end{cases}$$

andra lösningar än $x = 0, y = 0$, och hvilka äro dessa lösningar?

2) Angif villkoret för att punkterna x_1, y_1 och x_2, y_2 skola ligga på samma räta linie genom origo.

3) Lös följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0. \end{cases}$$

4) Bestäm alla värdesystem x, y, z som satisfiera ekvationerna

$$\begin{cases} 3x - 2y + \ \ z = 0 \\ 4x + \ \ y - 5z = 0. \end{cases}$$

5) Bestäm riktningscosinerna för en rät linie som är vinkelrät a) mot linierna $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ och $\frac{x}{l'} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{n'}$, b) mot linierna $\frac{x}{2} = y = -z$ och $\frac{x}{5} = z, y = 2$.

6) Beräkna följande determinanters värden enligt de olika förfaringssätt som angifvits i n⁰ 5 och n⁰ 6:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ e & f & g \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 2 & p \\ 2 & d & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 19 & 14 & 30 \\ 22 & 13 & 35 \\ 34 & 21 & 54 \end{vmatrix}.$$

7) Lös följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 9z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x - \ \ y + 6z = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x + 2y + 5z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x + 5y + 3z = 21 \end{cases} ; \quad \begin{cases} ax + cz + e = 0 \\ by + dz + f = 0 \\ cx + dy + g = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 5x - 7y + \ \ z = 5 \\ 3x - 4y - \ \ z = 1 \\ x - 2y + 5z = 7. \end{cases}$$

8) Koordinaterna x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 och x_3, y_3, z_3 för tre punkter i rymden satisfiera villkoret

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Hvilken slutsats kan härur dragas om dessa punkters läge?

9) Vi beteckna såsom tidigare med A_ν, B_ν, C_ν de till elementen a_ν, b_ν, c_ν hörande underdeterminanterna i determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Bevisa likheten

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = D^2 .$$

10) Bestäm alla värdesystem x, y, z, u som satisfiera ekvationerna

$$\begin{cases} 4x + 6y - 2z + 3u = 0 \\ 3x + 4y + 3z - u = 0 \\ 2x + 8y - z + 4u = 0 . \end{cases}$$

11) För hvilka värden af p äro ekvationerna

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = -\frac{11}{2} p \\ 3x - py = 2 \end{cases}$$

kompatibla?

12) Uppställ villkoret för att tre räta linier i xy-planet, hvilkas ekvationer äro gifna, skola skära hvarandra i en punkt.

13) Bestäm afståndet från skärningspunkten mellan de räta linierna $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ och $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ till linien $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$.

14) Bringa ekvationen för den räta linie i xy-planet, som går genom punkterna x_1, y_1 och x_2, y_2, under formen $D = 0$, där D är en determinant af tredje ordningen, och härled denna ekvation på enklaste sätt.

15) Sök villkoren för att fyra plan, hvilkas ekvationer äro gifna, skola skära hvarandra a) i en punkt, b) längs en rät linie.

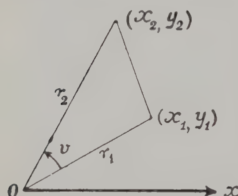
16) Bestäm afståndet från skärningspunkten mellan planen $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ och $a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$ till planet $ax + by + cz + d = 0$.

17) Uppskrif ekvationen för det plan som går genom punkterna x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 och x_3, y_3, z_3 under formen $D = 0$, där D är en determinant af fjärde ordningen.

Not II.

Användning af determinanter för beräkning af polygoners areor.

1. **Arean af en triangel.** — Vi betrakta i ett gifvet plan en triangel $P_0 P_1 P_2$, välja P_0 till origo för ett rätvinkligt koordinatsystem, och beteckna koordinaterna för punkterna P_1 och P_2 i detta system med x_1, y_1 och x_2, y_2. Vidare beteckna vi med r_1, φ_1 och r_2, φ_2 nämnda punkters polära koordinater med afseende å origo såsom pol och positiva x-axeln såsom axel, hvarvid den polära vinkeln φ räknas såsom den analytiska geometrin föreskrifver, samt slutligen med v storleken af den af triangelns vinklar som har sin spets i origo. Man har $v = \pm(\varphi_2 - \varphi_1)$, där tecknet + gäller om $\varphi_2 > \varphi_1$, tecknet − om $\varphi_2 < \varphi_1$.



Mätetalet för en triangels yta är lika med halfva produkten af mätetalen för en af dess sidor och motstående höjdlinie, eller således lika med halfva produkten af mätetalen för två sidor och sinus för mellanliggande vinkel. Mätetalet t för den betraktade triangelns yta erhåller alltså uttrycket

$$t = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin v = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= \pm \frac{1}{2} (r_1 \cos \varphi_1 . r_2 \sin \varphi_2 - r_2 \cos \varphi_2 . r_1 \sin \varphi_1).$$

Men

$$r_1 \cos \varphi_1 = x_1, \quad r_1 \sin \varphi_1 = y_1, \quad r_2 \cos \varphi_2 = x_2, \quad r_2 \sin \varphi_2 = y_2,$$

och ofvanstående likhet kan således skrifvas

$$(1) \qquad t = \pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Enligt hvad ofvan sagts bör man i högra membrum välja tecknet + om $\varphi_2 > \varphi_1$, tecknet − om $\varphi_2 < \varphi_1$.

Vi skola gifva regeln för bestämmandet af tecknet i likheten (1) en annan form. Låt $A_1 A_2 \ldots A_n$ vara en godtycklig polygon i xy-planet.

Vi tänka oss en rörlig punkt, P, som kontinuerligt genomlöper denna polygons perimeter, i riktningen $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$. Om då koordinatsystemet förflyttas i planet så att origo faller i punkten P och den positiva x-axeln utmed nämnda punkts fortskridningsriktning, kommer den positiva y-axeln, såframt P icke sammanfaller med någon af polygonens hörnpunkter, ständigt att vara riktad antingen *inåt* eller *utåt* i förhållande till polygonens yta. I förra fallet säges $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ utgöra ett omlopp af polygonens perimeter i *positiv* riktning eller, kortare, *ett positivt omlopp*, i senare fallet *ett negativt omlopp*[1]).

För den ofvan betraktade triangeln $P_0 P_1 P_2$ utgör, såsom ur figuren på föregående sida omedelbart framgår, $P_0 P_1 P_2 P_0$ ett positivt omlopp om $\varphi_2 > \varphi_1$, ett negativt omlopp om $\varphi_2 < \varphi_1$, och omvändt.

Vi böra således i likheten (1) välja tecknet + eller tecknet − allt efter som riktningen från P_1 till P_2 sammanfaller med den positiva eller den negativa omloppsriktningen af triangelns perimeter.

Vi betrakta nu en triangel i godtyckligt läge i förhållande till koordinatsystemet. Koordinaterna för triangelns hörnpunkter P_0, P_1, P_2 må vara x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2. Om vi välja P_0 till origo för ett nytt koordinatsystem hvars axlar hafva samma riktningar som det gifna systemets, äro koordinaterna för punkterna P_1 och P_2 i det nya systemet lika med $x_1 - x_0, y_1 - y_0$ resp. $x_2 - x_0, y_2 - y_0$, och för triangelns mätetal t erhålles således, enligt hvad ofvan visats, uttrycket

$$t = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

Men determinanten i högra membrum kan skrifvas (jmf. s. 580)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & -x_0 \\ y_1 & -y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_0 & x_2 \\ -y_0 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_0 & -x_0 \\ -y_0 & -y_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}.$$

Om vi införa den kortare beteckningen

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = D(P, P'),$$

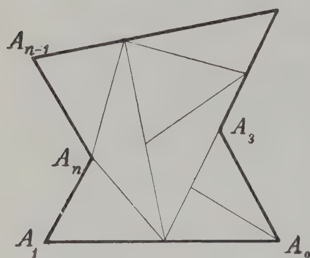
där P och P' utgöra de punkter i planet hvilkas koordinater äro x, y resp. x', y', antar vårt resultat således formen

[1]) Om, såsom brukligt är, axlarnas positiva riktningar väljas så att den vridning om 90° kring origo, som öfverför den positiva x-axeln i den positiva y-axeln, för åskådaren ter sig såsom en vridning *motsols*, ligger vid ett positivt omlopp af polygonens perimeter det inre af polygonen för åskådaren ständigt *till venster* om fortskridningsriktningen.

(3) $$t = \pm \frac{1}{2} \left\{ D(P_0, P_1) + D(P_1, P_2) + D(P_2, P_0) \right\},$$

där man har att välja tecknet + eller tecknet − allt efter som $P_0 P_1 P_2 P_0$ utgör ett positivt eller ett negativt omlopp af triangelns perimeter.

2. **Bevis för fundamentalsatsen i läran om polygoners areor. En polygons area uttryckt medels determinanter.** — Vi betrakta en godtycklig polygon i xy-planet och beteckna med $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dess hörnpunkter, tagna i positiv omloppsriktning. Vi dela polygonen på något sätt i trianglar, och vilja bevisa att *summan af dessa trianglars mätetal beror endast af koordinaterna för polygonens hörnpunkter och erhåller alltså samma värde huru än polygonens delning i trianglar verkställes*, hvilken sats spelar en fundamental roll i läran om plana figurers areor (jmf. s. 330).



Vi anmärka först att, om P_0 och P äro två godtyckliga punkter i planet och på dessas sammanbindningslinie väljes en följd af punkter, $P_1, P_2, \ldots, P_k$, man har

(4) $$D(P_0, P) = D(P_0, P_1) + D(P_1, P_2) + \cdots + D(P_k, P).$$

Ty om koordinaterna för punkterna $P_0, P_1, \ldots, P_k, P$ äro $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, x, y$, och om ekvationen för den räta linie på hvilken dessa punkter ligga skrifves under formen $y = mx + b$, hvilket är möjligt om nämnda linie icke är parallell med y-axeln, erhålles

$$D(P_0, P) = \begin{vmatrix} x_0 & x \\ y_0 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x \\ mx_0 + b & mx + b \end{vmatrix} = b(x_0 - x),$$

och likaså

$$D(P_0, P_1) = b(x_0 - x_1), \; D(P_1, P_2) = b(x_1 - x_2), \ldots, D(P_k, P) = b(x_k - x),$$

hvarur riktigheten af likheten (4) omedelbart framgår. På analogt sätt bevisas denna likhet i det fall då den räta linien genom punkterna P_0 och P är parallell med y-axeln.

A, B, C må vara hörnpunkterna, tagna i positiv omloppsriktning, i en af de trianglar i hvilka den gifna polygonen delats. På denna triangels perimeter kunna ligga vissa andra hörnpunkter i triangelnätet. Vi antaga att på sidan AB ligga punkterna $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, på sidan BC punkterna $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$, på sidan CA punkterna $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$, sålunda att, då triangelns perimeter genomlöpes i positiv riktning, man i ordning råkar på punkterna

(5) $$A, A_1, \ldots, A_\alpha, B, B_1, \ldots, B_\beta, C, C_1, \ldots, C_\gamma, A.$$

Enligt (3) är den betraktade triangelns mätetal lika med

(6) $$\frac{1}{2}\left\{D(A,B)+D(B,C)+D(C,A)\right\}.$$

Å andra sidan är, enligt (4),

$$D(A,B)=D(A,A_1)+D(A_1,A_2)+\cdots+D(A_\alpha,B),$$

$$D(B,C)=D(B,B_1)+D(B_1,B_2)+\cdots+D(B_\beta,C),$$

$$D(C,A)=D(C,C_1)+D(C_1,C_2)+\cdots+D(C_\gamma,A).$$

Om vi för punkterna (5) införa den enhetligare beteckningen

(5)′ $$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_\mu, P_{\mu+1} (=P_1),$$

kan uttrycket (6) således skrifvas

(6)′ $$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu} D(P_\nu, P_{\nu+1}),$$

och ett liknande uttryck erhålles för mätetalet af enhvar af de öfriga trianglarnas ytor.

Låt PP' allmänt beteckna en sträcka i triangelnätet som förenar två successiva hörnpunkter. Om denna sträcka icke utgör en del af den gifna polygonens perimeter, tillhör den perimetrarna af två närliggande trianglar, och då dessa genomlöpas i positiv riktning, kommer nämnda sträcka i den ena triangeln att genomlöpas från P till P', i den andra från P' till P. I uttrycket för den förra triangelns mätetal svarar då mot PP' termen $\frac{1}{2}D(P,P')$, i uttrycket för den senare triangelns mätetal termen $\frac{1}{2}D(P',P)$. Men enligt (2) är $D(P',P)=-D(P,P')$, och då vi addera uttrycken för trianglarnas mätetal taga således de mot sträckan PP' svarande termerna ut hvarandra.

Om sträckan PP' utgör en del af polygonens perimeter, tillhör den däremot perimetern af en enda af de betraktade trianglarna, och då denna genomlöpes i positiv riktning, kommer PP' att genomlöpas i en riktning som sammanfaller med den positiva omloppsriktningen af polygonens perimeter. Om denna går från P till P', svarar således i uttrycket för summan af trianglarnas mätetal mot sträckan PP' i förevarande fall termen $\frac{1}{2}D(P,P')$.

Låtom oss med $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ $(Q_{m+1}=Q_1)$ beteckna de hörnpunkter i triangelnätet som ligga på den gifna polygonens perimeter,

tagna i positiv omloppsriktning. Af det ofvan sagda kunna vi då sluta att summan af alla de betraktade trianglarnas mätetal är lika med

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m} D(Q_\nu, Q_{\nu+1}).$$

Men enligt (4) är summan af de termer i $\sum D(Q_\nu, Q_{\nu+1})$, hvilka svara mot delarna af sidan $A_1 A_2$ i den gifna polygonen, lika med $D(A_1, A_2)$, summan af de termer som svara mot delarna af sidan $A_2 A_3$ lika med $D(A_2, A_3)$, o. s. v., och vi erhålla alltså såsom slutresultat för summan af trianglarnas mätetal uttrycket

$$(7)'\qquad \frac{1}{2}\left\{D(A_1, A_2) + D(A_2, A_3) + \cdots + D(A_{n-1}, A_n) + D(A_n, A_1)\right\},$$

där punkterna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ äro tagna i positiv omloppsriktning.

Detta uttryck beror endast af koordinaterna för polygonens hörnpunkter $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Om dessa koordinater i ordning betecknas med

$$x_1, y_1, \quad x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n,$$

antar vårt resultat, då det fullständigt utskrifves, formen

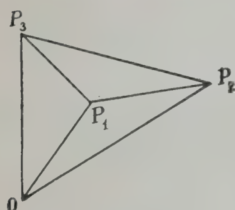
$$(7)''\qquad \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right\}.$$

Vi hafva härmed bevisat fundamentalsatsen i läran om polygoners areor, och samtidigt erhållit ett enkelt och elegant uttryck (7)″ för beräkningen af en polygons area, då koordinaterna för dess hörnpunkter äro gifna.

Not III.

Användning af determinanter för beräkning af polyedrars volymer.

1. **Volymen af en tetraeder.** — Vi införa i rymden ett rätvinkligt koordinatsystem, och betrakta först en tetraeder som har en hörnpunkt i origo O. Dess öfriga hörnpunkter må vara P_1, P_2, P_3, och dessas koordinater



$$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \quad x_3, y_3, z_3.$$

Mätetalet för tetraederns volym är lika med en tredjedel af produkten af mätetalen för en af dess sidoytor, t. ex. OP_1P_2, och motstående höjdlinie. Ekvationen för planet OP_1P_2 kan skrifvas

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

där

$$\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

och afståndet från punkten P_3 till detta plan är lika med

$$\pm \frac{\alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Om mätetalet för triangelytan OP_1P_2 betecknas med t och riktningscosinerna för normalen mot triangelns plan med l, m, n, erhålles å andra sidan, med stöd af satsen om en plan ytas projektion[1]) och likheten (1) s. 602,

$$lt = \pm \frac{1}{2}\alpha, \quad mt = \pm \frac{1}{2}\beta, \quad nt = \pm \frac{1}{2}\gamma,$$

---

[1]) L. Lindelöf, *Lärobok i Analytisk geometri*, s. 171.

hvarur, på grund af relationen $l^2+m^2+n^2=1$, följer

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Såsom mätetal för tetraederns volym erhålla vi således uttrycket

$$(1)\qquad \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

där det ännu återstår att bestämma tecknet.

För den i detta uttryck ingående determinanten, hvars kolonner i ordning innehålla koordinaterna för punkterna P_1, P_2, P_3, införa vi den kortare beteckningen $D(P_1, P_2, P_3)$:

$$(2)\qquad D(P_1, P_2, P_3)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Då en determinant af tredje ordningen bibehåller sitt värde vid en cyclisk permutation af dess kolonner (jmf. s. 588), ändras värdet af $D(P_1, P_2, P_3)$ icke om punkterna P_1, P_2, P_3 permuteras cycliskt.

För att afgöra hvilket tecken man bör välja i uttrycket (1), anställa vi några enkla geometriska betraktelser.

Vi välja i xyz-rymden ett godtyckligt plan, uppresa normalen i en punkt P af detsamma, och fastställa på denna normal en bestämd riktning PQ. Härefter tänka vi oss det gifna rätvinkliga koordinatsystemet flyttadt så att origo faller i punkten P och den positiva z-axeln utmed normalen PQ, hvarvid x- och y-axlarna sammanfalla med tvenne vinkelräta axlar i det gifna planet. Om dessa axlar väljas till abskiss- resp. ordinataxel för planets punkter, erhålles för perimetern af hvarje polygon i planet, enligt den s. 603 uppställda definitionen, en fullt bestämd positiv omloppsriktning. Vi beteckna denna kort såsom *den positiva omloppsriktningen med afseende å normalen* PQ[1]. Om normalens riktning ändras, ändras äfven den positiva omloppsriktningen.

---

[1]) Låtom oss antaga koordinatsystemet sådant, att den vridning om 90° kring z-axeln som öfverför den positiva x-axeln i den positiva y-axeln, betraktad från den positiva z-axelns sida, ter sig såsom en vridning *motsols*. För en person som tänkes vandra längs perimetern af en i det gifna planet belägen polygon i den ofvan fixerade positiva omloppsriktningen, på samma sida om planet som normalen PQ, ligger i detta fall det inre af polygonen ständigt *till venster* om fortskridningsriktningen (jmf. noten s. 603).

Om mot hvarje sidoyta af den på föregående sida afbildade tetraedern (hvars hörnpunkt P_1 antages vara synlig för åskådaren) uppreses en normal som är riktad *utåt* i förhållande till tetraedern, utgöra $P_1P_2P_3P_1$, $P_1OP_2P_1$, $P_1P_3OP_1$ och OP_3P_2O, såframt koordinatsystemet är sådant som ofvan antagits, de positiva omloppsriktningarna af sidotrianglarnas perimetrar i förhållande till nämnda normaler.

Vi tänka oss nu den gifna tetraedern genom en kontinuerlig vridning kring origo öfverförd i ett sådant läge att kanten OP_1 faller utmed den positiva x-axeln och kanten OP_2 i xy-planet, på samma sida om x-axeln som den positiva y-axeln. De punkter i hvilka P_1, P_2, P_3 härvid öfvergå må betecknas med P_1', P_2', P_3' och deras koordinater med

$$x_1', 0, 0; \quad x_2', y_2', 0; \quad x_3', y_3', z_3'.$$

I tetraederns nya läge har determinanten (2) öfvergått i

$$(3) \qquad D(P_1', P_2', P_3') = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ 0 & y_2' & y_3' \\ 0 & 0 & z_3' \end{vmatrix} = x_1' y_2' z_3'.$$

Då x_1' och y_2' enligt vårt antagande äro positiva, har determinanten $D(P_1', P_2', P_3')$ samma tecken som z_3', och är således positiv om punkten P_3' ligger på samma sida om xy-planet som den positiva z-axeln, negativ om P_3' ligger på den motsatta sidan om xy-planet. I förra fallet utgör $P_1'P_2'P_3'P_1'$ ett positivt omlopp, i senare fallet ett negativt omlopp med afseende å den yttre normalen mot tetraederns sidoyta $P_1'P_2'P_3'$, såsom man finner om man tänker sig koordinatsystemet vridet kring linien $P_1'P_2'$ så att origo faller i planet $P_1'P_2'P_3'$, på samma sida om det ursprungliga xy-planet som punkten P_3'.

Omvändt sluta vi häraf att punkten P_3' har det förra eller det senare af de ofvan angifna lägena och determinanten $D(P_1', P_2', P_3')$ således är positiv eller negativ, allt efter som, i tetraederns ursprungliga läge, $P_1P_2P_3P_1$ utgör ett positivt eller ett negativt omlopp med afseende å den yttre normalen mot sidoytan $P_1P_2P_3$.

Enligt hvad tidigare visats är mätetalet för tetraederns volym lika med uttrycket $\frac{1}{6}\,|D(P_1, P_2, P_3)|$. Då tetraedern hela tiden förblir kongruent med sig själf och dess mätetal således konstant, sluta vi häraf att $D(P_1, P_2, P_3)$ under vridningen bibehåller ett konstant värde a, och att således i hvarje ögonblick $D(P_1, P_2, P_3) = \pm a$. Men determinanten $D(P_1, P_2, P_3)$ är en kontinuerlig funktion af koordinaterna för punkterna P_1, P_2, P_3, och då dessa under vridningen ändras kontinuerligt, kan värdet af $D(P_1, P_2, P_3)$ icke plötsligt ändras från a till $-a$ eller omvändt. Alltså bibehåller determinanten $D(P_1, P_2, P_3)$ under tetraederns vridning ett konstant värde, och dess begynnelsevärde (2) är följaktligen lika med dess slutvärde (3).

Då denna slutsats sammanställes med den föregående, finner man att värdet af determinanten (2) är positivt eller negativt beroende på om $P_1P_2P_3P_1$ utgör ett positivt eller ett negativt omlopp med afseende å den yttre normalen mot tetraederns sidoyta $P_1P_2P_3$. I uttrycket (1) bör man således i förra fallet välja tecknet $+$, i senare fallet tecknet $-$.

Vi gå till en tetraeder i allmänt läge i förhållande till koordinatsystemet. Dess hörnpunkter må vara P_0, P_1, P_2, P_3 och dessas koordinater i ordning

$$x_0, y_0, z_0;\ x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3.$$

Om P_0 väljes till origo för ett nytt koordinatsystem hvars axlar hafva samma riktningar som det gifna systemets, äro koordinaterna för punkterna P_1, P_2, P_3 i det nya systemet

$$x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0;\ x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0;\ x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0,$$

och enligt vårt tidigare resultat är således mätetalet för tetraederns volym lika med uttrycket

$$(4) \qquad \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix},$$

där tecknet bestämmes såsom ofvan är sagdt.

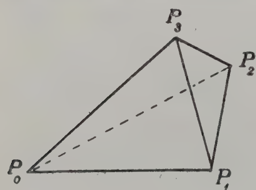
Den i detta uttryck ingående determinanten kan (jmf. satsen 7° s. 590) skrifvas såsom en summa af åtta determinanter, af hvilka emellertid fyra försvinna emedan de innehålla lika kolonner. De återstående determinanterna kunna sättas under formen

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_2 & x_0 \\ y_3 & y_2 & y_0 \\ z_3 & z_2 & z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_0 \\ y_1 & y_3 & y_0 \\ z_1 & z_3 & z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & x_0 \\ y_2 & y_1 & y_0 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{vmatrix}.$$

Med användande af beteckningen (2) kunna vi således skrifva uttrycket för tetraederns mätetal under formen

$$(4)' \quad \pm\frac{1}{6}\left\{D(P_1, P_2, P_3) + D(P_3, P_2, P_0) + D(P_1, P_3, P_0) + D(P_2, P_1, P_0)\right\}.$$

Punkterna P_1, P_2, P_3, P_3, P_2, P_0, P_1, P_3, P_0 och P_2, P_1, P_0 följa på hvarandra i samma omloppsriktning med afseende å tetraederns motsvarande sidotrianglars yttre normaler. Är denna omloppsriktning den positiva, har man i uttrycket (4)′ att välja tecknet +, i motsatt fall tecknet −.



För att förenkla den följande framställningen förkorta vi ytterligare beteckningssättet. Om t är en godtycklig triangel i rymden, beteckna vi med D_t den determinant hvars kolonner i ordning innehålla koordinaterna för triangelns tre hörnpunkter, tagna i en bestämd omloppsriktning, hvilken vi angifva särskildt för hvarje gång. Vi kunna då formulera det ofvan erhållna resultatet på följande sätt:

Om t_1, t_2, t_3, t_4 beteckna sidotrianglarna i en gifven tetraeder, är mätetalet för dennas volym lika med uttrycket

$$\frac{1}{6}(D_{t_1} + D_{t_2} + D_{t_3} + D_{t_4}),$$

där hvarje sidotriangels hörnpunkter äro tagna i den positiva omloppsriktningen med afseende å tetraederns yttre normal.

2. **En hjälpsats.** — Vi betrakta i xyz-rymden ett godtyckligt plan och i detta en polygon, $A_1 A_2 \ldots A_n$, hvilken vi tänka oss på något sätt delad i trianglar, $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$. För dessa bilda vi determinanterna $D_{t_1}, D_{t_2}, \ldots, D_{t_\mu}$, i det vi taga hvarje triangels hörnpunkter i den omloppsriktning i hvilken polygonens hörnpunkter $A_1, A_2, \ldots, A_n$ följa på hvarandra. Vi skola visa att *summan*

$$D_{t_1} + D_{t_2} + \cdots + D_{t_\mu} \tag{5}$$

kan bringas under formen

$$D(A_1, A_2, A_3) + D(A_1, A_3, A_4) + \cdots + D(A_1, A_{n-1}, A_n), \tag{6}$$

och har således samma värde huru än den gifna polygonen delas i trianglar.

Vi antaga först att polygonens plan icke är vinkelrätt mot xy-planet och att dess ekvation således kan skrifvas under formen

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma. \tag{7}$$

Om vi projiciera polygonen och dess deltrianglar $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ på xy-planet, erhålla vi i detta plan en polygon som likaledes är delad i trianglar, $t_1', t_2', \ldots, t_\mu'$.

Om koordinaterna för hörnpunkterna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i den gifna polygonen i ordning betecknas med

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \cdots; \xi_n, \eta_n, \zeta_n,$$

hafva de motsvarande hörnpunkterna $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ i projektionspolygonen koordinaterna

$$\xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2; \cdots; \xi_n, \eta_n,$$

och vi kunna således af föregående not sluta att summan af mätetalen för trianglarna $t_1', t_2', \ldots, t_\mu'$ är lika med

$$\pm\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \xi_n & \xi_1 \\ \eta_n & \eta_1 \end{vmatrix}\right\},$$

där man har att välja tecknet + eller − allt efter som $A_1' A_2' \dots A_n' A_1'$ utgör ett positivt eller ett negativt omlopp i xy-planet (jmf. s. 603).

Vi betrakta nu den första termen i summan (5). Om P_1, P_2, P_3 äro hörnpunkterna i triangeln t_1, tagna i den tidigare fastställda omloppsriktningen, och om dessa punkters koordinater betecknas med

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3,$$

är

$$D_{t_1} = D(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Men enligt det gifna planets ekvation (7) är

$$z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma,\quad z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma,\quad z_3 = \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma,$$

och om vi i ofvanstående determinant från elementen i den tredje raden subtrahera den första radens element multiplicerade med α och den andra radens element multiplicerade med β, hvarvid determinantens värde icke förändras (jmf. s. 590—591), erhålles

$$D_{t_1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = \gamma \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Uttrycket inom klammer är, enligt föregående not, lika med det dubbla mätetalet för ytan af triangeln t_1', taget med positivt eller negativt tecken beroende på om denna triangels hörnpunkter (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) följa på hvarandra i positiv eller negativ omloppsriktning, eller, hvilket är detsamma, om $A_1' A_2' \dots A_n' A_1'$ utgör ett positivt eller ett negativt omlopp af projektionspolygonens perimeter.

Liknande resultat erhållas för de öfriga termerna i summan (5), och vi finna således att denna summa är lika med produkten af 2γ och summan af mätetalen för trianglarna $t_1', t_2', \dots, t_\mu'$, tagen med positivt eller negativt tecken beroende på om $A_1' A_2' \dots A_n' A_1'$ utgör ett positivt eller ett negativt omlopp i xy-planet.

Då denna slutsats sammanställes med den föregående, erhålles till resultat att summan (5), i hvilken omloppsriktning hörnpunkterna A_1', $A_2', \dots, A_n'$ i projektionspolygonen än följa på hvarandra, är lika med uttrycket

$$\gamma \left\{ \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \xi_n & \xi_1 \\ \eta_n & \eta_1 \end{vmatrix} \right\}. \tag{8}$$

För termerna i summan (6) erhållas åter, genom precis samma räkning som ofvan, likheterna

$$D(A_1, A_2, A_3) = \gamma\left\{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}\right\},$$

$$D(A_1, A_3, A_4) = \gamma\left\{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_1 \\ \eta_4 & \eta_1 \end{vmatrix}\right\},$$

. . . . ,

$$D(A_1, A_{n-1}, A_n) = \gamma\left\{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_{n-1} \\ \eta_1 & \eta_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_{n-1} & \xi_n \\ \eta_{n-1} & \eta_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_n & \xi_1 \\ \eta_n & \eta_1 \end{vmatrix}\right\},$$

och då dessa likheter adderas, finner man att summan (6) jämväl är lika med uttrycket (8). Alltså hafva summorna (5) och (6) samma värde, h. s. b.

Om den gifna polygonens plan är vinkelrätt mot xy-planet, bevisar man satsen genom att projiciera figuren på ett annat koordinatplan.

I det fall då den gifna polygonen är en triangel, T, kan det ofvan bevisade resultatet skrifvas under formen

$$D_T = D_{t_1} + D_{t_2} + \cdots + D_{t_\mu},$$

hvarvid förutsättes att alla trianglars hörnpunkter genomlöpas i samma riktning.

3. **Bevis för fundamentalsatsen i läran om polyedrars volymer. Mätetalet för en polyeders volym uttryckt medels determinanter.** — Vi betrakta nu en godtycklig polyeder och dela densamma på något sätt i tetraedrar. Vi vilja bevisa att *summan af mätetalen för dessa tetraedrars volymer har samma värde huru än polyederns delning verkställts* (jmf. s. 350).

Tetraedrarnas sidotrianglar delas i allmänhet af närliggande tetraedrars kanter i polygoner. En dylik polygon tillhör, om den utgör en del af polyederns yta, endast en af tetraedrarna, medan den i annat fall är gemensam för två närliggande tetraedrars ytor. Vi dela enhvar af ifrågavarande polygoner på något sätt i trianglar.

T må vara en af tetraedrarna, t_1, t_2, t_3, t_4 dess sidotrianglar och $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu$ de trianglar i hvilka dessa delats. Enligt n⁰ 1 är mätetalet för volymen af denna tetraeder lika med

$$\frac{1}{6}\left(D_{t_1} + D_{t_2} + D_{t_3} + D_{t_4}\right),$$

förutsatt att hvarje sidotriangels hörnpunkter tagas i positiv omloppsriktning i förhållande till tetraederns yttre normal. Men å andra sidan är

$$D_{t_1}+D_{t_2}+D_{t_3}+D_{t_4}=D_{\tau_1}+D_{\tau_2}+\cdots+D_{\tau_\mu},$$

om jämväl i enhvar af trianglarna $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu$ hörnpunkterna genomlöpas i positiv riktning med afseende å tetraederns yttre normal; ty enligt n° 2 är D_{t_1} lika med summan af de termer i högra membrum som svara mot trianglar τ hvilka utgöra delar af triangeln t_1, D_{t_2} lika med summan af de termer som svara mot trianglar hvilka innehållas i t_2, o. s. v. Alltså kan mätetalet för volymen af tetraedern T skrifvas

$$\frac{1}{6}\left(D_{\tau_1}+D_{\tau_2}+\cdots+D_{\tau_\mu}\right), \tag{9}$$

och för de öfriga tetraedrarnas mätetal erhållas liknande uttryck.

Låtom oss betrakta en triangel τ som är gemensam för två närliggande tetraedrars ytor. Om dess hörnpunkter betecknas med P_1, P_2, P_3, svarar mot densamma i uttrycket för den ena tetraederns mätetal termen $\frac{1}{6}D(P_1, P_2, P_3)$, i uttrycket för den andra tetraederns mätetal termen $\frac{1}{6}D(P_1, P_3, P_2)$, ty då tetraedrarnas yttre normaler i en punkt af triangeln τ hafva motsatta riktningar, är äfven den positiva omloppsriktningen af denna triangels perimeter olika om triangeln räknas till den ena eller till den andra tetraedern. Men enligt (2) är $D(P_1, P_3, P_2) = -D(P_1, P_2, P_3)$, och de två termer som svara mot triangeln τ taga således ut hvarandra då vi bilda summan af tetraedrarnas mätetal.

Vi sluta häraf att summan af alla tetraedrarnas mätetal är lika med

$$\frac{1}{6}\sum D_{\tau'}, \tag{10}$$

där summationen är utsträckt öfver de trianglar, τ', i hvilka den gifna polyederns sidopolygoner blifvit delade genom det ofvan angifna förfarandet. I enhvar af dessa trianglar äro hörnpunkterna tagna i positiv omloppsriktning med afseende å den yttre normalen mot den af polyederns sidoytor af hvilken triangeln utgör en del.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ må vara hörnpunkterna i en af polyederns sidopolygoner, tagna i positiv omloppsriktning med afseende å den yttre normalen. Enligt n° 2 är summan af de termer i $\sum D_{\tau'}$, hvilka svara mot trianglar τ' som tillhöra ifrågavarande sidopolygon, lika med uttrycket

$$D(A_1, A_2, A_3)+D(A_1, A_3, A_4)+\cdots+D(A_1, A_{n-1}, A_n),$$

och vi finna således att *summan af mätetalen för de betraktade tetraedrarnas volymer kan skrifvas under formen*

$$\frac{1}{6}\sum\left\{D(A_1, A_2, A_3)+D(A_1, A_3, A_4)+\cdots+D(A_1, A_{n-1}, A_n)\right\}, \tag{10$'$}$$

där summationen är utsträckt öfver polyederns samtliga sidopolygoner, och hörnpunkterna i enhvar af dessa polygoner äro tagna i positiv omloppsriktning med afseende å den yttre normalen.

Uttrycket (10)′ beror endast af koordinaterna för polyederns hörnpunkter, och summan af tetraedrarnas mätetal erhåller således samma värde huru än polyederns delning i tetraedrar verkställes. Vår sats är härmed bevisad.



Rättelser.

Sidan 67, rad 14 uppifrån, bör stå $n=2$ i stället för $n=1$.

Sidan 67, rad 10 nedifrån, bör stå $n=3$ i stället för $n=2$.

Sidan 199 bör den sista formeln lyda $\lim_{n=\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Sidan 210 har i högra membrum af den andra formeln rotens index p fallit bort. Högra membrum af den sista formeln på samma sida bör lyda $x(x^{p-1}-1)-a$.

Sidan 406 bör ekvationen (30) lyda

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

och den sista ekvationen

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Sidan 459, rad 6 nedifrån, bör inom parentesen stå

$$f(a+2h)+f(a+4h)+\cdots+f(a+(2n-2)h)$$

i stället för

$$f(a+2h)+f(a+4h)+\cdots+f(b).$$

Sidan 539, rad 12 nedifrån, bör stå $k_1 - \mu = mn$ i stället för $k - \mu = mn$.




3 0112 017233773